JUNIO 96

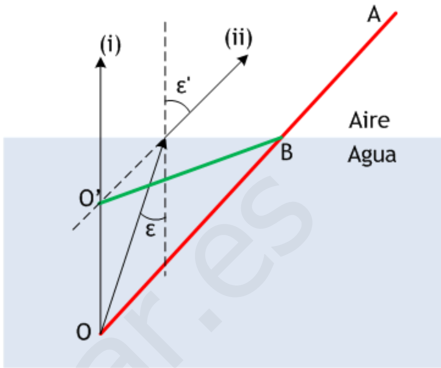
C3.— Explica por qué cuando se observa desde el aire un remo sumergido parcialmente en el agua parece estar doblado. Ayúdate de construcciones geométricas en la explicación.

El remo ABO tiene el trozo BO sumergido en el agua. La imagen del punto O puede construirse empleando dos rayos:

(i) en dirección perpendicular a la superficie; no se desvía al pasar al aire.

(ii) un rayo cualquiera, que incide sobre la superficie formando ángulo ε con la normal en el punto de incidencia. Al refractarse, se alejará de la normal, formando un ángulo ε’ > ε.

La imagen de O, entonces, será virtual, ya que los rayos (i) y (ii) divergen después de refractarse, y estará en O’. Por tanto, el remo se verá según ABO’, doblado en el tramo sumergido en el agua.



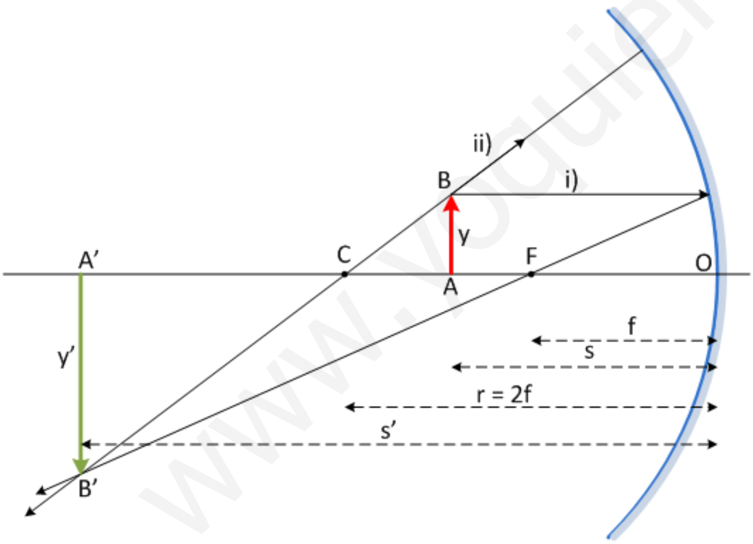
JUNIO 96

A2.— Un espejo esférico, cóncavo, ha de formar una imagen invertida de un objeto en forma de flecha, sobre una pantalla situada a una distancia de 420 cm delante del espejo. El objeto mide 5 mm y la imagen ha de tener una altura de 30 cm. Determinar:

a) A qué distancia del espejo debe colocarse el objeto.

b) El radio de curvatura del espejo.

Efectuar la construcción geométrica de la citada imagen.



Como se sabe, la fórmula para imágenes en un espejo esférico es

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad (1) \qquad \begin{array}{l} s = \text{distancia objeto} \\ s' = \text{distancia imagen} \\ f = \text{distancia focal} \end{array}$$

y la relación de tamaños objeto – imagen es

$$\frac{y}{y'}=-\frac{s}{s'} \qquad (2) \qquad \begin{array}{l} y = \text{altura objeto} \\ y' = \text{altura imagen} \end{array}$$

de manera que, con los datos

s’ = –420 cm ; y = 5 mm ; y’ = –30 cm (¡y’ invertida!) es fácil usar (2) y obtener la distancia del objeto al espejo:

$$\frac{0{,}5}{-30}=\frac{-s}{-420} \qquad \Rightarrow \qquad s = \mathbf{-7\ cm}$$

y, llevando los datos s y s’ a (1), obtener la distancia focal:

$$\frac{1}{-7}+\frac{1}{-420}=\frac{1}{f} \qquad \Rightarrow \qquad f = -6{,}89\ \text{cm}$$

así como el radio de curvatura del espejo:

$$r = 2f = \mathbf{-13{,}77\ cm}$$

SEPTIEMBRE 96

B1.— Un rayo de luz amarilla, emitido por una lámpara de sodio, tiene una longitud de onda en el vacío de 589.10^{-9} m. Determinar:

a) Su frecuencia.

b) Su velocidad de propagación y su longitud de onda en una fibra de cuarzo, cuyo índice de refracción es n = 1,458.

c) El ángulo de incidencia mínimo para el rayo de luz que, propagándose por el interior de la fibra de cuarzo, encuentra la superficie de discontinuidad entre el cuarzo y el aire y experimenta reflexión total.

Datos: Velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \,.\, 10^8$ m s^{-1}

a) En el vacío, la ecuación $c = \lambda\nu$ ($c = 3.10^8$ m/s) es válida para cualquier longitud de onda. En particular, para la luz amarilla que nos ocupa

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{589.10^{-9} \text{ m}} = \mathbf{5,09.10^{14}\ Hz}$$

b) En el cuarzo, la frecuencia de la luz amarilla es la misma, pero cambia su velocidad de propagación y, consiguientemente, también su longitud de onda. Ahora será:

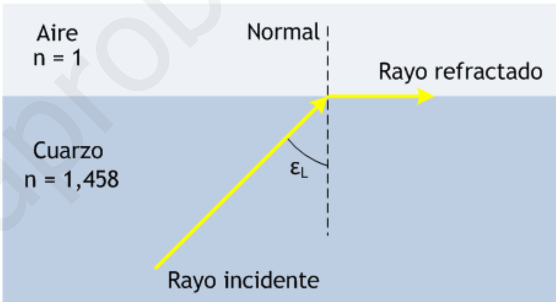
$$v = \lambda\nu$$

donde ν es conocida, del apartado anterior, y v puede obtenerse a partir del índice de refracción de la luz amarilla en el cuarzo:

$$n = \frac{c}{v} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{c}{n} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{1,458} = \mathbf{2,06.10^8\ m/s}$$

de manera que la longitud de onda habrá cambiado hasta

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \mathbf{404.10^{-9}\ m}$$



c) El ángulo de incidencia, ε_L en la figura, es el ángulo límite para que el rayo refractado forme ángulo de 90º con la normal (si $\varepsilon > \varepsilon_L$, entonces no hay refracción y se produce la reflexión total). Por tanto, de acuerdo a la ley de Snell:

$$n \operatorname{sen}\varepsilon_L = n' \operatorname{sen}\varepsilon' \quad \Rightarrow \quad 1,458 \operatorname{sen}\varepsilon_L = 1.\operatorname{sen}90° \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\varepsilon_L = \frac{1}{1,458}$$

de donde $\qquad \varepsilon_L = \mathbf{43°\ 18'\ 15''}$

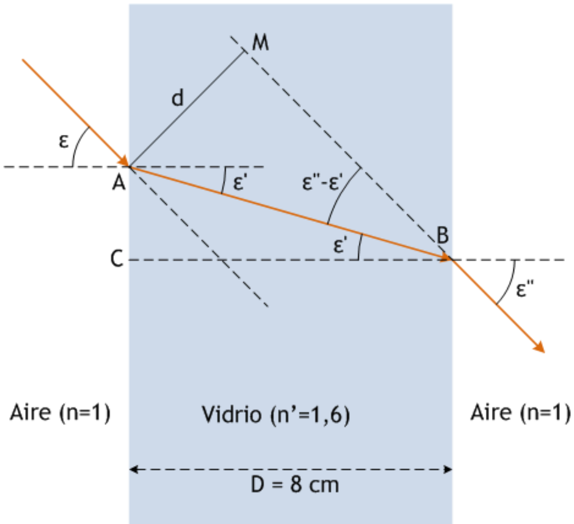
Junio 97

A2.— Una lámina de vidrio de caras planas y paralelas, situada en el aire, tiene un espesor de 8 cm y un índice de refracción n = 1,6. Calcular para un rayo de luz monocromática que incide en la cara superior de la lámina con un ángulo de 45°:

a) Los valores del ángulo de refracción en el interior de la lámina y del ángulo de emergencia correspondientes.

b) El desplazamiento lateral experimentado por el citado rayo al atravesar la lámina.

Dibujar la marcha geométrica del rayo.



a) El ángulo de incidencia de la luz sobre la lámina es

$$\varepsilon = 45°$$

de modo que, aplicando la ley de Snell en la cara izquierda de la lámina, tenemos

$$n \operatorname{sen}\varepsilon = n' \operatorname{sen}\varepsilon' \qquad (1)$$

donde n =1; ε = 45° y n' = 1,6, de forma que

$$\operatorname{sen}\varepsilon' = \frac{n \operatorname{sen}\varepsilon}{n'} = \frac{1.\sqrt{2}/2}{1,6} = 0,442$$

es decir, $\varepsilon' = $ **26° 13' 40"**

Por otro lado, como es bien sabido, el ángulo de emergencia ε" es igual que el de incidencia, lo que puede probarse fácilmente: en efecto, aplicando de nuevo Snell a la refracción en la segunda cara de la lámina,

$$n' \operatorname{sen}\varepsilon' = n \operatorname{sen}\varepsilon" \qquad (2)$$

donde ahora, como puede verse claramente en la figura, el ángulo de incidencia ε' es igual al de refracción en la primera cara de la lámina (¡eso es la clave!). Por ello, comparando (1) y (2)

$$\left.\begin{array}{r} n \operatorname{sen}\varepsilon = n' \operatorname{sen}\varepsilon' \\ n' \operatorname{sen}\varepsilon' = n \operatorname{sen}\varepsilon" \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen}\varepsilon = \operatorname{sen}\varepsilon" \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon" = \mathbf{45°}$$

b) El desplazamiento lateral es d = AM. Obtenerlo es sencillo, trabajando con los triángulos AMB y ACB de la figura. Empezamos en AMB, rectángulo en M, y cuyo ángulo en B es ε" - ε', como es fácil de comprobar. El seno de este ángulo sería

$$\operatorname{sen}(\varepsilon"-\varepsilon') = \frac{d}{AB}$$

donde AB, la hipotenusa del triángulo, es el recorrido del rayo en el interior de la lámina. Por otro lado, en el triángulo ACB, rectángulo en C, podemos escribir

$$\cos\varepsilon' = \frac{CB}{AB}$$

donde el cateto CB es la anchura D de la lámina. Eliminando AB entre estas dos expresiones:

$$\left.\begin{array}{r} AB = \dfrac{d}{\operatorname{sen}(\varepsilon"-\varepsilon')} \\ AB = \dfrac{D}{\cos\varepsilon'} \end{array}\right\} \Rightarrow d = D\,\frac{\operatorname{sen}(\varepsilon"-\varepsilon')}{\cos\varepsilon'}$$

donde solo queda entrar con D = 8 cm; ε" = 45° y ε' = 26°13'40" para tener d = **2,87 cm**

SEPTIEMBRE 97

A1.— Una lente esférica delgada biconvexa, cuyas caras tienen radios iguales a 5 cm y un índice de refracción n = 1,5, forma de un objeto real una imagen también real reducida a la mitad. Determinar:

a) La potencia y la distancia focal de la lente.

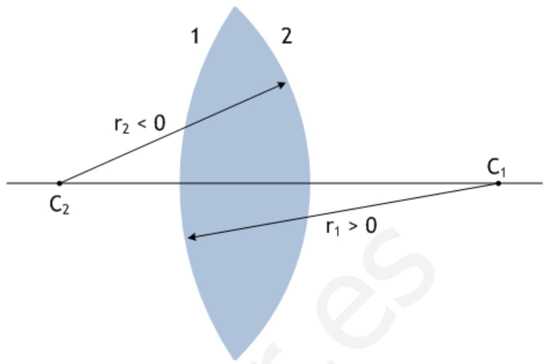
b) Las posiciones del objeto y de la imagen.

c) Si esta lente se utiliza como lupa, el aumento de la lupa cuando observa un ojo normal sin acomodación.

