NÚMEROS COMPLEJOS

ÍNDICE

Introducción

Los algebristas de los siglos xv y xvi, al resolver ecuaciones de segundo grado del tipo $x^2 - 4x + 13 = 0$ y llegar a la expresión $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{-36}}{2*1}$ decían: *No es posible* extraer la *raíz cuadrada* de un número negativo. Por tanto, la ecuación no tiene solución.

Pero en algún momento los algebristas se decidieron a operar con estas expresiones como si se tratara de números reales:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 3\sqrt{-1}$$

Y seguían operando con $\sqrt{-1}$ como si se tratara de un número real. En el siglo XVII ,Leibnitz, dijo que

> "$\sqrt{-1}$ *es una especie de anfibio entre el ser y la nada."*

Fue en el año 1777 cuando Euler le dio a $\sqrt{-1}$ el nombre de i (por imaginario).

El número imaginario i, operado elementalmente con los reales, dio lugar a los números complejos. Su representación gráfica, pasando de la recta real al plano complejo (Gauss, finales del siglo xviii), acabó de darles la entidad necesaria para que fueran plenamente aceptados.

1. ¿Cómo se maneja $\sqrt{-1}$?

Dijimos que "los algebristas del xvi decidieron operar con $\sqrt{-1}$ como si se trata de un número real".

Vamos a hacer como ellos: operar este "extraño personaje" consigo mismo y con los números reales sido las reglas de las operaciones entre números

Extraer fuera de la raíz

Observa cómo se extraen números de la raíz: $= \sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4\sqrt{-1}$

Potencias de $\sqrt{-1}$

De la definición de raíz cuadrada, es lógico que: $(\sqrt{-1})^2 = -1$

$(\sqrt{-1})^3 = -1\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$

$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1}) = 1\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$

Sumas

$(3 - 2\sqrt{-1}) + (5 + 6\sqrt{-1}) = 8 + (-2+6)\sqrt{-1} = 8 + 4\sqrt{-1}$

Multiplicaciones

$(3 - 2\sqrt{-1}) \bullet (5 + 6\sqrt{-1}) = 3\cdot5 + 3\cdot6\sqrt{-1} - 2\cdot\sqrt{-1}\cdot 5 - 2\sqrt{-1}\cdot6\sqrt{-1} = 15 + 18\sqrt{-1} - 10\sqrt{-1} - 12((\sqrt{-1})^2) = 15 + 8\sqrt{-1} - 12 \bullet (-1) = 15 + 12 = 27 + 8\sqrt{-1}$

Ecuaciones de segundo grado

La ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$ tiene por soluciones soluciones son: $2+3\sqrt{-1}$ y $2-3\sqrt{-1}$

- Resuelve: $x^2 + 10x + 29 = 0$
- $x^2 + 25 = 0$

2. Un nuevo campo numérico C

Al resolver $x^2 - 6x + 13 = 0$, obtenemos $3 + 2\sqrt{-1}$ y $3 - 2\sqrt{-1}$, soluciones que carecen de sentido en el conjunto de los reales porque $\sqrt{-1}$ no es un número real.

Los números complejos nacen del deseo de dar validez a estas expresiones. Para ello es necesario admitir como números válidos a $\sqrt{-1}$ y a todos los que se obtengan al operar con él como si se tratara de un número más.

- **Unidad imaginaria**. Se llama así al nuevo número $\sqrt{-1}$. Se designa por la letra *i.*

  $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$ (El nombre i viene de *imaginario).*

- **Números complejos. Son las expresiones *a + bi,* donde *a* y *b* son números reales.**
- **Componentes.** La expresión *a + bi* se llama forma **binómica** de un número complejo porque tiene dos componentes:

  ***a* componente real** **b componente imaginaria**

  También se llaman parte real y parte imaginaria.

- **Igualdad.** Dos números complejos son iguales cuando tienen la misma componente real y la misma componente imaginaria.
  - El conjunto de todos los números complejos se designa por e : $C = \{a + bi \,/\, a, b \in R\}$
- **Los números reales** son complejos, **R**$\subset$ **C**
  - Los reales son números complejos cuya componente imaginaria es cero: $a + 0i = a$
- **Números imaginarios** son los números complejos cuya componente imaginaria no es cero.
  - Por tanto, un número complejo o es real o es imaginario.

- **Números imaginarios puros** son los imaginarios cuya componente real es cero. $5i$; i ; i ; $-i$ son imaginarios puros.

- **Los números complejos *a + bi* y *-a - bi* se llaman opuestos.**

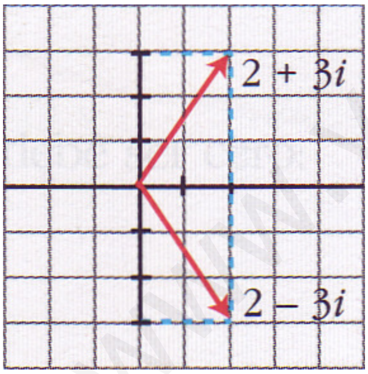
	3+7i	$-\sqrt{5}+8i$	8i	9
PARTE REAL	3	$-\sqrt{5}$	0	9
PARTE IMAGINARIA	+7	+8	+8	0

3. CONJUGADO DE UN NÚMERO COMPLEJO.

Dado un número complejo z=a+bi, llamamos Número Complejo Conjugado de z al número $\bar{z}$ = a - bi

Cualquier ecuación de segundo grado con coeficientes reales que no tenga solución real tiene dos soluciones imaginarias que son números complejos conjugados.

4. Representación gráfica de los números complejos. Forma binómica



Los reales llenan por completo la recta, de modo que a cada número real le corresponde un punto en la recta y a cada punto, un número real. Por eso hablamos de recta real.

Para representar los números complejos tenemos que salir de la recta y llenar el plano, pasando así de la **recta real** al **plano complejo.**

Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos. El eje *X* se llama eje real, y el Y, eje imaginario. El número complejo *a + b i* se representa mediante el punto *(a, b)* , que se llama su **afijo**, o mediante un vector (flecha) de origen (0, 0) y extremo *(a, b)* .

Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real, y los imaginarios puros, sobre el eje imaginario.

Dado el número complejo z=a+bi, al punto de coordenadas (a,b) que se llama **afijo** del número complejo

5. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

La suma, la resta y la multiplicación de números complejos se realizan siguiendo las reglas de las operaciones de los números reales y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

5.1. Suma y Diferencia de números complejos.

Sean z = a+bi y z' = c+di ➔

- Suma

z+z' = (a+bi)+(c+di) = (a+c) + (b+d)i ➔

- Resta

z-z' = (a+bi)-(c+di) = (a-c) + (b-d)i

5.2. Producto de un número complejo por un número real.

Sea z=a+bi y k un número real ➔ *k.z = k.(a+bi) = ka + kb i*

5.3. Producto de dos números complejos.

Sean z=a+bi y z'=c+di ➔

$$z.z' = (a+bi).(c+di) = a.c+adi+bci+bdi^2 =$$

$$=ac+adi+bci-bd =$$

$$\mathbf{(ac-bd)+(ad+bc)i}$$

5.4. Multiplicación de un número por su conjugado

$$(2+4i)(2-4i) = (2\cdot 2+8i-8i-16i^2 = 4+16 = 20$$

Multiplicando un número complejo por su conjugado se obtiene un número real. *Este resultado va a ser muy útil para dividir complejos: multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado de este último, consiguiendo así que en el denominador quede un número real.*

$z\cdot\bar{z} = (c + di) \bullet (c - di) = c^2 - cdi + cdi + d^2 = c^2 + d^2$

5.5. Cociente de dos números complejos.

$$z \div z' = \frac{a+b.i}{c+d.i} = \frac{(a+b.i).(c-d.i)}{(c+d.i).(c-d.i)} = \frac{(a.c+b.d)+(bc-ad).i}{c^2+d^2}$$

