NOMBRE ____

1) Resolver: $\sqrt{x+1}-\sqrt{7x+4}=-3$ *(1 punto)*
2) Resolver: $1 + 9^x = 3^{x+1} + 3^{x-1}$ *(1,5 puntos)*
3) Resolver: $2\log x + \log x^4 = 6$ *(1 punto)*
4) Resolver: $\frac{x}{x+1}-\frac{3}{x-1}=\frac{-6}{x^2-1}$ *(1,5 puntos)*
5) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 8x-4<15x+8 \\ \frac{2x+6}{5}\leq\frac{6-3x}{4} \end{cases}$ *(1,5 puntos)*
6) Resolver la inecuación $\frac{x^2-2x}{x+3}\geq 0$ *(1,5 puntos)*
7) Expresar en forma de intervalo y de entorno el conjunto $\{x \in \mathrm{R} \ / \ |x+3| < 2\}$ *(1 punto)*
8) Resolver: $|4-|2x-1||=3$ *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Resolver: $\sqrt{x+1}-\sqrt{7x+4}=-3$ *(1 punto)*

El procedimiento pasa por aislar el sumando que contiene a una de las raíces en un miembro, y elevar al cuadrado:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{7x+4}=-3 \Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}-3 \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2=(\sqrt{7x+4}-3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1=7x+4+9-6\sqrt{7x+4} \Rightarrow 6\sqrt{7x+4}=6x+12 \Rightarrow \sqrt{7x+4}=x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{7x+4})^2=(x+2)^2 \Rightarrow 7x+4=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ ó \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

Este último paso es porque un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores se anula. Cuando elevamos al cuadrado una ecuación, siempre se pueden introducir soluciones falsas. Las comprobamos:

- $x=0 \Rightarrow \sqrt{0+1}-\sqrt{7\cdot 0+4}=1-2=-1\neq -3$. No es válida.
- $x=3 \Rightarrow \sqrt{3+1}-\sqrt{7\cdot 3+4}=2-5=-3$. Válida.

Solución única: $\boxed{x=3}$.

2) Resolver: $1+9^x=3^{x+1}+3^{x-1}$ *(1,5 puntos)*

$$1+9^x=3^{x+1}+3^{x-1} \Rightarrow 1+(3^2)^x=3\cdot 3^x+\frac{3^x}{3} \Rightarrow 1+3^{2x}=3\cdot 3^x+\frac{3^x}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1+(3^x)^2=3\cdot 3^x+\dfrac{3^x}{3} \Rightarrow$ Con el *cambio de incógnita* $t=3^x$, queda:

$$1+t^2=3t+\frac{t}{3} \Rightarrow 3+3t^2=9t+t \Rightarrow 3t^2-10t+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}=\left\langle \begin{array}{l} =1/3 \\ 3 \end{array}\right.$$

Deshacemos el cambio:

- Si $t=1/3 \Rightarrow 3^x=1/3 \Rightarrow 3^x=3^{-1} \Rightarrow \boxed{x=-1}$
- Si $t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Rightarrow 3^x=3^1 \Rightarrow \boxed{x=1}$

3) Resolver: $2\log x+\log x^4=6$ *(1 punto)*

$$2\log x+\log x^4=6 \Rightarrow \log x^2+\log x^4=\log 10^6 \Rightarrow \log x^2\cdot x^4=\log 10^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x^6=\log 10^6 \Rightarrow x^6=10^6 \Rightarrow x=\pm\sqrt[6]{10^6}=\pm 10.$$

que $\boxed{x=10}$ es válida, porque no hace 0 ni negativo ningún argumento de logaritmo. Pero no ocurre lo mismo con $x=-10$, puesto que en el primer sumando de la ecuación original habría que tomarle logaritmos, y no existe el logaritmo de un número negativo: esta otra solución *no es válida*.

Este tipo de inconvenientes no se suele presentar si se opta por averiguar el valor de $\log x$ en lugar de quitar logaritmos, como hemos hecho antes. Además, las ecuaciones suelen ser más sencillas. Volvamos a resolver la ecuación de esta otra forma:

$$2\log x+\log x^4=6 \Rightarrow 2\log x+4\log x=6 \Rightarrow 6\log x=6 \Rightarrow \log x=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=10}$$

que es válida puesto que no anula argumentos de log en la ecuación original.

4) Resolver: $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{-6}{x^2-1}$ *(1,5 puntos)*

$$\frac{x}{x+1}-\frac{3}{x-1}=\frac{-6}{x^2-1} \;\Rightarrow\; \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{-6}{(x-1)(x+1)}$$

Esta igualdad será cierta cuando los numeradores coincidan. Pero para valores que no anulen el denominador, como veremos más adelante:

$$x^2-x-3(x+1)=-6 \;\Rightarrow\; x^2-x-3x-3+6=0 \;\Rightarrow\; x^2-4x+3=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\left\langle \begin{array}{l} =\frac{2}{2}=1 \\ =\frac{6}{2}=3 \end{array}\right.$$

Pero en las ecuaciones donde la x está en el denominador hay que validar las soluciones obtenidas, comprobando que no anulan ningún denominador en la ecuación original. En este caso, $x = 1$ no es válida por tal motivo. Luego la única solución es: $\boxed{x = 3}$.

