NOMBRE ____

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:
   a) $\dfrac{(-12)^{29}(-3)^4}{(-4)^{21}(-9)^{30}}$ *(2 puntos)*
   b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{a\sqrt{a^3}}$
   c) $\sqrt[5]{a\ \sqrt[3]{a}}$
   d) $\dfrac{2}{4-2\sqrt{3}}$
2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 0.71$; $a_2 = 0.0071$; $a_3 = 0.000071$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 0.01 para obtener el que le sigue. Se pide:
   a) ¿Qué tipo de sucesión es? *(0,5 puntos)*
   b) ¿Cuánto suman los infinitos términos de esta sucesión? *(0,5 puntos)*
   c) ¿Podría decir una consecuencia relativa al resultado? *(0,5 puntos)*
3) En una progresión aritmética se tiene: $a_1 = 300$ y $a_{43} = 930$. Hallar d. *(1,5 puntos)*
4) Realizar: *(2 puntos)*
   a) Relacionar $\log_3 x$ con $\ln x$.
   b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular x sabiendo que $\log_x 125 = 3$.
   c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:
   $$A = \frac{100x^4\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}$$
   d) Quitar logaritmos en: $\log A = 4\log x - \dfrac{2}{3}\log z + 2 + \dfrac{1}{2}\log y$
5) Para $P(x) = 2x^3 + mx + 2$, hallar, sin efectuar la división, el valor de m que hace que la división entre $x + 2$ sea exacta. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido. *(1 punto)*
6) Calcular 24^2. A continuación, factorizar, sin usar calculadora, el polinomio siguiente: $P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Simplificar las siguientes expresiones, racionalizando el denominador, en su caso:

a) $\dfrac{(-12)^{29}(-3)^{4}}{(-4)^{21}(-9)^{30}}$ *(2 puntos)*

$$\frac{(-12)^{29}(-3)^{4}}{(-4)^{21}(-9)^{30}} = \frac{-12^{29}\,3^{4}}{-4^{21}\,9^{30}} = \frac{12^{29}\,3^{4}}{4^{21}\,9^{30}} = \frac{(3{\cdot}2^{2})^{29}\,3^{4}}{(2^{2})^{21}\,(3^{2})^{30}} = \frac{3^{29}(2^{2})^{29}\,3^{4}}{2^{42}\,3^{60}} =$$

$$= \frac{2^{58}}{2^{42}\,3^{60-29-4}} = \boxed{\frac{2^{16}}{3^{27}}}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^{7}}}{a\sqrt{a^{3}}}$

$$\frac{\sqrt[3]{a^{7}}}{a\sqrt{a^{3}}} = \frac{\sqrt[3]{a^{6}a}}{a\sqrt{a^{2}a}} = \frac{a^{2}\sqrt[3]{a}}{aa\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}\;\sqrt{a}}{\sqrt{a}\;\sqrt{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^{2}}\,\sqrt[6]{a^{3}}}{a} = \boxed{\frac{\sqrt[6]{a^{5}}}{a}}$$

c) $\sqrt[5]{a\,\sqrt[3]{a}}$

$$\sqrt[5]{a\,\sqrt[3]{a}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{3}a}} = \sqrt[15]{a^{4}}$$

d) $\dfrac{2}{4-2\sqrt{3}}$

$$\frac{2}{4-2\sqrt{3}} = \frac{2}{4-2\sqrt{3}}\,\frac{4+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2(4+2\sqrt{3})}{4^{2}-(2\sqrt{3})^{2}} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16-2^{2}(\sqrt{3})^{2}} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16-4{\cdot}3} =$$

$$= \frac{4(2+\sqrt{3})}{4} = \boxed{2+\sqrt{3}}$$

2) Los primeros términos de una sucesión son: $a_1 = 0.71$; $a_2 = 0.0071$; $a_3 = 0.000071$; y así sucesivamente, multiplicando el término anterior por 0.01 para obtener el que le sigue. Se pide:

a) ¿Qué tipo de sucesión es? *(0,5 puntos)*

Es una *progresión geométrica* con $a_1 = 0.71$ y razón $r = 0.01$

b) ¿Cuánto suman los infinitos términos de esta sucesión? *(0,5 puntos)*

La suma de infinitos términos de una progresión geométrica de razón positiva menor que 1 es:

$$s = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.71}{1-0.01} = \frac{0.71}{0.99} = \boxed{\frac{71}{99}}$$

c) ¿Podría decir una consecuencia relativa al resultado? *(0,5 puntos)*

Tenemos la *fracción generatriz* de $\boxed{0.717171\ldots = 71/99}$

3) En una progresión aritmética se tiene: $a_1 = 300$ y $a_{43} = 930$. Hallar d. *(1,5 puntos)*

$$a_n = a_1 + (n-1)d \;\Rightarrow\; a_{43} = a_1 + (43-1)d \;\Rightarrow\; 930 = 300 + 42d \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \boxed{d = (930-300)/42 = 15}$$

4) Realizar: *(2 puntos)*

a) Relacionar $\log_3 x$ con $\ln x$.

$$\text{Como } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}}$$

b) Aplicando la definición de logaritmo, calcular x sabiendo que $\log_x 125 = 3$.

$$\log_x 125 = 3 \iff x^3 = 125 \iff x^3 = 5^3 \iff \boxed{x = 5}$$

c) Tomar logaritmos (en base 10) y simplificar la expresión resultante, en:

$$A = \frac{100x^4\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}$$

$$\log A = \log \frac{100x^4\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}} = \log(100x^4\sqrt{y}) - \log\sqrt[3]{z^2} =$$

$$= \log 100 + \log x^4 + \log\sqrt{y} - \frac{1}{3}\log z^2 =$$

$$= \boxed{2 + 4\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{2}{3}\log z}$$

d) Quitar logaritmos en: $\log A = 4\log x - \frac{2}{3}\log z + 2 + \frac{1}{2}\log y$

$$\log A = 4\log x - \frac{2}{3}\log z + 2 + \frac{1}{2}\log y = 4\log x + 2 + \frac{1}{2}\log y - \frac{2}{3}\log z =$$

$$= \log x^4 + \log 100 + \log\sqrt{y} - \log\sqrt[3]{z^2} =$$

$$= \log(x^4 100\sqrt{y}) - \log\sqrt[3]{z^2} = \log\frac{x^4 100\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{x^4 100\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z^2}}}$$

5) Para $P(x) = 2x^3 + mx + 2$, hallar, sin efectuar la división, el valor de m que hace que la división entre $x + 2$ sea exacta. Escribir como queda $P(x)$ al sustituir el m obtenido. *(1 punto)*

Según el Teorema del Resto, el resto de dividir $P(x)$ entre $x + 2$ es $P(-2)$. Como este resto debe valer 0 para que la división sea exacta:

$$P(-2) = 0 \iff 2(-8) - 2m + 2 = 0 \iff -16 + 2 = 2m \iff -14 = 2m \iff \boxed{m = -7}$$

Por lo que $\boxed{P(x) = 2x^3 - 7x + 2}$

6) Calcular 24^2. A continuación, factorizar, sin usar calculadora, el polinomio siguiente: $P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5$ *(2 puntos)*

$24^2 = 576$. Probando, por Ruffini:

	27	21	− 11	− 5
− 1		− 27	6	− 5
	27	− 6	− 5	0

No encontramos cómo seguir, pero al tener un polinomio de segundo grado, para encontrar sus raíces podemos optar por igualarlo a 0 y resolver la ecuación de segundo grado resultante:

$$27x^2 - 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36+540}}{54} = \frac{6 \pm \sqrt{576}}{54} = \frac{6 \pm 24}{54} = \left\langle \begin{array}{l} = \frac{-18}{54} = -\frac{1}{3} \\ = \frac{30}{54} = \frac{5}{9} \end{array} \right.$$

Como consecuencia, aplicando el Teorema de Descomposición Factorial de Polinomios:

$$\boxed{P(x) = 27x^3 + 21x^2 - 11x - 5 = 27(x + 1)(x + \frac{1}{3})(x - \frac{5}{9})}$$