<u>Ejemplo</u>

$$\frac{5-3i}{4+2i} = \frac{5-3i}{4+2i}\frac{4-2i}{4-2i} = \frac{20-10i-12i+6i^2}{4^2+2^2} = \frac{20-6-22i}{4^2+2^2} = \frac{14-22i}{20} = \frac{14}{20} - \frac{22}{20}i$$

5.6. Propiedades de las operaciones con números complejos

- El 0 es el elemento neutro de la suma.
- Todo número complejo, ***a + bi,*** tiene un opuesto. ***-a - bi.***
- El 1 es el elemento neutro del producto.
- Todos los números complejos, *a + bi,* salvo el 0, tienen un inverso: $\dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

$$(a+bi)\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2+abi-abi-abi^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

En la práctica, las propiedades de estas operaciones permiten operar con los complejos de la misma forma que con los reales.

Procedemos así:

[x (5 - 2i)] *[x* - (5 + 20] = *[(x* - 5) + 2i] - 5) - 2i] = = *(x* - 5)^2 - (20^2 =

x^2 - 10x + 25 + 4 = x^2 - 10x + 2 Una solución es, por tanto, x^2 - 10x + 29.

Empezamos desarrollando la expresión dada:

$(2 + xi)^2 = 4 + 4xi - x^2 = (4 - x^2) + 4xi$

Para que este complejo sea imaginario puro, su parte real debe ser cero: $4 - x^2$ = O -> $x^2 = 4$ $x = + 2$

Ha de ser $x = 2$ o $x = -2$.

6. MÓDULO Y ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO.

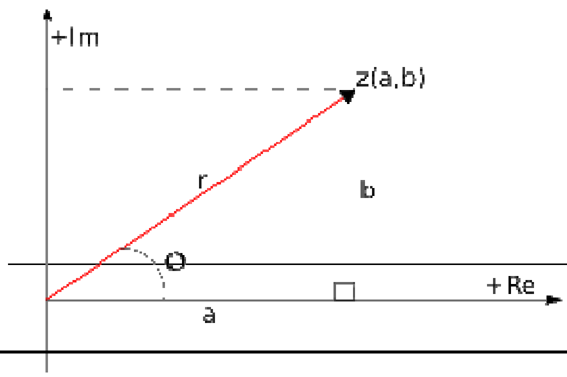
Se llama **módulo** del número complejo z=a+bi al valor**r = |z| =** $\sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt{a^2+b^2}$ **. Representa la longitud del vector que representa el complejo**

El argumento representa el ángulo que forma el vector del complejo y la horizontal

Se llama **argumento** del número complejo z=a+bi al valor **arg(z) =** $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$

7. REPRESENTACIÓN POLAR



Algunas veces, la representación de números complejos en la forma z = a + i b ("coordenadas rectangulares") es menos conveniente que otra representación, usando coordenadas polares.

Representamos el número complejo z en el plano de números complejos como un punto con coordenadas (a, b), denominado vector de posición.

Trazamos la distancia desde el punto (0,0) hasta (a, b), a la que llamaremos r, y, que como se ha visto antes, es igual al módulo de z, expresado | z | .

Esta distancia forma, con respecto al eje real positivo, un ángulo, denominado ϕ.

8. PASO DE POLAR ←→Binómica

Se llama **módulo** del número complejo z=a+bi al valor**r → |z|** = Se llama **argumento** del número complejo z=a+bi al valor **arg(z) =** $\alpha = \text{arctg}\,\frac{b}{a}$

$$z = r_\alpha \text{ donde } r=|z|$$

Si me dan el complejo en forma polar $z = r_\alpha$

$$z = r(\cos\alpha + i sen\alpha) \text{ donde } \alpha = \text{arcotg}(b/a)$$

9. OPERACIONES EN FORMA POLAR

9.1. Producto de dos números complejos.

Sean z = r_α y z' = r'_β => z.z' = $(r.r')_{\alpha+\beta}$

9.2. Cociente de dos números complejos.

Sean $z = r_\alpha$ **y** $z' = r'_\beta \Rightarrow \frac{z}{z'} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}$