Datos: Distancia mínima de visión neta para el ojo d = 25 cm. El medio exterior es el aire.

a) Si se trata de una lente biconvexa, convergente, podemos hallar fácilmente su distancia focal a partir de la ecuación del constructor de lentes:

$$P = \frac{1}{f'} = (n-1)\,(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$



donde P es la potencia de la lente; n = 1,5; r_1 = 5 cm y r_2 = –5 cm (ojo al detalle de los signos, que está justificado en la figura adjunta, y cuidado también con las unidades: los radios van en metros). Esto queda como:

$$P = \frac{1}{f'} = (1{,}5-1)\,(\frac{1}{0{,}05} + \frac{1}{0{,}05}) = 0{,}5.\frac{2}{0{,}05} = \textbf{20 dioptrías}$$

$$f' = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ m} = \textbf{5 cm}$$

b) Si la imagen es real será también, como sabemos, invertida. Ya que su tamaño ha de ser la mitad, podemos emplear

$$\frac{y}{y'} = \frac{s}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad -2 = \frac{s}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad s = -2s'$$

para tener una relación entre las distancias objeto, s, e imagen, s’. Ahora, la ecuación de las lentes

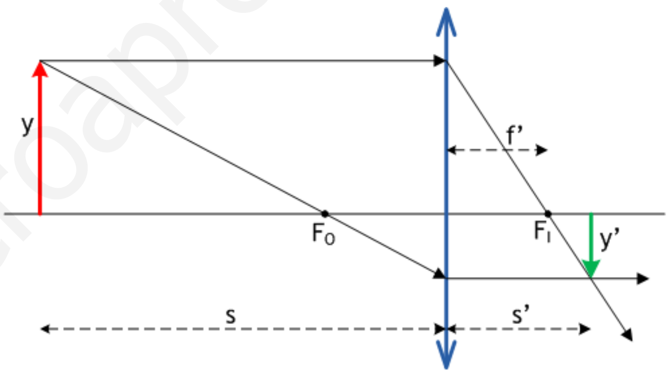
$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{-2s'} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{2s'} = \frac{1}{f'}$$

es decir $$s' = \frac{3}{2}f' = \textbf{7,5 cm}$$

y la imagen se habrá formado a 7,5 cm a la derecha de la lente. En cuanto al objeto,

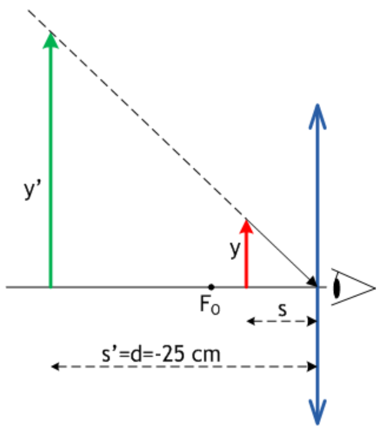
$$s = -2s' = \textbf{-15 cm}$$

se encuentra a 15 cm a la izquierda. La figura al lado muestra cómo sería la formación de la imagen, empleando rayos procedentes del objeto paralelos al eje y que pasan por el foco objeto.



c) Si la lente se emplea como lupa, habrá que disponer el objeto entre el foco y la lente, a una distancia de la lente menor que 5 cm. Por otro lado, la imagen (que servirá de objeto para el ojo) debería formarse en el “punto próximo”, a 25 cm de la lente, y será virtual. El aumento de la imagen, recogido en la siguiente figura, es

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = 1 - \frac{s'}{f'} = 1 - \frac{d}{f'} = 1 - \frac{-0{,}25}{0{,}05} = 1+5 = \textbf{6}$$



Como se ha dicho, la imagen será virtual; además, derecha y de mayor tamaño. Nótese que basta el rayo que pasa por el centro de la lente para poder dibujar la imagen. Las expresiones

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \qquad ; \qquad \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

combinadas, junto con s’ = d (distancia del “punto próximo”, de 25 cm), permiten obtener con facilidad

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{f'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{s'}{s} = A = \frac{y'}{y} = 1 - \frac{s'}{f'} = 1 - \frac{d}{f'}$$

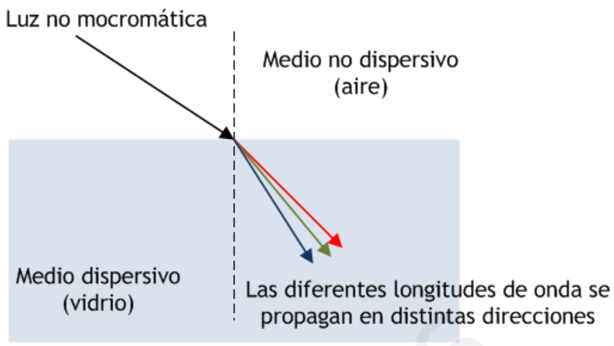
que es la fórmula empleada para resolver el problema: es de este modo que funciona una lupa.

Junio 98

C3.—a) Indique las diferencias que a su juicio existen entre los fenómenos de refracción y de dispersión de la luz. ¿Puede un rayo de luz monocromática sufrir ambos fenómenos?

b) ¿Por qué no se observa dispersión cuando la luz blanca atraviesa una lámina de vidrio de caras plano-paralelas?

a) La refracción es el fenómeno de cambio en la dirección de propagación de la luz cuando pasa de un medio a otro. En última instancia, es un fenómeno debido al cambio de velocidad de la luz de un medio a otro.



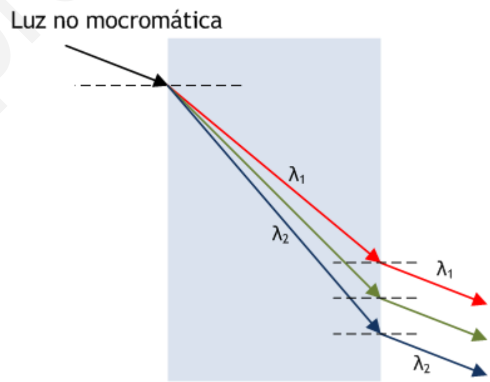
Imaginemos un rayo de luz no monocromática, digamos luz blanca, propagándose en una determinada dirección en el aire, un medio no dispersivo. La luz blanca contiene todas las frecuencias del visible, desde el rojo hasta el violeta. En el aire, como en el vacío, la velocidad de la luz es la misma para todas las frecuencias: eso es lo que quiere decir que es un medio no dispersivo.

Cuando la luz incide con un cierto ángulo sobre una superficie de separación con un medio dispersivo, como el vidrio o el agua, la dirección de propagación se desvía: eso es **refracción**. Pero, además, sucede que la luz de una cierta frecuencia, digamos de color rojo, se mueve en el vidrio con diferente velocidad que la luz de otra frecuencia, digamos de color azul. Ya que el ángulo de refracción depende del índice de refracción de ambos medios, de acuerdo a la ley de Snell,

$$n \text{ sen } i = n' \text{ sen } r$$

y el índice de refracción resulta diferente para la luz de diferentes frecuencias, puede ocurrir que un rayo de luz **no monocromática**, al pasar a un medio dispersivo difracte cada frecuencia según un ángulo ε' diferente, lo que daría base a la **dispersión** del rayo incidente.

Obviamente, el fenómeno de dispersión no podría suceder si la luz incidente es monocromática: se requiere la presencia de diferentes longitudes de onda.



b) Como se sabe, cuando la luz atraviesa una lámina de caras plano-paralelas el rayo emergente es paralelo al incidente (aunque sufre un desplazamiento). Por tanto, todas las λ presentes en el rayo incidente atravesarían la lámina y emergerían según rayos paralelos al incidente, como se muestra en la figura para un supuesto de dos longitudes de onda λ_1 y λ_2 diferentes. No habría pues, dispersión, ya que las direcciones de los rayos emergentes no son distintas, aunque sí se podría observar un desplazamiento distinto para λ_1 y λ_2.

JUNIO 98

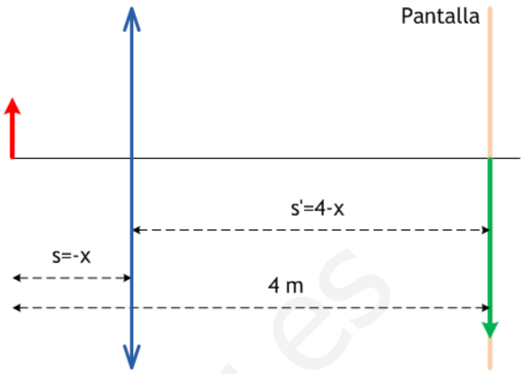
A2.— Un objeto luminoso de 2 mm de altura está situado a 4 m de distancia de una pantalla. Entre el objeto y la pantalla se coloca una lente esférica delgada L, de distancia focal desconocida, que produce sobre la pantalla una imagen tres veces mayor que el objeto.

a) Determine la naturaleza de la lente L, así como su posición respecto del objeto y de la pantalla.

b) Calcule la distancia focal, la potencia de la lente L y efectúe la construcción geométrica de la imagen.

a) Tiene que ser una lente convergente, capaz de formar una imagen real sobre una pantalla. Sabemos que una lente de este tipo forma imágenes **reales e invertidas** (salvo cuando actúa como una lupa), de modo que los datos del enunciado pueden leerse como

$y = 2$ mm; $y' = -6$ mm (tres veces mayor que el objeto, invertida)



Por otro lado, la distancia entre objeto y pantalla, es decir, la imagen, es de 4 m; la lente se coloca en algún punto intermedio. Podemos dividir esa distancia de 4 m en dos trozos: x m de la lente al objeto, y 4–x m de la lente a la pantalla. Nótese que la distancia objeto s debe tener signo negativo, de modo que $s = -x$ (x es una cantidad positiva), mientras que $s' = 4-x$ (s' es positiva). Solo hay que usar las conocidas expresiones

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \qquad (1)$$

$$\frac{y}{y'}=\frac{s}{s'} \qquad (2)$$

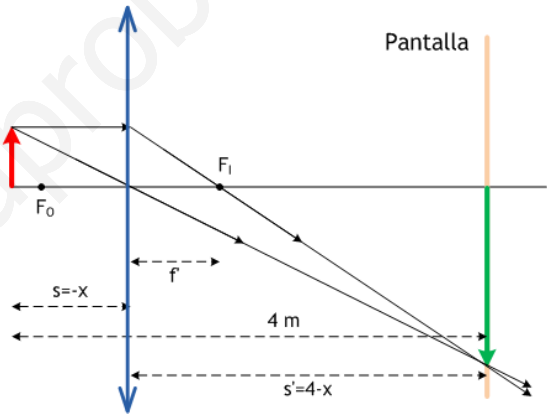
la primera de las cuales quedaría como $-\frac{1}{-x}+\frac{1}{4-x}=\frac{1}{f'}$

y la segunda nos daría el valor de *x* de forma inmediata:

$$\frac{2}{-6}=\frac{-x}{4-x} \quad\Rightarrow\quad 6x=8-2x \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} x=\mathbf{1\ m} & \textbf{(al objeto)} \\ 4-x=\mathbf{3\ m} & \textbf{(a la pantalla)} \end{matrix}$$

y después, volviendo a (1) con esos valores, tendríamos la distancia focal de la lente:

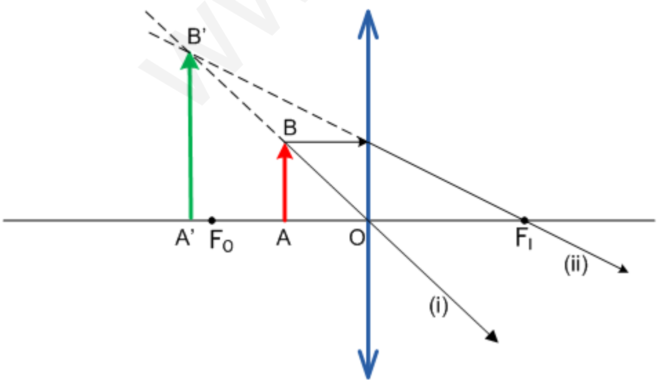
$$-\frac{1}{-1}+\frac{1}{3}=\frac{1}{f'} \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{f'=\frac{3}{4}\ m}$$



Finalmente, podemos construir la imagen, empleando dos rayos: uno discurre paralelo al eje y se refracta para pasar por el foco imagen, F_I; el otro se dirige hacia el centro de la lente y no se desvía.

SEPTIEMBRE 98

C3.— ¿En qué posición debe colocarse un objeto delante de una lente esférica convergente para producir una imagen virtual? Obtenga gráficamente la imagen.



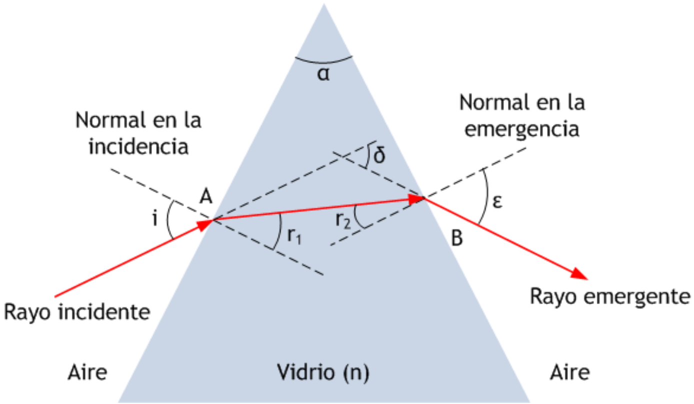
El objeto debe colocarse dentro de la distancia focal objeto de la lente, entre el foco objeto F_O y el centro O de la misma. El rayo (i) que pasa por el centro de la lente no sufre desviación al atravesarla; el rayo (ii), que incide paralelamente al eje de la lente, se refracta para pasar por el foco imagen, F_I. Como puede verse, se trata de rayos divergentes, cuyas prolongaciones determinan la posición B' de la imagen del punto B, extremo del objeto. La imagen de AB resulta A'B', **virtual, derecha y de mayor tamaño.**

SEPTIEMBRE 98

A1.— El ángulo de desviación mínima en un prisma óptico es de 30º. Si el ángulo del prisma es de 50º y éste está situado en el aire, determine:

a) El ángulo de incidencia para que se produzca la desviación mínima del rayo.

b) El índice de refracción del prisma.



Las relaciones matemáticas pertinentes, cuando un rayo incide en una cara del prisma, se refracta en ella e incide en su interior sobre la otra cara, para emerger finalmente fuera del prisma, serían

1. sen i = n. sen r_1 (1) Snell, incidencia

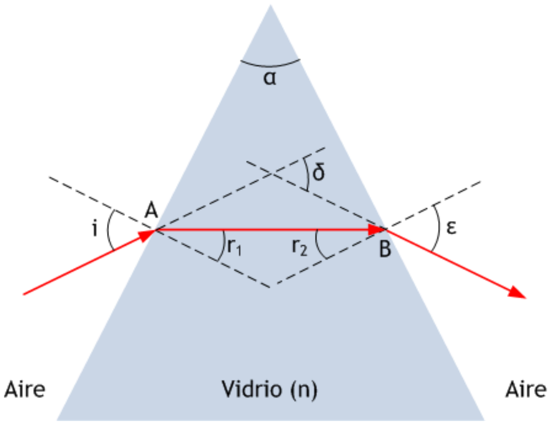
n. sen r_2 = 1. sen ε (2) Snell, emergencia

$$\left.\begin{array}{lr} \alpha = r_1 + r_2 & (3) \\ \text{Ángulo de desviación } \delta = i + \varepsilon - \alpha & (4) \end{array}\right\}$$

por consideraciones geométricas.

Pues bien, el ángulo de desviación δ mínimo se consigue cuando el rayo se mueve dentro del prisma según una trayectoria paralela a la base del prisma, como se recoge en la figura que tenemos abajo. Es fácil entender que la simetría dentro del prisma requiere que $r_1 = r_2$, de forma que, según (3) y puesto que α = 50º, sería

$$50º = r_1 + r_2 \quad \Rightarrow \quad r_1 = r_2 = 25º$$



y, de (1) y (2), si $r_1 = r_2$, se sigue que

$$1.\text{sen } i = 1.\text{sen } \varepsilon \quad \Rightarrow \quad i = \varepsilon$$

es decir, el rayo emerge con un ángulo igual al de incidencia. Así, si se emplea (4),

$$30º = i + \varepsilon - 50º \quad \Rightarrow \quad i = \varepsilon = \mathbf{40º}$$

y, de (1), finalmente

$$1.\text{sen}40º = n.\text{sen}25º \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\text{sen}40º}{\text{sen}25º} = \mathbf{1{,}52}$$

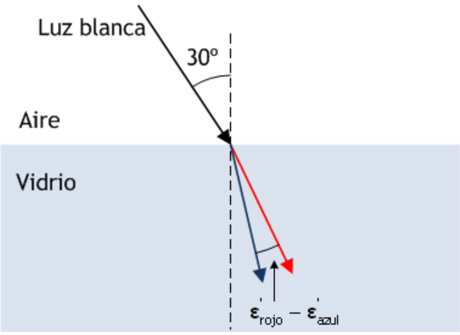
Junio 99

A2.— Un rayo de luz blanca incide desde el aire sobre una lámina de vidrio con un ángulo de incidencia de 30°.

a) ¿Qué ángulo formarán entre sí en el interior del vidrio los rayos rojo y azul, componentes de la luz blanca, si los valores de los índices de refracción del vidrio para estos colores son, respectivamente, n_{rojo}= 1,612 y n_{azul}= 1,671?

b) ¿Cuáles serán los valores de la frecuencia y de la longitud de onda correspondientes a cada una de estas radiaciones en el vidrio, si las longitudes de onda en el vacío son, respectivamente, λ_{rojo}= 656,3 nm y λ_{azul}= 486,1 nm?

Datos: Velocidad de la luz en el vacío c = 3 . 10^8 m s^{-1}



a) La ley de Snell para la refracción se aplica, tomando en cuenta que el medio inicial es el aire, según

$$1 . \operatorname{sen}\varepsilon = n . \operatorname{sen}\varepsilon' \qquad (1)$$

donde n es diferente para la luz roja y azul, de modo que también lo será ε'. Los valores de índice de refracción n_{rojo} = 1,612 y n_{azul} = 1,671, llevados a (1), nos dan

$$1 \,.\, \operatorname{sen}30° = n_{rojo}\operatorname{sen}\varepsilon'_{rojo} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\varepsilon'_{rojo} = \frac{\operatorname{sen}30°}{n_{rojo}} = \frac{0,5}{1,612} = 0,31$$

$$\varepsilon'_{rojo} = 18°4'11''$$

para el ángulo de refracción de la luz roja, mientras que para el azul es

$$1 \,.\, \operatorname{sen}30° = n_{azul}\operatorname{sen}\varepsilon'_{azul} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\varepsilon'_{azul} = \frac{\operatorname{sen}30°}{n_{azul}} = \frac{0,5}{1,671} = 0,299$$

$$\varepsilon'_{azul} = 17°24'39''$$

así que el ángulo que forman entre sí los rayos rojo y azul, en el vidrio — véase la figura — es

$$\varepsilon'_{rojo} - \varepsilon'_{azul} = \mathbf{39'32''}$$

algo más de medio grado.

b) Con las longitudes de onda en el vacío podemos calcular las frecuencias de la luz roja y azul. En efecto, en el vacío tenemos c = $\lambda\nu$, con c = 3.10^8 m/s, de modo que

$$\nu_{rojo} = \frac{c}{\lambda_{rojo}} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{656,3.10^{-9} \text{ m}} = 4,57.10^{14} \text{ Hz}$$

$$\nu_{azul} = \frac{c}{\lambda_{azul}} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{486,1.10^{-9} \text{ m}} = 6,17.10^{14} \text{ Hz}$$

Cuando la luz cambia de medio, penetrando en el vidrio, las frecuencias de la luz roja o azul no varían, manteniendo los valores que acabamos de obtener. Sí cambian, sin embargo, las longitudes de onda, de acuerdo a

$$v_{rojo} = \nu_{rojo}\,\lambda_{rojo} \quad\Rightarrow\quad \lambda_{rojo} = \frac{v_{rojo}}{\nu_{rojo}} = \frac{c/n_{rojo}}{\nu_{rojo}} = \frac{c}{n_{rojo}\,\nu_{rojo}}$$

es decir,
$$\lambda_{rojo} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{1,612 . 4,57.10^{14} \text{ Hz}} = \mathbf{407,2 \text{ nm}}$$

y, de modo análogo,
$$\lambda_{azul} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{1,671.6,17.10^{14} \text{ Hz}} = \mathbf{291,0 \text{ nm}}$$

SEPTIEMBRE 99

C3.— Calcule a qué distancia debe colocarse un objeto a la izquierda del vértice de un espejo cóncavo cuyo radio de curvatura es de 12 cm para que su imagen sea tres veces mayor que el objeto. Interprete los posibles resultados y efectúe las construcciones geométricas correspondientes.

Como se sabe, las expresiones que controlan la formación de imágenes en espejos esféricos son

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad (1)$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s}{s'} \qquad (2)$$

s ≡ distancia objeto; s' = distancia imagen; y = tamaño objeto; y' = tamaño imagen; f = distancia focal = r/2 = –6 cm

De acuerdo con (2), si la imagen ha de ser 3 veces mayor que el objeto, entonces ha de suceder una de dos cosas:

a) $\frac{y}{y'}=\frac{1}{3}=-\frac{s}{s'}$ (imagen tres veces mayor y derecha) ; b) $\frac{y}{y'}=-\frac{1}{3}=\frac{s}{s'}$ (imagen tres veces mayor e invertida)

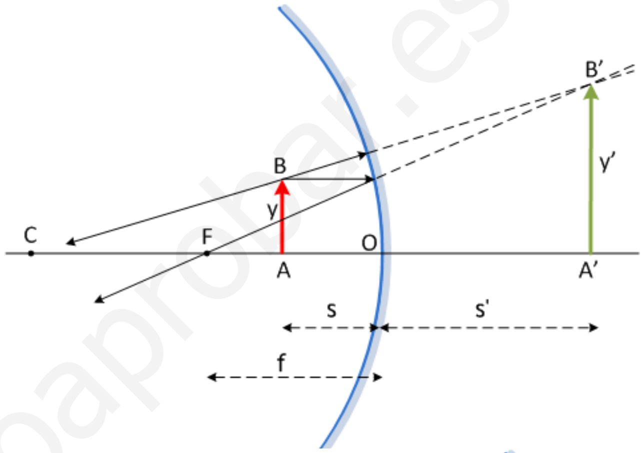
En el supuesto a), tendríamos

$$s'=-3s$$

y, como s es negativo, eso supone que s' será positivo, de modo que la imagen se forma a la derecha, detrás del espejo. Llevando esta igualdad a (1), con f = - 6 cm, tendremos

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{-3s}=\frac{1}{-6} \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}s=-\frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad s=-\frac{1}{4}\ \text{cm}$$

y $$s'=-3s=\mathbf{\frac{3}{4}\ cm}$$



Se trataría, como se recoge en la figura, de una imagen **virtual**, **derecha** y **tres veces mayor** que el objeto. Nótese que el objeto está colocado dentro de la distancia focal.

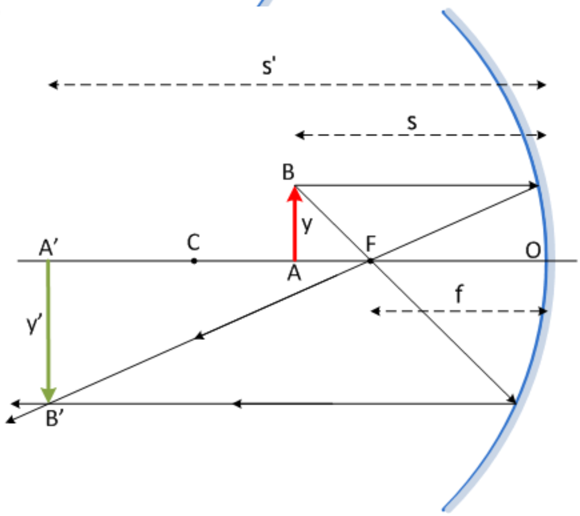
En el caso b), sería

$$s'=3s$$

que, llevado a (1), produce

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{3s}=-\frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{3s}=-\frac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad s=-8\ \text{cm}$$

y $$s'=3s=\mathbf{-24\ cm}$$



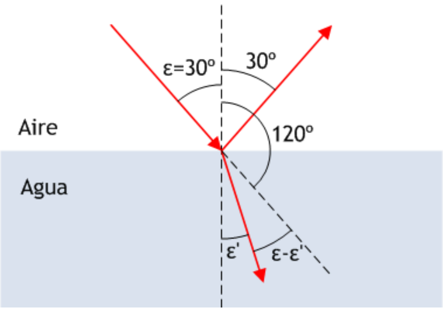
Esta vez, como intentamos mostrar en la figura, la imagen es **real**, **invertida** y **tres veces mayor** que el objeto. Nótese que el objeto está entre el foco y el centro de curvatura del espejo.

JUNIO 00

C4.— a) Un rayo luminoso que se propaga en el aire incide sobre el agua de un estanque con un ángulo de 30°. ¿Qué ángulo forman entre sí los rayos reflejado y refractado?

b) Si el rayo luminoso se propagase desde el agua hacia el aire, ¿a partir de qué valor del ángulo de incidencia se presentará el fenómeno de reflexión total?

Dato: índice de refracción del agua = 4/3



a) La ley de Snell aplicada al caso sería

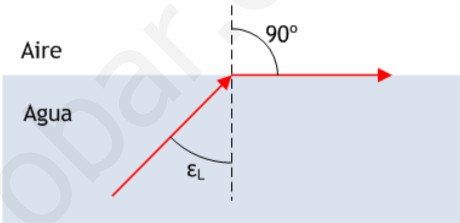
$$1.\mathrm{sen}\,30° = \frac{4}{3}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon'$$

de modo que $\quad \mathrm{sen}\,\varepsilon' = \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\,30° = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon' = 22°1'28''$

sería el ángulo de refracción.

El rayo reflejado, como sabemos, lo hará con un ángulo de 30°, igual al de incidencia. De este modo, el ángulo entre los rayos reflejado y refractado podría conseguirse — véase la figura — sumando

$$120° + \varepsilon - \varepsilon' = 120° + 30° - 22°1'28'' = \mathbf{127°58'32''}$$



b) Cuando el rayo procede del agua y se propaga hacia el aire puede suceder la reflexión total. El ángulo de incidencia a partir del que sucederá la reflexión total es el ángulo límite, cuando el rayo refractado sigue la dirección de la superficie de separación entre los medios (es decir, ε' = 90°). Sería, por tanto

$$n.\mathrm{sen}\,\varepsilon_L = 1.\mathrm{sen}\,\varepsilon' = 1.1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\,\mathrm{sen}\,\varepsilon_L = 1$$

es decir, $\quad \mathrm{sen}\,\varepsilon_L = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_L = \mathbf{48°35'25''}$

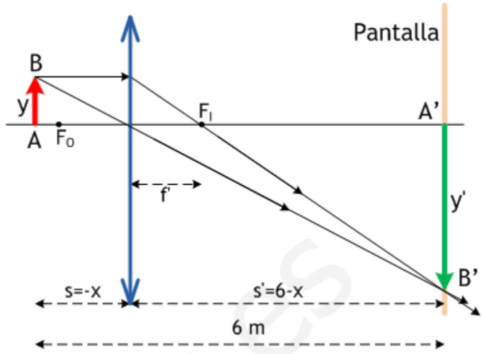
JUNIO 00

B1.— Un objeto luminoso está situado a 6 m de una pantalla. Una lente, cuya distancia focal es desconocida, forma sobre la pantalla una imagen real, invertida y cuatro veces mayor que el objeto.

a) ¿Cuál es la naturaleza y la posición de la lente? ¿Cuál es el valor de la distancia focal de la lente?

b) Se desplaza la lente de manera que se obtenga sobre la misma pantalla una imagen nítida, pero de tamaño diferente al obtenido anteriormente. ¿Cuál es la nueva posición de la lente y el nuevo valor de aumento?

Ya que la imagen del objeto se forma sobre una pantalla, debe ser real. La lente, por tanto, ha de ser **convergente**, y la imagen estará invertida, como sabemos. La situación, sin entrar en detalles, debería ser como recoge la figura, en la que la distancia entre objeto y pantalla (imagen) es 6 m, que se dividen en dos tramos x y 6 − x, a la izquierda y derecha de la lente, respectivamente. Nótese que x es una cantidad positiva, y que 6 − x lo es también: de ahí que escribamos



$$s = -x \quad ; \qquad s' = 6 - x$$

como distancias objeto e imagen. Además, la relación de tamaños sería

$$\frac{y}{y'} = \frac{s}{s'} = -\frac{1}{4} \quad \text{(imagen invertida y cuatro veces mayor)}$$

de forma que s' = - 4s; es decir

$$6 - x = -4(-x) \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{6}{5} = 1{,}2 \text{ m} \qquad 6 - x = 4{,}8 \text{ m}$$

así que la lente **estaría a 1,2 m del objeto y a 4,8 m de la pantalla**. La distancia focal de la lente es inmediata, según la ecuación de las lentes

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{-1{,}2} + \frac{1}{4{,}8} = \frac{1}{f'} \qquad \Rightarrow \qquad f' = \frac{4{,}8}{5} = \mathbf{0{,}96 \text{ m}}$$

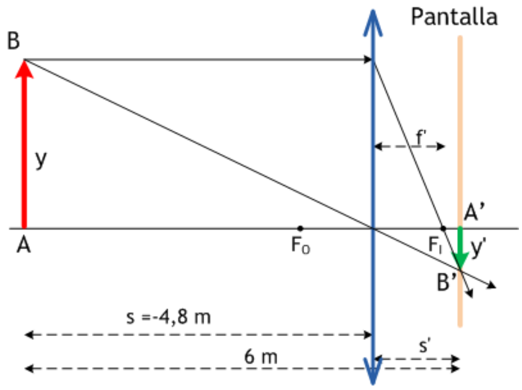
b) Si ahora se mueve la lente (lo que significa que la distancia objeto − imagen sigue siendo de 6 m), lo que variará será el valor de x. Se formará otra imagen cuando se cumpla de nuevo la ecuación de las lentes

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{-x} + \frac{1}{6 - x} = \frac{1}{0{,}96}$$

de donde se sigue una ecuación de 2º grado:

$$x^2 - 6x - 5{,}76 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 4{,}8 \text{ m} \qquad x = 1{,}2 \text{ m}$$

La segunda de estas soluciones es la posición anterior. La primera solución, con **la lente a 4,8 m del objeto** y a 1,2 m de la pantalla, es la que buscamos. Se trata de la conjugada de la primera, ya que la marcha de los rayos es en realidad la inversa que en el primer caso. Naturalmente, la imagen sería ahora 4 veces menor que el objeto.

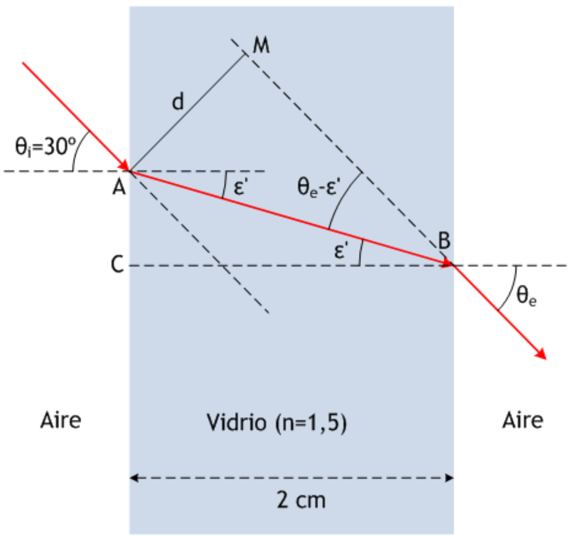


SEPTIEMBRE 00

C4.— Sobre una lámina de vidrio de caras planas y paralelas, de espesor 2 cm e índice de refracción n = 3/2, situada en el aire, incide un rayo de luz monocromática con un ángulo θ_i = 30°.

a) Compruebe que el ángulo de emergencia es el mismo que el ángulo de incidencia.

b) Determine la distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina y el desplazamiento lateral del rayo emergente.



a) La figura recoge la marcha del rayo dentro de la lámina de caras planas, y debe ser estudiada con atención antes de leer las ecuaciones que siguen. Aplicando la ley de Snell a la refracción en la primera cara de la lámina tenemos

$$1.\text{sen}\,\theta_i = n.\text{sen}\,\varepsilon' \qquad (1)$$

y, en la segunda cara de la lámina, después del recorrido AB dentro de la misma, la ley de Snell se escribe

$$n.\text{sen}\,\varepsilon' = 1.\text{sen}\,\theta_e \qquad (2)$$

puesto que, por evidente observación de la figura, el ángulo de refracción en la primera cara y el de incidencia en la segunda son iguales. De (1) y (2) es obvio que

$$1.\text{sen}\,\theta_i = 1.\text{sen}\,\theta_e \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\theta_i = \theta_e}$$

b) Ahora, véase el triángulo ABC, rectángulo en C. En este triángulo

$$\cos\varepsilon' = \frac{CB}{AB} \qquad (3)$$

donde CB = anchura de la lámina = 2 cm; y ε' puede obtenerse de (1), conocidos el ángulo de incidencia θ_i = 30° y el índice de refracción n = 3/2 del vidrio:

$$\text{sen}\ 30° = \frac{3}{2}\,\text{sen}\,\varepsilon' \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen}\,\varepsilon' = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon' = 19°28'17''$$

de modo que, de (3), sería

$$AB = \frac{CB}{\cos\varepsilon'} = \frac{2\ \text{cm}}{\cos 19°28'17''} = \mathbf{2{,}12\ cm}$$

Por otro lado, el triángulo AMB es rectángulo en M. Es fácil comprender que el ángulo en B es

$$\theta_e - \varepsilon' = 30° - 19°28'17'' = 10°31'44''$$

y, en ese triángulo

$$\text{sen}(\theta_e - \varepsilon') = \frac{d}{AB} \qquad \Rightarrow \qquad d = AB\,\text{sen}(\theta_e - \varepsilon') = 2{,}12.\text{sen}\,10°31'44'' = \mathbf{0{,}39\ cm}$$

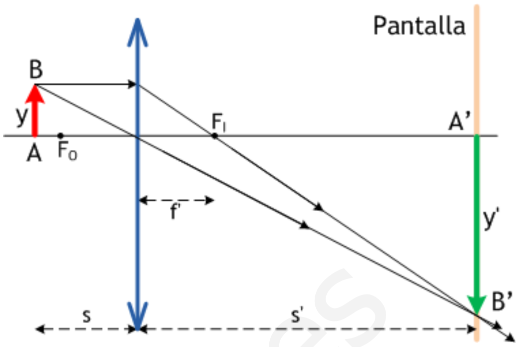
que es el desplazamiento del rayo al atravesar la lámina.

SEPTIEMBRE 00

B2.— Una lente convergente con radios de curvatura de sus caras iguales, y que suponemos delgada, tiene una distancia focal de 50 cm. Proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto de tamaño 5 cm.

a) Calcule la distancia de la pantalla a la lente para que la imagen sea de tamaño 40 cm.

b) Si el índice de refracción de la lente es igual a 1,5 ¿qué valor tienen los radios de la lente y cuál es la potencia de la misma?



a) La ecuación de las lentes resuelve ejercicios sencillos sin necesidad de realizar el trazado de los rayos, aunque sin duda los dibujos ayudan a entender los resultados y frecuentemente también a llegar a ellos; la figura al lado muestra la resolución gráfica del problema.

Si la imagen se proyecta sobre una pantalla, será **real**. También, de acuerdo con la teoría, será **invertida**, de suerte que la relación de tamaños objeto–imagen se escribiría como

$$\frac{y}{y'} = \frac{5\ \text{cm}}{-40\ \text{cm}} = \frac{s}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad s' = -8s$$

y la ecuación de las lentes $\quad -\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \qquad (f' = +50\ \text{cm})$

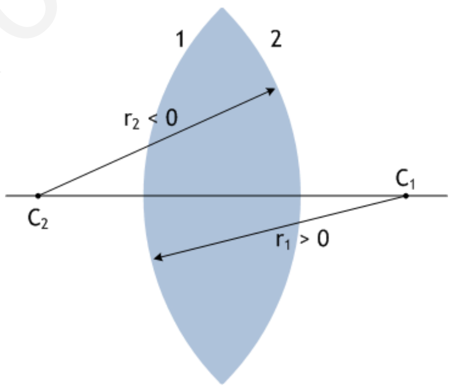
resuelve la cuestión $\quad -\frac{1}{s} + \frac{1}{-8s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{9}{8s} = \frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{450}{8} = -56,25\ \text{cm}$

$$s' = -8s = 450\ \text{cm} = \mathbf{4,5\ m}$$

e informa de que la pantalla debería estar a 4,5 m de la lente, a la derecha de la misma.

b) La ecuación del constructor de lentes resuelve esta pregunta:

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



donde $r_1 > 0$; $r_2 < 0$ y $|r_1| = |r_2|$ (los radios de las caras de la lente son iguales, pero de signos opuestos), de forma que

$$\frac{1}{0,5} = (1,5-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}\right) = 0,5 \cdot \frac{2}{r_1} \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 2 = \mathbf{0,5\ m}$$

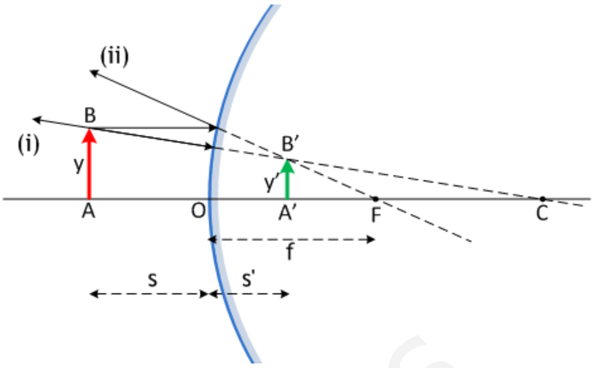
y la potencia de la lente $\quad P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0,5} = \mathbf{+2\ dioptrías}$

donde deben tenerse muy presente las unidades de f', en metros.

C3.— ¿Qué tipo de imagen se obtiene con un espejo esférico convexo? ¿y con una lente esférica divergente? Efectúe las construcciones geométricas adecuadas para justificar las respuestas. El objeto se supone real en ambos casos.

