1. Deriva las siguientes funciones dejando su expresión en forma razonablemente simplificada:

a) $f(x) = e^{\frac{x}{3}} + 3\cos^2\left(\frac{x}{6}\right)$ b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Aplica la definición para hallar la función derivada de $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

3. Sea la función: $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$

a) Estudia el dominio y la continuidad de $f(x)$ indicando los tipos de discontinuidad que posea.

b) Halla, explicando brevemente el procedimiento, los límites de $f(x)$ en los infinitos.

4. La siguiente función $f(x)$ representa las ganancias o pérdidas en millones de euros de una empresa fundada hace dos años: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2 & \text{si} \quad -2 \le x < -1 \\ \dfrac{3x}{2x+4} & \text{si} \quad x \ge -1 \end{cases}$ donde x indica el número de años transcurridos, considerando x = 0 como el momento actual.

a) Estudia el dominio de la función $f(x)$

b) Cuando pasen '*muchos años*', ¿en qué situación de ganancias o pérdidas se espera que esté la empresa?

5. Sea la función: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & si \quad x < 2 \\ 3x + a & si \quad 2 \le x \le 5 \\ -x^2 + 13x + b & si \quad 5 < x \end{cases}$

a) Determina los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los valores de x

b) Demuestra que la función no es derivable en x = 2. ¿Cómo interpretas esta circunstancia?

1) a) $f'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}} + 3\cdot 2\cos\left(\frac{x}{6}\right)\cdot\left[-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{6}\right)\right]\cdot\frac{1}{6} = \boxed{\frac{e^{x/3}}{3} - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{6}\right)}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{1/x}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{\ln(1/x)}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}\ln(1/x)}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{x} =$

$= \boxed{\frac{\sqrt{x}}{2x}\cdot\left(\ln(1/x) - 2\right)}$

2) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left[3(x+h)^2 - 2(x+h)+1\right] - \left[3x^2 - 2x+1\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{3x^2} + 6xh + 3h^2 - \cancel{2x} - 2h + \cancel{1} - \cancel{3x^2} + \cancel{2x} - \cancel{1}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}(6x + 3h - 2) = \boxed{6x - 2}$

3) $x^2 + x - 6 = 0$

$x = 2, \; -3$

a) $\operatorname{dom} f = \boxed{\mathbb{R} - \{-3, 2\}}$ por ser una función racional.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3,2\}$ por ser racional.

$\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{-27-8}{0} = \frac{-35}{0} = \infty$ $\boxed{\text{Discont. Asintótica en } x=-3}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -8 \\ 2 & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \boxed{\frac{12}{5}}$ $\boxed{\text{Discontinuidad Evitable en } x=2}$

b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-8}{x^2+x-6} = \boxed{+\infty}$ $\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-8}{x^2+x-6} = \boxed{-\infty}$

4) a) $\frac{1}{2}x^2 - 2$ está definida en $[-2,-1)$

$\frac{3x}{2x+4}$ " " " $(-1,+\infty)$. En $x=-2$ se anula el denominador, pero no pertenece al 2º trozo de la función.

$\boxed{\operatorname{dom} f = [-2, +\infty)}$

b) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{2x+4} = \frac{3}{2} = \boxed{1'5}$

Cuando pasen 'muchos años' se espera que la empresa gane 1'5 millones de euros

5) Todas las expresiones son polinómicas, por lo que la función es continua en $(-\infty, 2)\cup(2,5)\cup(5,+\infty)$

En $x=2$:
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 12$
$f(2) = 6+a$
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 6+a$

$6+a = 12 \to \boxed{a=6}$ Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$.

En $x=5$: $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 15+a$

$f(5) = 15+a$

$\lim_{x \to 5^+} f(x) = -25+65+b$

$15+a = 40+b$; $\boxed{b = a-25}$ Para que $f(x)$ sea continua en $x=5$

$a=6 \Rightarrow \boxed{b=-19}$

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$ deben ser: $\boxed{a=6}$ $\boxed{b=-19}$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x<2 \\ 3 & \text{si } 2<x<5 \\ -2x+13 & \text{si } x>5 \end{cases}$$

$f'(2^-) = 12$

$f'(2^+) = 3$

Al ser la función continua en $x=2$, y tener distintos valores a izquierda y derecha de $x=2$, se trata de un punto anguloso: