

Examen de 2º Bachiller CCSS. Matrices, Determinantes y Programación lineal

Cada problema tiene el valor que se indica, se valorará no sólo el resultado sino también el **desarrollo del problema** y el **uso correcto de la notación matemática**

Ejercicio 1: Una empresa de transportes debe organizar el traslado de dos productos A y B entre dos ciudades utilizando camionetas y furgones. Cada camioneta permite transportar 5 unidades de A y 4 de B, mientras que en cada furgón se puede transportar 2 unidades de A y 1 de B. La empresa no puede transportar más unidades de las que pueda vender en la ciudad de destino y en la ciudad de destino puede vender como máximo 90 unidades de A y 60 de B. El envío de una camioneta le reporta a la empresa un beneficio de 1600 euros, mientras que el envío de un furgón le reporta un beneficio de 600 euros. Usando técnicas de programación lineal, ¿cuántas camionetas y furgones deben usar para maximizar el beneficio en estos transportes? ¿A cuánto asciende dicho beneficio óptimo?

Solución:

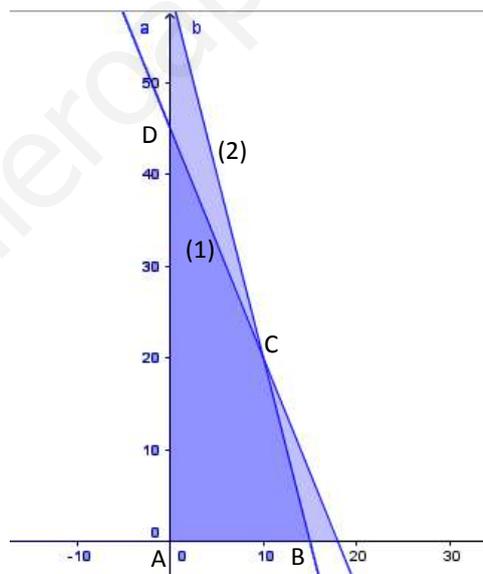
$x = n^{\circ}$ de camionetas; $y = n^{\circ}$ furgones

Limitación unidades de A: $5x + 2y \leq 90$

Limitaciones de B: $4x + y \leq 60$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (1) 5x + 2y \leq 90 \\ (2) 4x + y \leq 60 \end{array} \right\}$$

$A(0,0)$, $B(15,0)$, $D(0,45)$



$$C \begin{cases} (1) 5x + 2y = 90 \\ (2) 4x + y = 60 \end{cases} \quad y = 60 - 4x; 5x + 2(60 - 4x) = 90 \rightarrow -3x = -30 \rightarrow x = 10, y = 20 \quad C(10, 20)$$

$z = \text{beneficio} = 1600 \cdot x + 600 \cdot y$ (máximo)

$A(0,0) \rightarrow z = 0€$; $B(15,0) \rightarrow z = 24.000€$; $C(10,20) \rightarrow z = 28.000€$; $D(0,45) \rightarrow z = 27.000€$

El máximo beneficio será 28.000€ cuando se usan 10 camionetas y 20 furgonetas

Ejercicio 2.: Estudia el siguiente sistema en función del parámetro "a". Resuélvelo siempre que sea posible, dejando las soluciones en función de parámetros si fuera necesario. Resuélvelo para el caso particular a = 3.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 3y + az = 0 \end{cases}$$

Solución: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & a & 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$; $|A| = 2a + 6 + 3 - 4 - 9 - a = a - 4$

$$|A| = 0 \rightarrow a = 4.$$

Si $a = 4$, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 = n^\circ$ incógnitas \rightarrow SCD (Teorema de Rouche-Frobenius)

Si $a \in \mathbb{R} - \{4\}$ $\text{rang}(A) = 2$ y $\text{rang}(A^*) = 2 \rightarrow$ SI (Teorema de Rouche-Frobenius)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 + 5 - 6 - 15 = -7$$

Tiene solución si $a \in \mathbb{R} - \{4\}$. Resolvamos el sistema por Regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix}}{a - 4} = \frac{6a + 30 - 27 - 5a}{a - 4} = \frac{a + 3}{a - 4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}}{a - 4} = \frac{5a + 9 - 10 - 3a}{a - 4} = \frac{2a - 1}{a - 4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{a - 4} = \frac{9 + 5 - 6 - 15}{a - 4} = \frac{-7}{a - 4}$$

Si $a = 3$ el sistema es compatible determinado. Solución (sustituyendo en la solución anterior):
 $x = -6, y = -5, z = 7$

Ejercicio 3.: Una familia disponen de 80€ mensuales para realizar la compra en la carnicería. El primer mes compran 10 kg de carne de pollo, 6kg de carne de cerdo y 3kg de carne de ternera y le sobran 3,1€. El segundo me compra 10 kg de pollo, 7 kg de cerdo y 2kg de carne de ternera y le sobran 5,1€. El tercer mes compra 11 kg de carne de pollo, 6 kg de carne de cerdo y 2kg de ternera abonando 72€ y 30 céntimos. Suponiendo que no ha variado el precio de la carne en los meses calcular el precio por kg de las tres carnes.

x =precio pollo/kg; y =precio cerdo/kg; z =precio ternera/kg

$$\begin{cases} 10x + 6y + 3z = 80 - 3.1 \\ 10x + 7y + 2z = 80 - 5.1 \\ 11x + 6y + 2z = 72.3 \end{cases} \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 & 76.9 \\ 10 & 7 & 2 & 74.9 \\ 11 & 6 & 2 & 72.3 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 10 & 7 & 2 \\ 11 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A| = -19 \neq 0 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = n$ SCD (Teorema de Rouche-Frobenius).

$$\text{Regla de Cramer: } x = \frac{\begin{vmatrix} 76.9 & 6 & 3 \\ 74.9 & 7 & 2 \\ 72.3 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{-19} = 2.5 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 76.9 & 3 \\ 10 & 74.9 & 2 \\ 11 & 72.3 & 2 \end{vmatrix}}{-19} = 5.1 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 6 & 76.9 \\ 10 & 7 & 74.9 \\ 11 & 6 & 72.3 \end{vmatrix}}{-19} = 7.1$$

2.5€/kg el pollo, 5.1€/kg el cerdo y 7.1€/kg la ternera.