En la figura recogemos la formación de la imagen en un espejo esférico convexo. Como puede verse, empleamos esencialmente dos rayos:

(i), que sale de B en dirección al centro de curvatura del espejo y se refleja sin desviarse. Su prolongación pasa por C.
(ii), que sale de B en dirección paralela al eje del espejo y se refleja de modo que su proyección pasa por el foco F.



La imagen del punto B es B', donde se cortan las prolongaciones de los rayos (i) y (ii). La imagen del objeto AB es **siempre virtual, derecha y de menor tamaño**. Además, como puede apreciarse

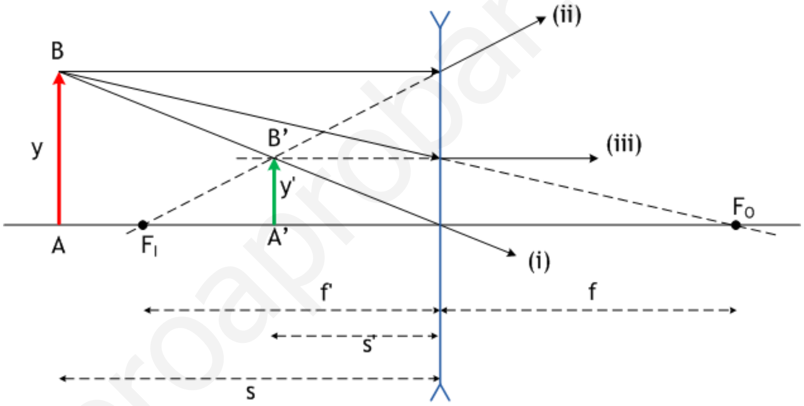
$$s < 0; \quad s' > 0; \quad f > 0; \quad r > 0; \quad \frac{y}{y'} > 0$$

En cuanto a una lente divergente, la situación se resuelve en la figura. Para ello, empleamos tres rayos:

(i), que sale de B y pasa por el centro de la lente, O. No se desvía.

(ii), que sale de B y discurre paralelo al eje de la lente; se desvía para que su prolongación pase por el foco imagen, F_I, situado a la izquierda de la lente (f' < 0).

(iii), que sale de B y apunta en dirección al foco objeto F_O, situado a la derecha de la lente (f=−f' > 0). Al pasar por la lente, se desvía para orientarse paralelamente al eje de la lente.



Como puede verse, a la salida de la lente los tres rayos (i), (ii) y (iii) divergen, de forma que la imagen se construye con sus prolongaciones: B' es la imagen de B. Así, la imagen del objeto AB es A'B', **virtual, derecha y de menor tamaño**. Si el objeto se aleja de la lente, la imagen se hace cada vez más pequeña. En la figura puede comprobarse que

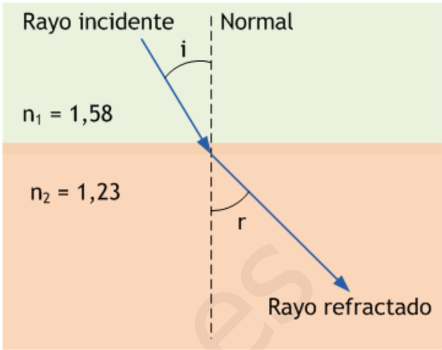
$$s < 0; \quad s' < 0; \quad f' < 0; \quad f = -f' \ (f > 0); \quad \frac{y}{y'} > 0$$

JUNIO 01

C4.— Un rayo de luz monocromática que se propaga en un medio de índice de refracción 1,58 penetra en otro medio de índice de refracción 1,23 formando un ángulo de incidencia de 15° (respecto a la normal) en la superficie de discontinuidad entre ambos medios.

a) Calcule el valor del ángulo de refracción correspondiente al ángulo de incidencia anterior. Haga un dibujo esquemático.

b) Defina ángulo límite y calcule su valor para este par de medios.

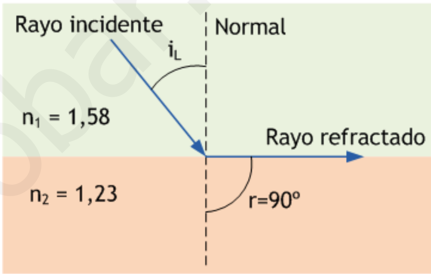


Un sencillo caso de refracción desde un medio más a otro menos refringente: siempre que estamos en este supuesto, pasando de medio con índice n_1 a medio con índice n_2 más pequeño, el rayo refractado se **aleja de la normal**, tal como muestra la figura. Esto permite que se pueda plantear la posibilidad de llegar a una incidencia con ángulo límite i_L, más allá del cual no exista refracción y, por consiguiente, el rayo no llegue a penetrar en el medio 2, produciéndose **reflexión total**.

a) Una simple aplicación de la ley de Snell:

$$n_1.\text{sen } I = n_2.\text{sen } r \quad \Rightarrow \quad 1{,}58.\text{sen } 15° = 1{,}23.\text{sen } r$$

$$\text{sen } r = \frac{1{,}58}{1{,}23}\ .\ \text{sen } 15° = 0{,}3324 \quad \Rightarrow \quad r = \mathbf{19{,}42° = 0{,}34\ rad}$$



b) El ángulo límite i_L es el ángulo de **incidencia** que provoca un rayo refractado con ángulo de 90º. Si el ángulo de incidencia es mayor que i_L **no hay refracción** y se tiene **reflexión total**, como se ha dicho más arriba. La figura muestra cómo sería la situación para el ángulo límite. La ley de Snell aplicada al caso daría

$$n_1.\text{sen } I = n_2.\text{sen } r \quad \Rightarrow \quad 1{,}58.\text{sen } i_L = 1{,}23.\text{sen } 90°$$

de manera que el ángulo límite valdrá

$$\text{sen } i_L = \frac{1{,}23}{1{,}58}\text{sen}90° = \frac{1{,}23}{1{,}58} = 0{,}7785 \quad \Rightarrow \quad i_L = \mathbf{51{,}12° = 0{,}89\ rad}$$

JUNIO 01

B1.— Un objeto luminoso de 3 cm de altura está situado a 20 cm de una lente divergente de potencia -10 dioptrías. Determine:

a) La distancia focal de la lente.

b) La posición de la imagen.

c) La naturaleza y el tamaño de la imagen.

d) La construcción geométrica de la imagen.

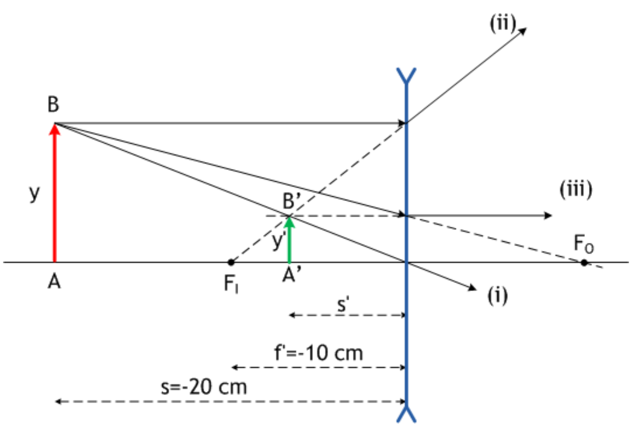
a) La distancia focal de la lente es inmediata, pues $P = -10 \text{ dioptrías} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = -\frac{1}{10} = -0{,}1\text{ m} = \mathbf{-10\ cm}$

b) La posición de la imagen se obtiene de la ecuación de las lentes, $-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \qquad (f' = -10\text{ cm})$

de modo que, con s = −20 cm y f’ = −10 cm, se tiene $-\frac{1}{-20} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{-10} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} = -\frac{3}{20} \quad \Rightarrow \quad s' = \mathbf{-\frac{20}{3}\ cm}$

c) Una lente divergente produce imágenes virtuales. En cuanto al tamaño, podemos deducirlo con facilidad:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{3\text{ cm}} = \frac{-\frac{20}{3}\text{ cm}}{-20\text{ cm}} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad y' = \mathbf{1\ cm}$$



d) Los rayos empleados para conseguir la imagen son:

(i) rayo que pasa por el centro de la lente; no se desvía;

(ii) rayo paralelo al eje; se difracta de modo que su prolongación pasa por el foco imagen F_I;

(iii) rayo que pasa por el foco objeto F_O; se difracta horizontalmente al atravesar la lente.

Los tres rayos divergen tras atravesar la lente: la imagen debe construirse con sus prolongaciones, y resulta **virtual**, **derecha** y de **menor tamaño**, coincidiendo con lo esperado. Además, aparece dentro de la distancia focal de la lente, de acuerdo con los resultados numéricos de los apartados anteriores.

Septiembre 01

C4.— a) Defina para una lente delgada los siguientes conceptos: foco objeto, foco imagen, distancia focal objeto y distancia focal imagen.

b) Dibuje para los casos de lente convergente y lente divergente la marcha de un rayo que pasa (él o su prolongación) por b1) el foco objeto; b2) el foco imagen.

Véase la teoría.

Septiembre 01

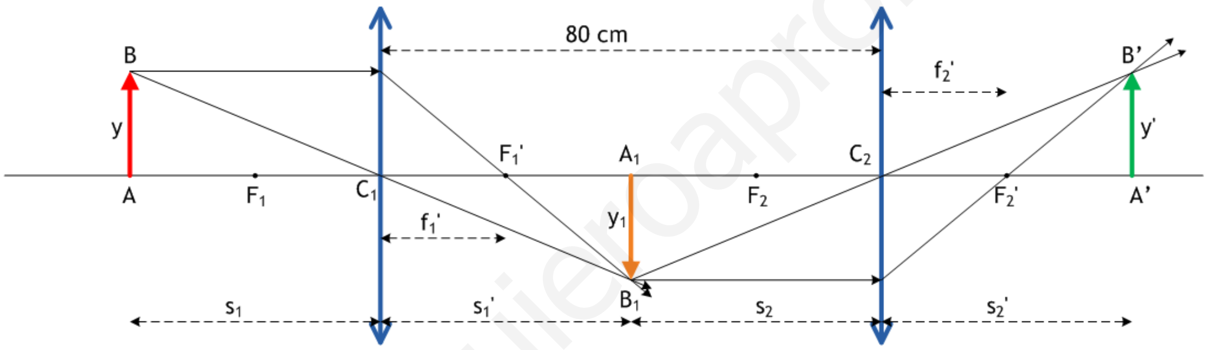
B1.— Sea un sistema óptico formado por dos lentes delgadas convergentes de la misma distancia focal (f’ = 20 cm), situadas con el eje óptico común a una distancia entre sí de 80 cm. Un objeto luminoso lineal perpendicular al eje óptico, de tamaño y = 2 cm, está situado a la izquierda de la primera lente y dista de ella 40 cm.

a) Determine la posición de la imagen final que forma el sistema óptico y efectúe su construcción geométrica.

b) ¿Cuál es la naturaleza y el tamaño de esta imagen?

El sistema se resuelve buscando la imagen del objeto en la primera lente, que servirá después como objeto en la segunda lente, obteniéndose finalmente la imagen en esta segunda lente. Nótese, además, que el objeto está colocado inicialmente a una distancia de la lente igual al doble de su distancia focal objeto; es decir, $s_1 = -40$ cm y $f_1 = -20$ cm. Sabemos que, en tales circunstancias, la imagen en la primera lente será real, invertida y del mismo tamaño que el objeto: todo ello aparece reflejado en la construcción geométrica que se nos pide. Además, sabemos también que la imagen se formará a la misma distancia que el objeto, $s_1' = 40$ cm.

Esta imagen obtenida en la primera lente sirve como objeto para la segunda lente. Nótese que ahora la distancia objeto es de nuevo $s_2 = -40$ cm, otra vez doble que la distancia focal de la segunda lente. Por tanto, la imagen vuelve a invertirse, quedando finalmente derecha, y acaba teniendo el mismo tamaño que el objeto inicial; naturalmente, es una imagen real. Todo ello puede resolverse de manera gráfica, tal como puede verse en la siguiente construcción:



que emplea rayos paralelos al eje del sistema, que se refractan para pasar por los respectivos focos imagen de una y otra lente, y rayos dirigidos a los centros C_1 y C_2 de las lentes, que no se desvían al atravesarlas.

