

Examen Matrices y Determinantes

Instrucciones para el examen:

- Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
- **CALIFICACIÓN:** Cada ejercicio tiene una puntuación diferentes y en el enunciado se especifica la valoración de cada apartado. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
- **TIEMPO:** 50 minutos.
- Aunque utilices calculadora, muestra claramente los pasos y tu conocimiento de los conceptos y las fórmulas matemáticas que se están aplicando.
- Evita el uso de decimales. Expresa los resultados en forma de fracciones y radicales. En caso de tener que usarlos, redondea a la centésima.
- Sé claro/a, limpio/a, ordenado/a y cuida la ortografía. No se corregirá lo que no se entienda claramente.

1. (4 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz $A - mI$ según los valores de m .
- (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$.
- (1 punto) Resolver la ecuación $XA = A + 2X$

SOLUCIÓN:

a) Calculamos $A - mI$ y estudiamos su determinante

$$A - mI = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 0 & 3-m & 0 \\ 0 & -1 & 3-m \end{pmatrix}; |A - mI| = \begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 0 & 3-m & 0 \\ 0 & -1 & 3-m \end{vmatrix} = -m \begin{vmatrix} 3-m & 0 \\ -1 & 3-m \end{vmatrix} = -m(3-m)^2$$

$$|A - mI| = -m(3-m)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 3 \end{cases}$$

Por tanto, si $m \neq 0, 3$ el $|A| \neq 0$ y el rango de la matriz es 3.

Estudiemos ahora por separado los otros dos casos que nos quedan.

$$\boxed{m_1 = 0}$$

$$A - 0I = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

$$\boxed{m_2 = 3}$$

$$A - 3I = A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A) = 2$$

b) La matriz inversa de $A-2I$ se puede calcular porque su determinante es distinto de cero.

$$|A-2I| = -2(3-2)^2 = -2$$

Calculamos todos los adjuntos de $B = A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 & B_{12} &= - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & B_{13} &= + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\
 B_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 & B_{22} &= + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 & B_{23} &= - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \\
 B_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 & B_{32} &= - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & B_{33} &= + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2
 \end{aligned}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Por último, para calcular la inversa, trasponemos y dividimos por el determinante:

$$B^{-1} = \frac{(B^*)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Para resolver la ecuación primero despejamos X :

$$XA = A + 2X \rightarrow XA - 2X = A \rightarrow X(A - 2I) = A \rightarrow X = A \cdot (A - 2I)^{-1}$$

Sustituyendo cada matriz por su valor y multiplicando, obtenemos el valor de X :

$$X = A \cdot (A - 2I)^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. (3 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- (1'5 puntos). Hallar las condiciones que deben cumplir a , b y c , para que se verifique que $A \cdot B = B \cdot A$.
- (1'5 puntos). Para $a = b = c = 1$, calcular las cuatro primeras potencias de B , y demostrar por inducción una fórmula para B^n .

$$a) \quad \Delta \cdot B = B \cdot \Delta \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 5c+2c & 2c+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5a+2c = 5a+2b & \rightarrow 2c = 2b; & c = b \\ 5b+2c = 2a+5b & \rightarrow 2c = 2a; & c = a \\ 2a+5c = 5c+2c & \rightarrow 2a = 2c; & a = c \\ 2b+5c = 2c+5c & \rightarrow 2b = 2c; & b = c \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \boxed{a=b=c} \\ \text{condición} \\ \text{pedida} \end{array}$$

$$b) \quad \text{Si } a=b=c=1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2^0$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2^1$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2^2$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2^3$$

$$\begin{array}{l} B^1 = 1 = 2^0 \\ B^2 = 2 = 2^1 \\ B^3 = 4 = 2^2 \\ B^4 = 8 = 2^3 \\ \vdots \\ B^n = 2^{n-1} \end{array}$$

$$\boxed{B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. (3 puntos) Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$, empleando para ello las propiedades de los determinantes.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} \stackrel{F_1+F_2+F_3+F_4}{=} \begin{vmatrix} x+6 & x+6 & x+6 & x+6 \\ 1 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} \stackrel{\text{factor } (x+6) \text{ de } F_1}{=} (x+6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 3 \\ 3 & 3 & 3 & x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} C_4 - C_3 \\ C_3 - C_2 \\ C_2 - C_1 \\ = (x-6) \cdot \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 2-x & 0 \\ 2 & 0 & x-2 & 3-x \\ 3 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \stackrel{F_3 + F_4}{=} (x-6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 2-x & 0 \\ 5 & 0 & x-2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} =$$

$$\stackrel{F_2 + F_3}{=} (x-6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & x-1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & x-2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-6)(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$(x-6)(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \begin{cases} \rightarrow x-6=0 \rightarrow x=6 \\ \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1 \\ \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2 \\ \rightarrow x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$