9.3. Potenciación de Números Complejos.

$$z = r_\alpha \Rightarrow z^n = (r_\alpha)^n = (r)^n{}_{n.\alpha}$$

Si z = $r.(\cos\alpha + i.\text{sen}\,\alpha) \Rightarrow z^n = r^n.(\cos n.\alpha + i.\text{sen}.n\alpha)$

i^1 = i i^5 = i .....

i^2 = -1 i^6 = -1 .....

$i^3 = -i \quad i^7 = -i \quad .....$

$i^4 = 1 \quad i^8 = 1 \quad .....$

9.4. Radicación de un número complejo.

Se pasa de binómica a polar y después:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} \text{ tiene n raíces que serán } \begin{cases} \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+0\pi}{n}} \\ \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+2\pi}{n}} \\ \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+4\pi}{n}} \\ .... \\ .... \\ \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}} \end{cases}$$

10. Ecuaciones y sistemas en C

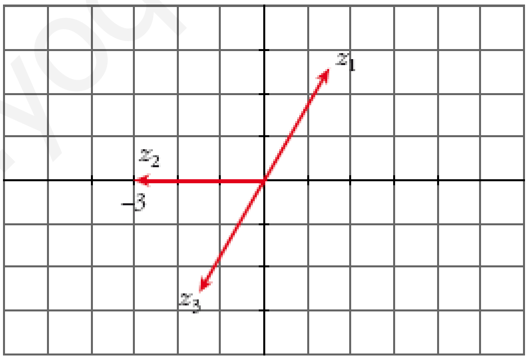
Resuelve la ecuación $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.

$$z^3 + 27 = 0 \;\rightarrow\; z = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180° + 360°\, n)/3} = 3_{60° + 120°\, n}; \quad n = 0,\, 1,\, 2$$

$$z_1 = 3_{60°} = 3(\cos 60° + i\, sen\, 60°) = 3\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i$$

$$z_2 = 3_{180°} = -3$$

$$z_3 = 3_{240°} = 3(\cos 240° + i\, sen\, 240°) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i$$



Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 + 1 = 0$

b) $x^6 + 64 = 0$

a) $x^4 + 1 = 0 \ \rightarrow \ x = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180°}} = 1_{(180° + 360°\,k)/2} = 1_{45° + 90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$1_{45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $1_{135°} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $1_{225°} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $1_{315°} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $x^6 + 64 = 0 \ \rightarrow \ x = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/6} = 2_{30° + 60°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$2_{30°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + 1$ $\qquad 2_{90°} = 2i$

$2_{150°} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$ $\qquad 2_{210°} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$

$2_{270°} = -2i$ $\qquad 2_{330°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$