Como acabamos de ver, se puede resolver el ejercicio de forma estrictamente gráfica, ya que las condiciones son singularmente simétricas. No obstante, en general resulta necesario acudir a las ecuaciones de las lentes:

En la primera lente: $$-\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1'} \Rightarrow -\frac{1}{-40}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{s_1'}=\frac{1}{20}-\frac{1}{40}=\frac{1}{40} \Rightarrow s_1'=40\text{ cm}$$

$$\frac{y_1}{y}=\frac{s_1'}{s_1} \Rightarrow \frac{y_1}{2}=\frac{-40}{40} \Rightarrow y_1=-2\text{ cm}$$

En la segunda lente: $$-\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{f_2'} \Rightarrow -\frac{1}{-40}+\frac{1}{s_2'}=\frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{s_2'}=\frac{1}{20}-\frac{1}{40}=\frac{1}{40} \Rightarrow s_2'=40\text{ cm}$$

$$\frac{y'}{y_1}=\frac{s_2'}{s_2} \Rightarrow \frac{y'}{-2}=\frac{-40}{40} \Rightarrow y_1=2\text{ cm}$$

de modo que, como ya sabíamos, la imagen generada por el sistema está 40 cm a la derecha de la segunda lente, es **real**, **derecha** y del **mismo tamaño**, 2 cm, que el objeto inicial.

Modelo 02

C4.— Explique mediante construcciones geométricas qué posiciones debe ocupar un objeto, delante de una lente delgada convergente, para obtener:

a) Una imagen real de tamaño menor, igual o mayor que el objeto.

b) Una imagen virtual. ¿Cómo está orientada esta imagen y cuál es su tamaño en relación con el objeto?

Véase la teoría.

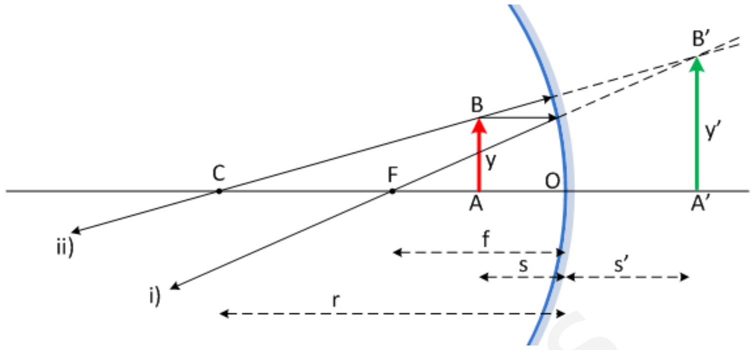
JUNIO 02

C4.– Un objeto luminoso se encuentra delante de un espejo esférico cóncavo. Efectúe la construcción geométrica de la imagen e indique su naturaleza si el objeto está situado a una distancia igual, en valor absoluto, a:

a) La mitad de la distancia focal del espejo.

b) El triple de la distancia focal del espejo.

a) Obsérvese la figura: el objeto AB está situado a una distancia objeto s = r/4 del espejo, mitad de la distancia focal, f = r/2, cuya posición conocemos bien: equidistante entre el centro de curvatura y el vértice del espejo.



Como siempre, debemos tener presente el criterio de signos, que establece, acerca de los datos del espejo y del objeto, lo siguiente:

$$r < 0; \quad f = \frac{r}{2} < 0; \quad s = \frac{f}{2} = \frac{r}{4} < 0; \quad y > 0$$

Ahora, la fórmula para la posición s' de la imagen, que es la conocida

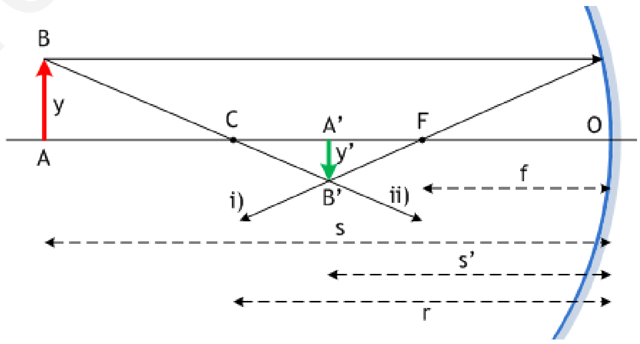
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} = \frac{1}{r/2} - \frac{1}{r/4} = \frac{2}{r} - \frac{4}{r} = -\frac{2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad s' = -\frac{r}{2} > 0$$

Nótese que esto significa que la imagen se forma a la derecha del espejo, donde s' es positivo. Además, eso implica que ha de formarse con la prolongación de los rayos reflejados en el espejo, de modo que ha ser virtual. En cuanto al tamaño de la imagen, la fórmula es

$$\frac{y}{y'} = -\frac{s}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y}{y'} = -\frac{r/4}{-r/2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad y' = 2y > 0$$

es decir, la imagen es derecha y de tamaño doble que el objeto. En resumen, imagen **virtual, derecha y de doble tamaño.** La imagen, por lo demás, se ha construido en la figura empleando los rayos: i), paralelo al eje y que se refleja en el espejo para pasar por el foco; ii) pasando por el centro de curvatura, que se refleja sobre sí mismo. Los rayos son divergentes, y sus prolongaciones forman la imagen virtual, como ya se ha visto.

b) Ahora el objeto se ha distanciado del espejo hasta s = 3f = 3r/2. Los datos acerca del espejo y del objeto son



$$r < 0; \quad f = \frac{r}{2} < 0; \quad s = 3f = 3\frac{r}{2} < 0; \quad y > 0$$

y las cuentas, para la posición s' de la imagen, quedan

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} = \frac{1}{r/2} - \frac{1}{3r/2} = \frac{2}{r} - \frac{2}{3r} = \frac{4}{3r}$$

Por tanto, $s' = \dfrac{3r}{4} < 0$

y el tamaño imagen resulta $\dfrac{y}{y'} = -\dfrac{s}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{y}{y'} = -\dfrac{3r/2}{3r/4} = -\dfrac{4}{2} = -2 \qquad \Rightarrow \qquad y' = -\dfrac{y}{2} < 0$

De modo que la imagen es **real, invertida y de tamaño mitad que el objeto**. Aparece exactamente en el punto medio entre el centro de curvatura y el foco, y la figura emplea los mismos rayos i) y ii) que en el apartado anterior, aunque en esta ocasión convergen para dar una imagen real e invertida.

JUNIO 02

A2.– Un sistema óptico centrado está formado por dos lentes delgadas convergentes de igual distancia focal (f = 10 cm) separadas 40 cm. Un objeto lineal de altura 1 cm se coloca delante de la primera lente a una distancia de 15 cm. Determine:

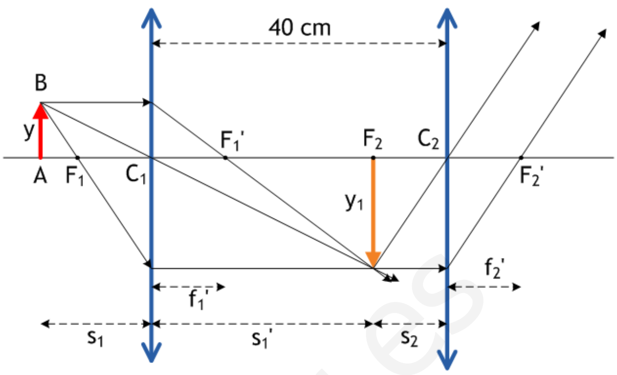
a) La posición, el tamaño y la naturaleza de la imagen formada por la primera lente.

b) La posición de la imagen final del sistema, efectuando su construcción geométrica.

a) La construcción gráfica de la imagen se muestra en la imagen. Los cálculos en la primera lente son sencillos:

$$-\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{-15}+\frac{1}{s_1'}=\frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad s_1' = \mathbf{30\ cm}$$

$$\frac{y_1}{y}=\frac{s_1'}{s_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{y_1}{1}=\frac{30}{-15} \quad \Rightarrow \quad y_1 = \mathbf{-2\ cm}$$



y responden a las preguntas: la imagen en la primera lente es **real**, **invertida**, de **tamaño doble** que el objeto, y está situada a 30 cm a la derecha de la primera lente, exactamente en el foco objeto de la segunda lente, como es fácil de ver.

b) Sabemos que un objeto dispuesto a la distancia focal de una lente convergente produce una imagen **real**, **invertida** y de tamaño **infinito**, que se forma a distancia infinita. La imagen muestra como los rayos que atraviesan la segunda lente resultan paralelos, de forma que se cortarán a distancia infinita.

SEPTIEMBRE 02

C3.– Una superficie de discontinuidad plana separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2. Si un rayo incide desde el medio de índice n_1, razone si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $n_1 > n_2$ el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia.

b) Si $n_1 < n_2$ a partir de un cierto ángulo de incidencia se produce el fenómeno de reflexión total.

La ley de Snell es lo único que necesitamos saber. En la refracción desde el medio 1, con índice n_1, al medio 2, de índice n_2, la ley exige que

$$n_1.\text{sen } i = n_2.\text{sen } r$$

a) de modo que, si $n_1 > n_2$, se sigue que $\text{sen } r > \text{sen } i \quad \Rightarrow \quad r > i$

y el apartado a) es, por tanto, **falso**: al pasar a un medio de refracción mayor, el rayo se aleja de la normal.

b) esta vez, puesto que $n_1 < n_2$, se sigue que $\text{sen } i > \text{sen } r \quad \Rightarrow \quad i > r$

de modo que el rayo, en la refracción, se acerca a la normal. En consecuencia, este apartado es también **falso**: no puede producirse reflexión total, que requiere la condición previa r > i.

SEPTIEMBRE 02

B2.– Una lente delgada convergente proporciona de un objeto situado delante de ella una imagen real, invertida y de doble tamaño que el objeto. Sabiendo que dicha imagen se forma a 30 cm de la lente, calcule:

a) La distancia focal de la lente.

b) La posición y naturaleza de la imagen que dicha lente formará de un objeto situado 5 cm delante de ella, efectuando su construcción geométrica.

Véanse problemas **SEPTIEMBRE 97 A1**, **JUNIO 98 A2**, **JUNIO 00 B1**, **SEPTIEMBRE 00 B2**, entre otros.
Sol.– a) 10 cm; b) s’ = −10 cm; virtual, derecha y de 10 cm.

MODELO 03

C3.– Un rayo de luz monocromática que se propaga en el aire penetra en el agua de un estanque:

a) ¿Qué fenómeno luminoso se origina al pasar la luz del aire al agua? Enuncie las leyes que se verifican en este fenómeno.

b) Explique si la velocidad, la frecuencia y la longitud de onda cambian al pasar la luz de un medio a otro.

Véase la teoría.
Sol.– a) refracción; b) cambian velocidad y longitud de onda; no cambia la frecuencia.

MODELO 03

B2.– Una lente convergente de 10 cm de distancia focal se utiliza para formar la imagen de un objeto luminoso lineal colocado perpendicularmente a su eje óptico y de tamaño y = 1 cm.

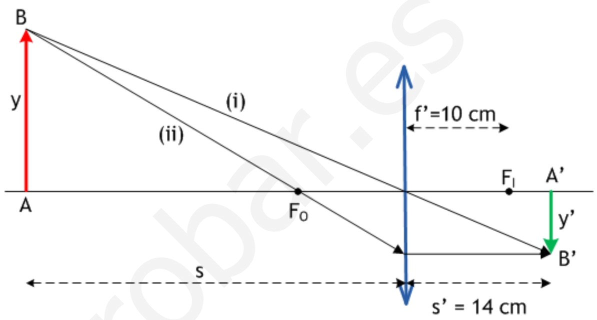
a) ¿Dónde hay que colocar el objeto para que su imagen se forme 14 cm por detrás de la lente? ¿Cuál es la naturaleza y el tamaño de esta imagen?

b) ¿Dónde hay que colocar el objeto para que su imagen se forme 8 cm por delante de la lente? ¿Cuál es la naturaleza y el tamaño de esta imagen?

Efectúe la construcción geométrica en ambos casos.

Suponemos, como siempre, el objeto situado a la izquierda de la lente y la marcha de los rayos de izquierda a derecha, con todos los criterios de signos habituales.

a) Enfocaremos este primer apartado de un modo distinto al habitual: generalmente, lo más práctico es emplear las ecuaciones de las lentes y del aumento lateral para resolver numéricamente las cuestiones, y realizar después (o al mismo tiempo) las construcciones geométricas de las imágenes. Ya que esta vez nos dan la posición de la imagen, aprovecharemos para obtener inicialmente una solución gráfica del problema, y haremos las cuentas a continuación.



Sabemos que, si una lente convergente forma una imagen detrás de la lente, tiene que ser **real** e **invertida**: ese debe ser nuestro caso. Deberíamos dibujar la lente y colocar sus focos objeto e imagen a 10 cm de la misma, uno a cada lado. Después colocamos la imagen invertida y a la derecha de la lente, en la posición indicada en el enunciado.

Empleando el **principio de reversibilidad**, podemos dibujar la marcha de los rayos procedentes del objeto. Uniendo B' con el centro de la lente tenemos la dirección de uno de los rayos (i) que han de salir de B; imaginando un rayo que se desvió paralelo al eje tras atravesar la lente, tenemos el rayo (ii) que salió de B hacia el foco objeto F_O; la convergencia de ambas direcciones señala la posición del objeto. Podríamos emplear ahora una regla para medir s y responde a la cuestión. También podríamos medir y' y conocer el tamaño de la imagen.

