MATRICES.

1º/ Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;,\; B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \;\text{ y }\; C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A{\cdot}B{\cdot}X=C{\cdot}X+I$, siendo $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2º/ Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial $A\cdot X\cdot B=I$, donde:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;,\; B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \;,\; I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3º/ Determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A\cdot X+B=C$, donde:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \;,\; B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

4º/ Determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^2\cdot X-B=A\cdot X$, donde:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\text{ y }\; B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5º/ Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,
determinar los valores x, y, z que hacen posible la igualdad $A\cdot B=A+C$.

6º/ Determinar las matrices A y B que verifican:

$$2\mathrm{A}-B=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad A+2\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

7º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar las matrices X que verifique: $A\cdot X=X\cdot A$.

8º/ Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A\cdot M\cdot C$.

b) Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

c) Calcula $A^t \cdot B \cdot C^t$.

9º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^3 , A^5 y A^n .

10º/Calcula A^{2000} , siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halla A^{2004} .

12º/ Determine los valores x e y que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

13º/ Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real m.

14º/ Determina dos matrices X e Y tales que:

$$3X-2Y=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad 4X-3Y=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

SOLUCIONES:

1º/ Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A\cdot B\cdot X=C\cdot X+I$, siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Despejamos la matriz X de la ecuación:

$A\cdot B\cdot X=C\cdot X+I$

$A\cdot B\cdot X-C\cdot X=I$

$(A\cdot B-C)\cdot X=I$

Multiplicamos $(A\cdot B-C)^{-1}$ por la izquierda:

$$(A\cdot B-C)^{-1}\cdot(A\cdot B-C)\cdot X=(A\cdot B-C)^{-1}\cdot I$$

$$I\cdot X=(A\cdot B-C)^{-1}$$

$$\boxed{X=(A\cdot B-C)^{-1}}$$

Calculamos previamente la matriz $A\cdot B\text{-}C$:

$$A\cdot B-C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

Calculamos ahora su matriz inversa:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -1 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 1/4 & -1/4\end{array}\right)$$

$$F_2\rightarrow F_2-F_1 \qquad F_1\rightarrow 2\mathrm{F}_1+F_2 \qquad F_1\rightarrow\frac{1}{2}F_1 \quad F_2\rightarrow\frac{-1}{4}F_2$$

Por tanto la solución:

$$\boxed{X=(A\cdot B-C)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/4 & -1/4\end{pmatrix}}$$

2º/ Determinar la matriz X solución de la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = I$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \ , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la ecuación:

$$A \cdot X \cdot B = I$$

Multiplicamos A^{-1} por la izquierda y B^{-1} por la derecha:

$$A^{-1} A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1}$$

$$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1}$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B^{-1}}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$F_2 \to F_2 + F_1 \qquad F_1 \to 3F_1 - 2F_2 \qquad \begin{array}{l} F_1 \to \dfrac{-1}{3} F_1 \\ F_2 \to \dfrac{1}{3} F_2 \end{array}$$

Calculamos B^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_1 \to F_1 + F_2 \qquad F_2 \to F_2 - F_1 \qquad F_1 \to F_1 + 3F_2 \qquad \begin{array}{l} F_1 \to -F_1 \\ F_2 \to -F_2 \end{array}$$

Por tanto, la solución es:

$$X = A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1 & -1/3 \end{pmatrix}}$$

3º/ Determinar la matriz X que verifica la ecuación matricial $A \cdot X + B = C$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Despejamos la matriz X de la ecuación:

$$A \cdot X + B = C$$

$$A \cdot X = C - B$$

Multiplicamos A^{-1} por la izquierda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot (C - B)}$$

Calculamos A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & 15 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$F_2 \rightarrow 3F_2 + F_1 \qquad F_1 \rightarrow F_1 + 5F_2 \qquad \begin{array}{l} F_1 \rightarrow \frac{1}{3} F_1 \\ F_2 \rightarrow -F_2 \end{array}$$

Y finalmente calculamos la solución:

$$X = A^{-1} \cdot (C - B) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -17 \\ -4 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -17 \\ -4 & -1 & 10 \end{pmatrix}}$$

4º/ Determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^2 \cdot X - B = A \cdot X$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos la matriz X de la ecuación:

$$A^2 \cdot X - B = A \cdot X$$

$$A^2 \cdot X - A \cdot X = B$$

$$\left(A^2 - A\right) \cdot X = B$$

Multiplicamos $\left(A^2 - A\right)^{-1}$ por la izquierda:

$$\left(A^2 - A\right)^{-1} \cdot \left(A^2 - A\right) \cdot X = \left(A^2 - A\right)^{-1} \cdot B$$

$$I \cdot X = \left(A^2 - A\right)^{-1} \cdot B$$

$$\boxed{X = \left(A^2 - A\right)^{-1} \cdot B}$$

Calculamos $A^2 - A$ previamente, resultando:

$$A^2 - A = A \cdot A - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y posteriormente hallamos $\left(A^2 - A\right)^{-1}$, obteniendo:

$$\left(A^2 - A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, hallamos la solución:

$$X = \left(A^2 - A\right)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

5º/ Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

determinar los valores *x*, *y*, *z* que hacen posible la igualdad $A\cdot B=A+C$.

$$A\cdot B=A+C$$

Desarrollamos esta igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ 3 & -2 & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 11 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\text{x}+y & 1 & 2 \\ -x+9 & -6 & -1+3\text{z} \\ x+y-6 & 5 & 1-2\text{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & -6 & 2 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Igualando los coeficientes de ambas matrices, obtenemos las ecuaciones:

(1)	$2\text{x}+y=0$	(4)	$-x+9=10$	(7)	$x+y-6=-5$
(2)	$1=1$	(5)	$-6=-6$	(8)	$5=5$
(3)	$2=2$	(6)	$-1+3\text{z}=2$	(9)	$1-2\text{z}=-1$

Las ecuaciones (2), (3), (5) y (8), evidentemente se cumplen cualesquiera que sean los valores de las incógnitas.

De la ecuación (4) : $-x+9=10\Rightarrow -x=10-9\Rightarrow -x=1\Rightarrow x=-1$

De la ecuación (6) : $-1+3\text{z}=2\Rightarrow 3\text{z}=2+1\Rightarrow z=\frac{3}{3}\Rightarrow z=1$

De la ecuación (1): $2\text{x}+y=0\Rightarrow 2\cdot(-1)+y=0\Rightarrow -2+y=0\Rightarrow y=2$

Luego la solución es *x*=-1, *y*=2, *z*=1, y las ecuaciones (7) y (9) se cumplen para estos valores.

6º/ Determinar las matrices *A* y *B* que verifican:

$$2A-B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix} \qquad A+2B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A-B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix}=C \\ A+2B=\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}=D \end{array}\right\}$$

Eliminamos *A*:

$$\left.\begin{array}{r} 2A-B=C \\ A+2B=D \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2A-B=C \\ -2\cdot(A+2B=D) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2A-B=C \\ -2A-4B=-2D \end{array}\right\}$$

$$-5B=C-2D \Rightarrow B=\frac{-1}{5}(C-2D)$$

$$B=\frac{-1}{5}(C-2D)=\frac{-1}{5}\cdot\left[\begin{pmatrix}-4 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{-1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-10 & 5 & 15\\ 0 & -10 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Eliminamos *B*:

$$\left.\begin{array}{r} 2A-B=C \\ A+2B=D \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2\cdot(2A-B=C) \\ A+2B=D \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 4A-2B=2C \\ A+2B=D \end{array}\right\}$$

$$5A=2C+D \Rightarrow A=\frac{1}{5}(2C+D)$$

$$A=\frac{1}{5}(2C+D)=\frac{1}{5}\cdot\left[2\cdot\begin{pmatrix}-4 & 1 & 7\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -2 & -4\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 0 & 10\\ 15 & 5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

7º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, hallar las matrices X que verifique: $A\cdot X=X\cdot A$.

Llamamos $X=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$.

Desarrollamos la igualdad $A\cdot X=X\cdot A$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ -d & -e & -f\\ d & e & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -b+c & 0\\ d & -e+f & 0\\ g & -h+i & 0\end{pmatrix}$$

Igualando coeficientes tenemos:

(1) $a=a$	(4) $-d=d$	(7) $d=g$
(2) $b=-b+c$	(5) $-e=-e+f$	(8) $e=-h+i$
(3) $c=0$	(6) $-f=0$	(9) $f=0$

De estas ecuaciones deducimos: $b=0$, $c=0$, $d=0$, $f=0$, $g=0$, $i=e+h$.