EJERCICIOS RESUELTOS

1) Efectua las siguientes operaciones

a) $(6-5i)+(2-i)-2(-5+6i)$

b) $(2-3i)-(5+4i)+\frac{1}{2}(6-4i)$

c) $(3+2i)(4-2i)$

d) $(2+3i)(5-6i)$

e) $(-i+1)(3-2i)(1+3i)$

f) $\frac{2+4i}{4-2i}$

g) $\frac{1-4i}{3+i}$

h) $\frac{4+4i}{-3+5i}$

i) $\frac{5+i}{-2-i}$

j) $\frac{1+5i}{3+4i}$

k) $\frac{4-2i}{i}$

l) $6-3\left(5+\frac{2}{5}i\right)$

m) $\frac{(-3i)^2(1-2i)}{2+2i}$

a) $(6-5i)+(2-i)-2(-5+6i)=6-5i+2-i+10-12i=18-18i$

b) $(2-3i)-(5+4i)+\frac{1}{2}(6-4i)=2-3i-5-4i+3-2i=-9i$

c) $(3+2i)(4-2i)=12-6i+8i-4i^2=12+2i+4=16+2i$

d) $(2+3i)(5-6i)=10-12i+15i-18i^2=10+3i+18=28+3i$

e) $(-i+1)(3-2i)(1+3i)=(-3i+2i^2+3-2i)(1+3i)=(3-2-5i)(1+3i)=$

$=(1-5i)(1+3i)=1+3i-5i-15i^2=1+15-2i=16-2i$

f) $\frac{2+4i}{4-2i}=\frac{(2+4i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{8+4i+16i+8i^2}{16-4i^2}=\frac{20i}{16+4}=\frac{20i}{20}=i$

g) $\frac{1-4i}{3+i}=\frac{(1-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3-i-12i+4i^2}{9-i^2}=\frac{3-13i-4}{9+1}=\frac{-1-13i}{10}=$

$=\frac{-1}{10}-\frac{13}{10}i$

h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i} = \dfrac{(4+4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \dfrac{-12-20i-12i-20i^2}{9-25i^2} = \dfrac{-12-32i+20}{9+25} =$

$= \dfrac{8-32i}{34} = \dfrac{8}{34} - \dfrac{32}{34}i = \dfrac{4}{17} - \dfrac{16}{17}i$

i) $\dfrac{5+i}{-2-i} = \dfrac{(5+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \dfrac{-10+5i-2i+i^2}{4+1} = \dfrac{-10+3i-1}{5} = \dfrac{-11+3i}{5} =$

$= \dfrac{-11}{5} + \dfrac{3}{5}i$

j) $\dfrac{1+5i}{3+4i} = \dfrac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{3-4i+15i-20i^2}{9-16i^2} = \dfrac{3+11i+20}{9+16} =$

$= \dfrac{23+11i}{25} = \dfrac{23}{25} + \dfrac{11}{25}i$

k) $\dfrac{4-2i}{i} = \dfrac{(4-2i)(-i)}{i(-i)} = \dfrac{-4i+2i^2}{1} = -4i-2 = -2-4i$

l) $6-3\left(5+\dfrac{2}{5}i\right) = 6-15+\dfrac{6}{5}i = -9+\dfrac{6}{5}i$

m) $\dfrac{(-3i)^2(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{9i^2(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9+18i}{(2+2i)} =$

$= \dfrac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \dfrac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2} = \dfrac{-18+54i+36}{4+4} =$

$= \dfrac{18+54i}{8} = \dfrac{18}{8} + \dfrac{54}{8}i = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4}i$

2) Obtén polinomios cuyas raíces sean:

a) $2+\sqrt{3}i$ **y** $2-\sqrt{3}i$

b) $-3i$ **y** $3i$

c) $1+2i$ **y** $3-4i$

(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales).

a) $\left[x-\left(2+\sqrt{3}\,i\right)\right]\left[x-\left(2-\sqrt{3}\,i\right)\right] =$

$= \left[(x-2)-\sqrt{3}\,i\right]\left[(x-2)+\sqrt{3}\,i\right] = (x-2)^2 - \left(\sqrt{3}\,i\right)^2 =$

$= x^2-4x+4-3i^2 = x^2-4x+4+3 = x^2-4x+7$

b) $[x-(-3i)][x-3i] = [x+3i][x-3i] = x^2-9i^2 = x^2+9$

c) $[x-(1+2i)][x-(3-4i)] = [(x-1)-2i][(x-3)+4i] =$

$= (x-1)(x-3)+4(x-1)i-2(x-3)i-8i^2 =$

$= x^2-4x+3+(4x-4-2x+6)i+8 = x^2-4x+11+(2x+2)i =$

$= x^2-4x+11+2ix+2i = x^2+(-4+2i)x+(11+2i)$

3) ¿Cuánto debe valer x, real, para que $(25 - xi)^2$ sea imaginario puro?