Naturalmente, se espera que obtengamos esos resultados mediante los cálculos oportunos, que resultarían acordes con nuestra construcción geométrica. Tenemos f' = 10 cm y s' = 14 cm, de modo que será:

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{s}+\frac{1}{14}=\frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s}=-\frac{1}{35} \quad \Rightarrow \quad s=\mathbf{-35\ cm}$$

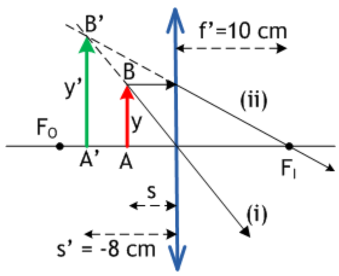
y sabemos que es una imagen **real** e **invertida**. Su tamaño resulta

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1}=\frac{14}{-35} \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{2}{5}=\mathbf{-0{,}4\ cm}$$

dos veces y media menor que el objeto.

b) Empecemos ahora con las ecuaciones. Sabemos que f' = 10 cm y s' = −8 cm, pues la imagen se ha formado a la izquierda de la lente, delante de la misma. Por tanto,

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{s}+\frac{1}{-8}=\frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s}=-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=-\frac{9}{40} \quad \Rightarrow \quad s=\mathbf{-\frac{40}{9}\ cm=-4{,}44\ cm}$$



el objeto tuvo de colocarse a 4,44 cm delante de la lente, dentro de su distancia focal objeto. Como sabemos, es así como debe suceder para que la imagen aparezca a la izquierda de la lente. Además, también sabemos que es **virtual**, pues ha de formarse necesariamente con las prolongaciones de los rayos desviados por la lente. El tamaño resultará

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1}=\frac{-8}{-\frac{40}{9}} \quad \Rightarrow \quad y'=\mathbf{\frac{9}{5}\ cm=1{,}8\ cm}$$

mayor que el objeto. Todo ello está de acuerdo con la construcción gráfica que se adjunta; en ella se muestran los rayos (i), que sale del objeto y pasa por el centro de la lente sin desviarse, y (ii), que sale del objeto paralelo al eje y se refracta para pasar por el foco imagen a la derecha de la lente. Las prolongaciones de estos rayos divergentes proporcionan la imagen A'B'.

JUNIO 03

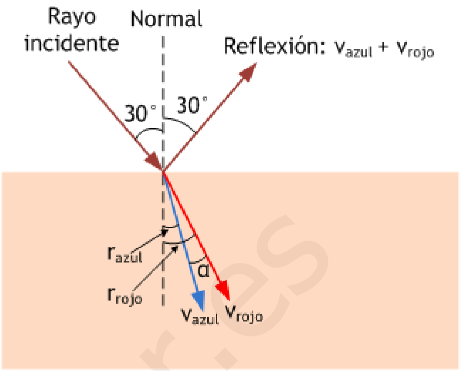
C4.– Un haz luminoso está constituido por dos rayos de luz superpuestos: uno azul de longitud de onda 450 nm y otro rojo de longitud de onda 650 nm. Si este haz incide desde el aire sobre la superficie plana de un vidrio con un ángulo de incidencia de 30º, calcule:

a) El ángulo que forman entre sí los rayos azul y rojo reflejados.

b) El ángulo que forman entre si los rayos azul y rojo refractados.

Índice de refracción del vidrio para el rayo azul: n_{azul} = 1,55 Índice de refracción del vidrio para el rayo rojo: n_{rojo}=1,40

a) En la reflexión, la luz azul y la luz roja se mueven en la misma dirección, formando un ángulo de 30º con la normal en el punto de incidencia, tal como se muestra en la figura. Por supuesto, las longitudes de onda no cambian, puesto que la luz no experimenta cambio de medio. La respuesta formal sería, por tanto, 0º.



b) Al cambiar de medio y entrar en el vidrio, la luz roja y la luz azul se mueven con **diferente velocidad** y, por tanto, con **distinto índice de refracción:** estamos ante un fenómeno de **dispersión** de la luz. Tenemos, pues, que aplicar la ley de Snell a cada una de ellas, para obtener los correspondientes ángulos de refracción, que serán diferentes:

Para el rayo de luz azul: 1.sen 30º = 1,55.sen r_{azul}

de donde sen r_{azul} = 0,3226 ⇒ r_{azul} = 18º49'9"

Para el rayo de luz roja: 1.sen 30º = 1,40.sen r_{rojo}

de donde sen r_{rojo} = 0,3571 ⇒ r_{rojo} = 20º55'29"

así que el ángulo α que forman ambos rayos refractados, que puede verse en la figura, resulta ser

α = 20º55'29" – 18º49'9" = 2º6'20"

Aunque no se plantee esta cuestión en el ejercicio, una aclaración: la longitud de onda de ambos rayos, una vez en el vidrio, habrá **cambiado**. Como se recordará, la frecuencia de los rayos incidentes, una para el rayo azul y otra para el rayo rojo, es lo que se mantiene invariante al cambiar de medio; no así las longitudes de onda.

JUNIO 03

A2.– Un objeto de 1 cm de altura se sitúa a 15 cm delante de una lente convergente de 10 cm de distancia focal.

a) Determine la posición, tamaño y naturaleza de la imagen formada, efectuando su construcción geométrica.

b) ¿A qué distancia de la lente anterior habría que colocar una segunda lente convergente de 20 cm de distancia focal para que la imagen final se formara en el infinito?

a) La distancia objeto es s = –15 cm; la distancia focal f' = 10 cm. La imagen se forma en una posición s' que se obtiene de resolver

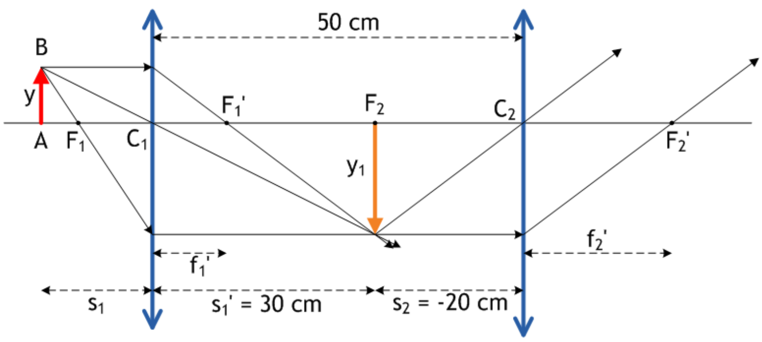
$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{-15}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{10} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s'}=\frac{1}{30} \quad\Rightarrow\quad s'=\mathbf{30\ cm}$$

de modo que aparece detrás de la lente; es, por tanto, **real**. Su tamaño y orientación la tenemos de

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{1}=\frac{30}{-15} \quad\Rightarrow\quad y'=\mathbf{-2\ cm}$$

así que es **invertida** y de **doble tamaño** que el objeto.

b) La teoría nos enseña que un objeto colocado en el foco de lente divergente produce rayos paralelos al atravesarla, de modo que la imagen se forma a distancia infinita. Por tanto, la imagen que acabamos de obtener en la primera lente, que debe actuar como objeto para la segunda, deberá estar en su foco; por tanto, a 20 cm de distancia de ella. Como esta imagen se formó a 30 cm de la primera lente, parece claro que la distancia entre las lentes deberá ser d = 30 + 20 = **50 cm**.



La figura muestra cómo sería la formación de las imágenes en ambas lentes, especialmente en lo que se refiere a la segunda lente y la aparición de una imagen a distancia infinita.

Septiembre 03

C4.– a) Explique qué son una lente convergente y una lente divergente. ¿Cómo están situados los focos objeto e imagen en cada una de ellas?

b) ¿Qué es la potencia de una lente y en qué unidades se acostumbra a expresar?

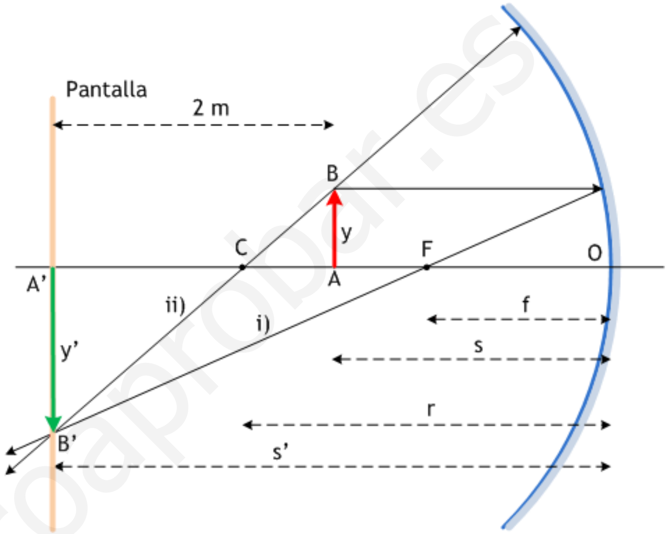
Véase la teoría.

Septiembre 03

B2.– Por medio de un espejo cóncavo se quiere proyectar la imagen de un objeto de tamaño 1 cm sobre una pantalla plana, de modo que la imagen sea invertida y de tamaño 3 cm. Sabiendo que la pantalla ha de estar colocada a 2 m del objeto, calcule:

a) Las distancias del objeto y de la imagen al espejo, efectuando su construcción geométrica.

b) El radio del espejo y la distancia focal.



a) Hagamos las cuentas, antes que nada. La fórmula para la posición en la formación de imágenes en un espejo cóncavo, y la que nos informa sobre el tamaño de la imagen son las conocidas

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \qquad (1); \qquad\qquad \frac{y}{y'}=-\frac{s}{s'} \qquad (2)$$

donde, de los datos del problema, sabemos que y = 1 cm; y' = −3 cm, de manera que podemos deducir, de (2):

$$\frac{1}{-3}=-\frac{s}{s'} \qquad \Rightarrow \qquad s' = 3s \qquad (3)$$

así que sabemos ahora que las distancias objeto s e imagen s' están esa relación. Además, ya que el enunciado afirma que la pantalla donde se forma la imagen está a 2 m del objeto, es fácil concluir que

$$s' = -2 + s \qquad (4)$$

donde debe tenerse presente, para comprender el signo negativo antes del 2, que todas las cantidades son negativas, de acuerdo con el criterio habitual de signos: la figura debería aclarar eso.

Así las cosas, de (3) y (4) se despeja fácilmente $s = -1$ m; $s' = -3$ m

b) Ahora es muy sencillo obtener la distancia focal, f. De (1), conocidas s y s', se tiene

$$\frac{1}{-1}+\frac{1}{-3}=\frac{1}{f} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{4}{3}=\frac{1}{f} \qquad \Rightarrow \qquad f = -\frac{3}{4}\text{ m} \qquad \Rightarrow \qquad r = 2f = -\frac{3}{2}\text{ m}$$

En cuanto a la construcción geométrica de la imagen, es la clásica para un espejo esférico cóncavo, con imagen **real, invertida y de mayor tamaño**. El objeto, como sabemos y confirma la figura, está colocado entre el centro de curvatura y el foco. Los rayos que se han dibujado, como siempre, son i) y ii), que pasan respectivamente por el foco y el centro de curvatura.

Modelo 04

C4.– a) ¿Qué combinación de lentes constituye un microscopio? Explique mediante un esquema gráfico su disposición en el sistema

c) Dibuje la marcha de los rayos procedentes de un objeto a través del microscopio, de manera que la imagen final se forme en el infinito.

Véase la teoría.

Modelo 04

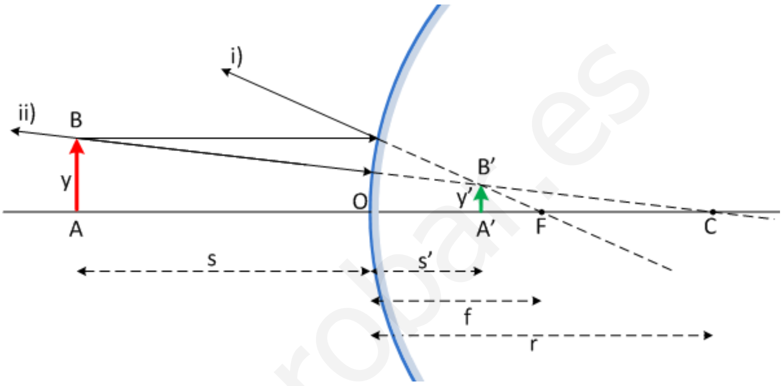
B2.– Un espejo esférico convexo proporciona una imagen virtual de un objeto que se aproxima a él con velocidad constante. El tamaño de dicha imagen es 1/10 del tamaño del objeto cuando éste se encuentra a 8 m del espejo.

a) ¿A qué distancia del espejo se forma la correspondiente imagen virtual?
b) ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo?
c) Un segundo después, el tamaño de la imagen formada por el espejo es 1/5 del tamaño del objeto. ¿A qué distancia del espejo se encuentra ahora el objeto?
d) ¿Cuál es la velocidad del objeto?

a) De nuevo las ecuaciones para la formación de imágenes en un espejo esférico, esta vez convexo. Se trata de

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad (1); \qquad \frac{y}{y'}=-\frac{s}{s'} \quad (2)$$

y sabemos esta vez que f > 0, ya que el foco está a la derecha del espejo, igual que su centro de curvatura. Igualmente, sabemos que la imagen que se formará será **virtual** y **derecha**, así que y > 0 e y' > 0.



