

MATRICES

1. Escribe una matriz A de dimensión 2×5 cuyos elementos a_{ij} cumplan que $a_{ij} = i - j$
2. Siendo A, B y X matrices cuadradas despeja X en la ecuación: $XBA - XA = I$ simplificando lo más posible la expresión que resulte.
3. Dada la ecuación: $AX = X - B^t$, halla X para $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
4. Resuelve $A^{-1}X = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$
5. Calculando A^2, A^3 y A^4 con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ¿podrías sospechar el resultado de A^{100} sin hacer los cien productos?
6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
 - a) Calcula: $\frac{1}{2}(A + B)$, $3A - 2B$ y $(A \cdot B)^{1000}$
 - b) Halla la matriz inversa de A comprobando el resultado
7. Halla el rango de la matriz con el método de Gauss: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
8. Sean $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Halla k sabiendo que $M^2 - 6M + kI = O$.
9. Comprueba el cumplimiento de la propiedad distributiva $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ utilizando las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
10. Explica el significado de la siguiente frase: 'En una cierta matriz de dimensión 4×3 , la 3ª fila depende linealmente de la 1ª y 2ª filas'. Pon un ejemplo numérico explicando lo realizado.
11. A es una matriz de dimensión (3×2) y D es una matriz de dimensión (4×1) . Halla las dimensiones de las matrices B, C y E sabiendo que: $A \cdot (B - C) \cdot D = 3E$
12. Razona la **falsedad** de las siguientes aseveraciones poniendo ejemplos que las contradigan:
 - a) Al producto de dos matrices cuadradas de misma dimensión no le afecta el orden de los factores.
 - b) Al multiplicar dos matrices obtendremos siempre un resultado distinto según el orden de los factores.
 - c) Para comprobar si se cumple o no la conmutativa del producto siempre podremos realizar las dos multiplicaciones cambiando el orden de dos matrices.

① $a_{ij} = i-j$ ($i=1,2$
 $j=1,2,3,4,5$) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

② $XBA - XA = I$

$X(BA - A) = I \rightarrow X = I \cdot (BA - A)^{-1} = \boxed{(BA - A)^{-1}}$

Tambien:

$X(B - I)A = I \rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot (B - I)^{-1}}$

③ $AX = X - B^t$; $AX - X = -B^t$; $(A - I)X = -B^t$; $X = - (A - I)^{-1} \cdot B^t$

$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = 2F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$
 $\downarrow \begin{matrix} F_1 = -F_1/2 \\ F_2 = -F_2 \end{matrix}$
 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array} \right)$

$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$
 $X = - \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$

④ $A^{-1}X = B \Rightarrow X = (A^{-1})^{-1} \cdot B = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix}}$

⑤ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$A^{100} = \begin{pmatrix} 101 & -100 \\ 100 & -99 \end{pmatrix}$

⑥ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}}$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = 2F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow (A \cdot B)^{1000} = I^{1000} = \boxed{I}$

7

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = 2F_1 - F_2 \\ F_3 = 3F_1 - F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -10 & -6 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 = 2F_2 - F_3 \\ F_4 = F_2 - F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\text{rank} = 2}$$

8

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}$$

$$M^2 - 6M + KI = 0$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -18 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -18 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5+k & 0 \\ 0 & -5+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{k=5}$$

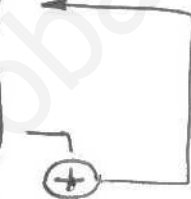
9

$$A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A \cdot (B+C) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -4 & 10 & -1 \\ 0 & -4 & -6 \\ -3 & -2 & -15 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -10 & 5 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \\ -17 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 14 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$



10 Significa que los elementos de la 3ª fila son iguales a una combinación lineal de la 1ª y 2ª filas.

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Esta 3ª fila depende linealmente de las dos primeras filas porque coincide con el doble de la 1ª menos la 2ª. ($F_3 = 2F_1 - F_2$)

11

$$A \cdot (B-C) \cdot D = 3 \cdot E$$

$$(3 \times 2) \cdot (m \times m) \cdot (4 \times 1) = (p \times 4)$$

B, C tienen que ser (2×4)
E " " " " (3×1)

12 a) FALSO. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$$

Si importa el orden de los factores

b) FALSO. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ No puede hacerse}$$

c) FALSO. Podría salir lo mismo. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$