SOLUCIÓN

$$(25 - xi)^2 = 625 + x^2 i^2 - 50xi = (625 - x^2) - 50xi$$

Para que sea imaginario puro:

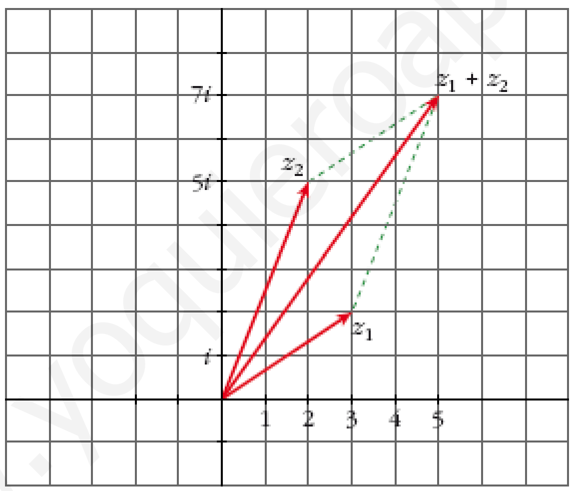
$$625 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 625 \rightarrow x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$$

Hay dos soluciones: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

4) Representa gráficamente $z1 = 3 + 2i$, $z2 = 2 + 5i$, $z1 + z2$. Comprueba que $z1 + z2$ es una diagonal del paralelogramo de lados $z1$ y $z2$.

SOLUCIÓN

$z_1 + z_2 = 5 + 7i$



5) **Escribe en forma polar los siguientes números complejos:**

a) $1 + \sqrt{3}\,i$ **b)** $\sqrt{3} + i$ **c)** $-1 + i$

d) $5 - 12i$ **e)** $3i$ **f)** -5

SOLUCIÓN

a) $1 + \sqrt{3}\,i = 2_{60°}$ b) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$ c) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

d) $5 - 12i = 13_{292°\,37'}$ e) $3i = 3_{90°}$ f) $-5 = 5$

6) Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) 5 (π/6) rad b) $2_{135º}$ c) 2 $_{495º}$ d) $3_{240º}$ e) 5 $_{180º}$ f) 4 $_{90º}$

SOLUCIÓN

$$a)\ 5_{(\pi/6)} = 5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\ \frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\ \frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$b)\ 2_{135°} = 2(\cos 135° + i\ sen\ 135°) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$$

$$c)\ 2_{495°} = 2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\ i$$

$$d)\ 3_{240°} = 3(\cos 240° + i\ sen\ 240°) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$e)\ 5_{180°} = -5$$

$$f)\ 4_{90°} = 4i$$

7) Sean los números complejos z1 = 460º y z2 = 3210º.

a) Expresa z1 y z2 en forma binómica.

b) Halla *z*1 · *z*2 y *z*2/*z*1, y pasa los resultados a forma polar.

c) Compara los módulos y los argumentos de *z*1 · *z*2 y *z*2/*z*1 con los de *z*1 y *z*2 e intenta encontrar relaciones entre ellos.

SOLUCIÓN

$$a)\ z_1 = 4_{60°} = 4(\cos 60° + i\ sen\ 60°) = 4\left(\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$$

$$z_2 = 3_{210°} = 3(\cos 210° + i\ sen\ 210°) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\ \frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$b)\ z_1 \cdot z_2 = \left(2 + 2\sqrt{3}\,i\right)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) =$$

$$= -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}\,i^2 = -3\sqrt{3} - 12i + 3\sqrt{3} = -12i = 12_{270°}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)}{\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(2 - 2\sqrt{3}i\right)}{\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)\left(2 - 2\sqrt{3}i\right)} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}i^2}{4 - 12i^2} = \frac{-3\sqrt{3} + 6i - 3\sqrt{3}}{4 + 12} = \frac{-6\sqrt{3} + 6i}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

$$c)\ z_1 \cdot z_2 = 4_{60°} \cdot 3_{210°} = (4 \cdot 3)_{60° + 210°} = 12_{270°}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210°}}{4_{60°}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210° - 60°} = \left(\frac{3}{4}\right)_1$$