5) Resuelva el siguiente sistema de inecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} 8x-4<15x+8 \\ \dfrac{2x+6}{5}\le\dfrac{6-3x}{4} \end{array}\right.$ *(1,5 puntos)*

Resolvemos cada inecuación por separado.

- $8x-4<15x+8 \;\Rightarrow\; -4-8<15x-8x \;\Rightarrow\; -12<7x \;\Rightarrow\; -\dfrac{12}{7}<x \;\Rightarrow$

  $x>-\dfrac{12}{7}$

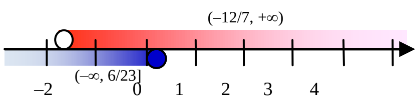
  Hemos pasado las x al segundo miembro para que se simplifiquen en un sumando con coeficiente positivo. Además, la penúltima desigualdad leída de derecha a izquierda es exactamente igual a la última desigualdad leída en la forma habitual. Más adelante, representaremos gráficamente la solución obtenida, junto con la de la otra inecuación, para obtener la solución del sistema.

- $\dfrac{2x+6}{5}\le\dfrac{6-3x}{4} \;\Rightarrow$ Pasamos los divisores multiplicando a los miembros contrarios; como ambos son positivos, no cambia el sentido de la desigualdad:

  $4(2x+6)\le 5(6-3x) \;\Rightarrow\; 8x+24\le 30-15x \;\Rightarrow\; 8x+15x\le 30-24 \;\Rightarrow$

  $\Rightarrow\; 23x\le 6 \;\Rightarrow\; x\le\dfrac{6}{23}$

Llevamos a un mismo gráfico ambas soluciones:



Y observamos que los valores de x que son soluciones de ambas inecuaciones, es decir, los que verifican ambas condiciones, o sea, los que están en las dos zonas coloreadas a la vez, son los valores de x del intervalo (–12/7,6/23], que está abierto en –12/7, ya que este punto es solución de la segunda inecuación (zona inferior, azul), pero no de la primera (zona superior, rosa), y cerrado en 6/23, pues dicho valor está en ambas zonas. Por tanto, la solución del sistema son los valores del intervalo:

$\boxed{(-12/7,\ 6/23])}$

6) Resolver la inecuación $\dfrac{x^2-2x}{x+3} \geq 0$ *(1,5 puntos)*

- Descomponemos factorialmente y calculamos las raíces de los polinomios del numerador y del denominador:

$$x^2-2x=0 \iff x(x-2)=0 \iff \begin{cases} x=0 \quad \text{ó} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

porque un producto vale 0 si, y sólo si alguno de los factores es 0. Tenemos la descomposición factorial y las raíces, en los dos últimos pasos.

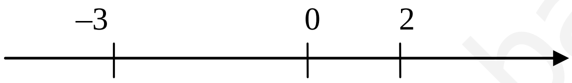
$$x+3=0 \iff x=-3$$

Por consiguiente, la inecuación se transforma en:

$$\frac{x(x-2)}{x+3} \geq 0$$

lo que nos lleva a evaluar el signo de esa expresión.

- Dividimos R en intervalos mediante las raíces obtenidas:



Evaluamos el signo de la expresión en cada uno de los intervalos resultantes. Para ello, basta con elegir un valor cualquiera de x en cada intervalo, porque el signo será el mismo, en ese intervalo, para cualquier valor de x que elijamos:

	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$x+3$	–	0	+	…	+	…	+
x	–	…	–	0	+	…	+
$x-2$	–	…	–	…	–	0	+
$\dfrac{x(x-2)}{x+3}$	–	$\nexists$	+	0	–	0	+
¿Sirven? →	No	No	Si	Si	No	Si	Si

Luego la solución de la inecuación es:

$$\boxed{x \in (-3, 0] \cup [2, +\infty)}$$

7) Expresar en forma de intervalo y de entorno el conjunto $\{x \in \mathrm{R} \ / \ |x+3| < 2\}$ *(1 punto)*

Según una de las definiciones de entorno, ese conjunto es:

$$\boxed{E(-3, 2)} = (-3-2, -3+2) = \boxed{(-5, -1)}$$

8) Resolver: $|4-|2x-1|| = 3$ *(1 punto)*

Según las propiedades del valor absoluto:

$$|4-|2x-1|| = 3 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 4-|2x-1|=3 \iff 1=|2x-1| \iff \begin{cases} 2x-1=1 \iff 2x=2 \iff x=1 \\ \text{ó} \\ 2x-1=-1 \iff 2x=0 \iff x=0 \end{cases} \\ \text{ó} \\ 4-|2x-1|=-3 \iff 7=|2x-1| \iff \begin{cases} 2x-1=7 \iff 2x=8 \iff x=4 \\ \text{ó} \\ 2x-1=-7 \iff 2x=-6 \iff x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

Hay cuatro soluciones posibles: $\boxed{-3, 0, 1, 4}$.