Por lo tanto, las soluciones son de la forma:

$$X=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & h & e+h\end{pmatrix}, \text{ donde } a, e, h\in\mathbb{R} .$$

8º/ Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la dimensión de la matriz M para que pueda efectuarse el producto $A \cdot M \cdot C$.

b) Determine la dimensión de la matriz N para que $C^t \cdot N$ sea una matriz cuadrada.

c) Calcula $A^t \cdot B \cdot C^t$.

a) Dado que A es de dimensión 2×3 y C es de dimensión 3×2 para que pueda efectuarse $A \cdot M \cdot C$ tendríamos que:

Número de filas de M = Número de columnas de A = 3.
Número de columnas de M = Número de filas de C = 3.

Por tanto, M ha de ser una matriz cuadrada de orden 3.

b) C^t es una matriz de dimensión 2×3 , luego para que pueda efectuarse el producto $C^t \cdot N$:

Número de filas de N = Número de columnas de C^t = 3.

El producto $C^t \cdot N$ tendrá 2 filas y sus columnas será el número de columnas de N, por lo que para que el resultado sea una matriz cuadrada, el número de columnas de N ha de ser 2.

En conclusión, N será de dimensión 3×2 .

c) $$A^t \cdot B \cdot C^t=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -4 & 6 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

9º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, halla A^3 , A^5 y A^n .

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

…........

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

10º/Calcula A^{2000} , siendo $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&8\\0&8&0\\8&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&8\\0&8&0\\8&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0&0\\0&16&0\\0&0&16\end{pmatrix}\ \ldots$$

$$A^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}0&0&2^n\\0&2^n&0\\2^n&0&0\end{pmatrix} & si\ \ n\ \ es\ \ par\\ \begin{pmatrix}2^n&0&0\\0&2^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix} & si\ \ n\ \ es\ \ impar\end{cases}$$, por lo tanto: $A^{2000}=\begin{pmatrix}2^{2000}&0&0\\0&2^{2000}&0\\0&0&2^{2000}\end{pmatrix}$.

11º/ Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, halla A^{2004} .

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=A$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I\ \ldots$$

$A^n=I$ si n es par , y $A^n=A$ si n es impar, por lo que $A^{2004}=A$.

12º/ Determine los valores *x* e *y* que hacen cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Operando: $\begin{pmatrix} x-y \\ 3x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2x \\ 3y-2 \end{pmatrix}$.

Igualando y resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=3+2x \\ 3x+2y=3y-2 \end{array}\right\} \quad \text{Solución:} \quad x=\frac{-5}{4} \quad , \quad y=\frac{-7}{4} \quad .$$

13º/ Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real *m*.

Aplicamos el método de Gauss, para hacer ceros por debajo de la diagonal:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & m+5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3m+45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} F_2 \to F_2 + 3F_1 & \quad F_3 \to 3F_3 + 5F_2 \\ F_3 \to F_3 - 5F_1 & \end{array}$$

Si $3m+45=0 \Rightarrow m=\frac{-45}{3}=-15$.

Por tanto:

Si $m=-15 \Rightarrow r(A)=2$ (hay 2 filas no nulas).
Si $m\neq-15 \Rightarrow r(A)=3$ (las 3 filas son no nulas).

14º/ Determina dos matrices *X* e *Y* tales que:

$$3X-2Y=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & -1\end{pmatrix} \qquad 4X-3Y=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}\ .$$

$$\left.\begin{array}{r}3X-2Y=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & -1\end{pmatrix}=A\\ 4X-3Y=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}=B\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3X-2Y=A\\ 4X-3Y=B\end{array}\right\}$$

Eliminamos *Y*:

$$\left.\begin{array}{r}3\cdot(3X-2Y=A)\\ -2\cdot(4X-3Y=B)\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}9X-6Y=3A\\ -8X+6Y=-2B\end{array}\right\}$$

$$X=3A-2B$$

$$Y=3A-2B=3\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & -1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -14\\ 18 & -3\end{pmatrix}$$

Eliminamos *X*:

$$\left.\begin{array}{r}4\cdot(3X-2Y=A)\\ -3\cdot(4X-3Y=B)\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}12X-8Y=4A\\ -12X+9Y=-3B\end{array}\right\}$$

$$Y=4A-3B$$

$$Y=4A-3B=4\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & -1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -20\\ 23 & -4\end{pmatrix}$$