8) Dados los complejos $z = 5_{45°}$, $w = 2_{15°}$, $t = 4i$, obtén en forma polar:

a) $z \cdot t$ b) $\dfrac{z}{w^2}$ c) $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2}$ d) $\dfrac{z \cdot w^3}{t}$

SOLUCIÓN

$z = 5_{45°}$ $w = 2_{15°}$ $t = 4i = 4_{90°}$

a) $z \cdot w = 10_{60°}$

b) $\dfrac{z}{w^2} = \dfrac{z}{4_{30°}} = \dfrac{5_{45°}}{4_{30°}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)_{15°}$

c) $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2} = \dfrac{125_{135°}}{2_{15°} \cdot 16_{180°}} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{-60°} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{300°}$

d) $\dfrac{z \cdot w^3}{t} = \dfrac{5_{45°} \cdot 8_{45°}}{4_{90°}} = 10_{0°} = 10$

9) Halla las seis raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.

SOLUCIÓN

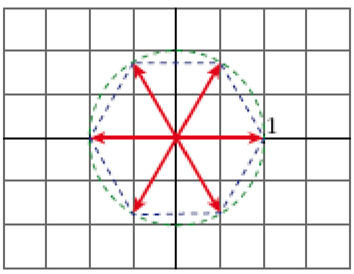
$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0°}} = 1_{(360° \cdot k)/6} = 1_{60° \cdot k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$1_{0°} = 1$ $1_{60°} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ $1_{120°} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$1_{180°} = -1$ $1_{240°} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ $1_{300°} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Representación:

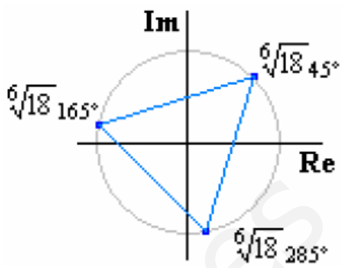


10) Hallar la siguiente raíz $\sqrt[3]{-3+3i}$

SOLUCIÓN

$$\sqrt[3]{-3+3i} = \left\{ -3+3i \in 2^{o}\,\text{Cuadrante} : \left\{ \begin{array}{l} \text{Módulo} : r = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} \\ \text{Argumento} : \alpha = 180 - \text{arctg}\left|\dfrac{3}{-3}\right| = 135 \end{array} \right. \right\} = \sqrt[3]{\sqrt{18}_{135^{o}}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{18}_{135^{o}}} = \left\{ \begin{array}{l} = \sqrt[3]{\sqrt{18}}_{\frac{135^{o}+360^{o}\cdot 0}{3}} = \sqrt[6]{18}_{45^{o}} \\ = \sqrt[3]{\sqrt{18}}_{\frac{135^{o}+360^{o}\cdot 1}{3}} = \sqrt[6]{18}_{165^{o}} \\ = \sqrt[3]{\sqrt{18}}_{\frac{135^{o}+360^{o}\cdot 2}{3}} = \sqrt[6]{18}_{285^{o}} \end{array} \right.$$



Los afijos de las soluciones de una raíz de un número mplejo son los vértices de un polígono regular de tantos lados como indique el índice de la raíz

11) Simplifica totalmente la expresión : $(-i)^{30} - (-i)^{31} - (-i^3)$.

$(-i)^{30} - (-i)^{31} - (-i^3) = ((-1)i)^{30} - ((-1)i)^{31} + i^3 = (-1)^{30} i^{30} - (-1)^{31} i^{31} + i^3 = i^{30} + i^{31} + i^3$.

Como 30 = 4× 7 + 2 y 31 = 4× 7 + 3 ,entonces: $i^{30} = (i^4)^7 \cdot i^2 = i^2 = -1$

; $i^{31} = (i^4)^7 \cdot i^3 = -i$

Por lo tanto, $(-i)^{30} - (-i)^{31} - (-i^3) = -1 - i - i = -1 - 2i$