Conocemos la relación de tamaños objeto–imagen cuando el objeto está a 8 m del espejo, es decir, cuando s = –8 m (¡téngase siempre presente el convenio de signos!). Así que (2) nos da esta ocasión

$$\frac{y}{y'}=\frac{1}{0,1}=-\frac{s}{s'} \quad\Rightarrow\quad s' = -0,1s = \mathbf{0,8\ m}$$

lo que responde a la primera pregunta: la imagen se forma a 80 cm a la derecha del espejo.

b) Ahora, de (1), conocidas s y s', se sigue que

$$\frac{1}{-8}+\frac{1}{0,8}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{8}+\frac{10}{8}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad f=\frac{8}{9}\ \mathrm{m} \quad\Rightarrow\quad r = 2f = \mathbf{\frac{16}{9}\ m}$$

c) Hay que repetir los cálculos del apartado a), para encontrar el valor que tiene s ahora, puesto que el objeto se ha movido hacia la derecha, acercándose al espejo. Empecemos notando que, ya que el tamaño imagen es ahora 1/5 del objeto, (2) queda como

$$\frac{y}{y'}=\frac{1}{1/5}=5=-\frac{s}{s'} \quad\Rightarrow\quad s'=-\frac{s}{5}$$

y ahora (1), que se escribe

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{-s/5}=\frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s}-\frac{5}{s}=-\frac{4}{s}=\frac{1}{f}=\frac{9}{8} \quad\Rightarrow\quad s=-\frac{32}{9}=\mathbf{-3,56\ m}$$

la nueva posición del objeto.

d) De modo que, en 1 s, el objeto ha pasado de estar a 8 m del espejo a colocarse a 3,56 m, siempre a su izquierda y acercándose a él: ha recorrido 8 – 3,56 = 4,44 m. La velocidad, supuesta constante, es obvia:

$$v = \mathbf{4,44\ m/s}$$

Esta velocidad tiene signo **positivo**, ya que el objeto se mueve hacia la derecha y ese es nuestro criterio de signos. De modo más formal, véase que el desplazamiento en 1 s ha llevado al móvil desde la posición inicial –8 m (8 m a la izquierda del espejo) a la posición final –3,56 m (sigue a la izquierda del espejo). El desplazamiento en 1 s que hemos empleado más arriba ha sido

$$\Delta s = \text{posición final} - \text{posición inicial} = -3,56 - (-8) = 4,44\ \mathrm{m}$$

una cantidad positiva.

Junio 04

C4.– a) ¿Qué tipo de imagen se obtiene con un espejo esférico convexo?
b) ¿Y con una lente esférica divergente?
Efectúe las construcciones geométricas adecuadas para justificar las respuestas. El objeto se supone real en ambos casos.

Véase la respuesta para **Modelo 01 C3**, que plantea exactamente la misma cuestión.

JUNIO 04

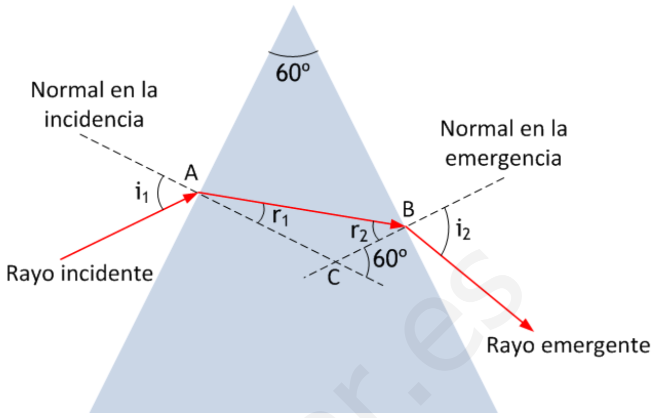
B2.– Un rayo de luz monocromática incide sobre una cara lateral de un prisma de vidrio, de índice de refracción $n = \sqrt{2}$. El ángulo del prisma es $\alpha = 60°$. Determine:

a) El ángulo de emergencia a través de la segunda cara lateral si el ángulo de incidencia es de 30°. Efectúe un esquema gráfico de la marcha del rayo.

b) El ángulo de incidencia para que el ángulo de emergencia del rayo sea de 90°.

a) La figura muestra la marcha del rayo a través del prisma. Incide en la cara lateral izquierda en el punto A, desde el aire, con un ángulo de incidencia de 30°, y experimenta una primera refracción. La ley de Snell exige que

$$1.\text{sen } 30° = \sqrt{2}\,.\text{sen } r_1 \Rightarrow \text{sen } r_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow r_1 = 20°42'17''$$



De otra parte, sabemos que $r_1 + r_2 = 60°$

de modo que r_2 es inmediato,

$$r_2 = 60° - r_1 = 60° - 20°42'17'' = 39°17'43''$$

El rayo incide, pues, en B con este ángulo, para que suceda una segunda refracción, esta vez del vidrio al aire. La ley de Snell se escribe ahora

$$\sqrt{2}\,.\text{sen } r_2 = 1.\text{sen } i_2 \Rightarrow \text{sen } i_2 = 0{,}8956 \Rightarrow i_2 = \mathbf{63°35'29''}$$

b) Esta vez hemos de buscar el valor de i_1. Procedamos justamente del revés, hacienda el camino del rayo en sentido inverso. En la refracción en B, después de atravesar el prisma, debe ser $i_2 = 90°$, como se nos pide. Eso implica que la ley de Snell, en esa refracción, queda

$$\sqrt{2}\,.\text{sen } r_2 = 1.\text{sen } 90° = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad r_2 = 45°$$

de modo que el ángulo r_2 **tiene que haber sido 45°**. Como la suma de r_1 y r_2 ha de ser 60°, se deduce que $r_1 = 15°$. Y así, escribiendo la ley de Snell en A, en la primera refracción del aire al vidrio,

$$1.\text{sen } i_1 = \sqrt{2}\,.\text{sen } 15° \quad \Rightarrow \quad \text{sen } i_1 = 0{,}3660 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \mathbf{21°28'15''}$$

obtenemos cuál tendría que haber sido el ángulo de incidencia.

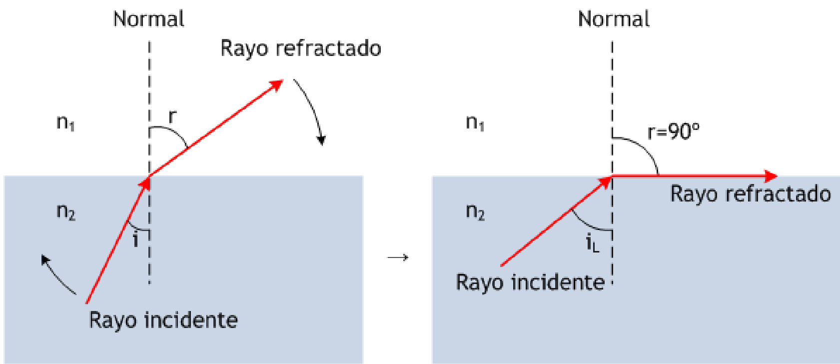
SEPTIEMBRE 04

C3.– a) Defina el concepto de ángulo límite y determine su expresión para el caso de dos medios de índices de refracción n_1 y n_2, si $n_1 > n_2$.

b) Sabiendo que el ángulo límite definido entre un medio material y el aire es 60°, determine la velocidad de la luz en dicho medio.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3.10^8$ m/s

a) Cuando un rayo de luz se refracta al pasar de un medio a otro, el ángulo de refracción r es **mayor** que el incidencia i cuando el rayo **pasa de un índice de refracción a otro menor**, es decir, cuando **la luz pasa de un medio más lento a otro más rápido**. En las condiciones del enunciado, la luz tendría que ir del medio 2, con índice n_2, al medio 1, con índice n_1.



En tal supuesto, el rayo se refracta **alejándose** de la normal. Eso permite que, si el ángulo de incidencia va aumentando progresivamente, se alcance finalmente un valor i_L para el que resulte $r = 90°$, de manera que si i sigue aumentando, **no habrá refracción, produciéndose la reflexión total.** El ángulo límite, pues, es aquel que cumple, aplicando la ley de Snell

$$n_2.\text{sen } i_L = n_1.\text{sen } 90° \quad \Rightarrow \quad \text{sen } i_L = \frac{n_1}{n_2}$$

b) Si se trata de aire, $n_1 = 1$, y el ángulo límite es $i_L = 60°$, podemos hallar con facilidad el índice de refracción del medio material, que será n_2, y deducir de él la velocidad de la luz en este medio:

$$n_2 = \frac{n_1}{\text{sen } i_L} = \frac{1}{\text{sen } 60°} = \mathbf{1{,}15} \quad ; \quad n_2 = \frac{c}{v_2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3.10^8}{1{,}15} = \mathbf{2{,}60.10^8\ m/s}$$

SEPTIEMBRE 04

B1.– Un objeto luminoso de 2 cm de altura está situado a 4 m de una pantalla. Entre el objeto y la pantalla se coloca una lente esférica delgada, de distancia focal desconocida, que produce sobre la pantalla una imagen tres veces mayor que el objeto. Determine:

- **a) La posición del objeto respecto a la lente y la clase de lente necesaria.**
- **b) La distancia focal de la lente y efectúe la construcción geométrica de la imagen.**

Véanse **JUNIO 98 A2** y **JUNIO 00 B1**, idénticos es este ejercicio.
Sol.– a) Objeto a 1 m de la lente convergente; b) 1,5 m

MODELO 05

C2.– Delante de una lente convergente se coloca un objeto perpendicularmente a su eje óptico:

- **a) ¿A qué distancia de la lente debe colocarse para obtener una imagen de igual tamaño e invertida? ¿Cuál es la naturaleza de esta imagen?**
- **b) ¿A qué distancia de la lente debe colocarse para obtener una imagen de doble tamaño y derecha? ¿ Cuál es la naturaleza de esta imagen?**

Efectúe la construcción geométrica en ambos apartados.

Las ecuaciones $\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$; $\frac{y}{y'}=\frac{s}{s'}$ resuelven ambas cuestiones. En efecto,

a) Naturalmente, suponemos y > 0. Si la imagen ha de ser de igual tamaño e invertida, parece claro que y’ =–y. En consecuencia,

$$\frac{y}{y'}=\frac{s}{s'} \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{-y}=\frac{s}{s'} \quad\Rightarrow\quad s'=-s$$

y, por tanto, $$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{-s}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad -\frac{2}{s}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad s=\mathbf{-2f'}$$

el objeto debe colocarse a una distancia de la lente igual al **doble de la distancia focal**. Téngase presente que f’ > 0, y por tanto, s <0, ya que está a la izquierda de la lente, en el espacio objeto. La imagen, como puede verse en la construcción al final del problema, es **real e invertida**.

b) Esta vez debe ser y’ = 2y, una imagen de doble tamaño que el objeto y derecha. Las ecuaciones nos dan

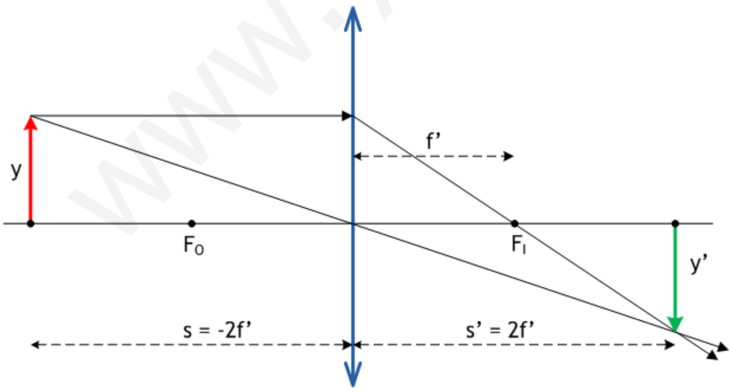
$$\frac{y}{y'}=\frac{s}{s'} \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{2y}=\frac{s}{s'} \quad\Rightarrow\quad s'=2s$$

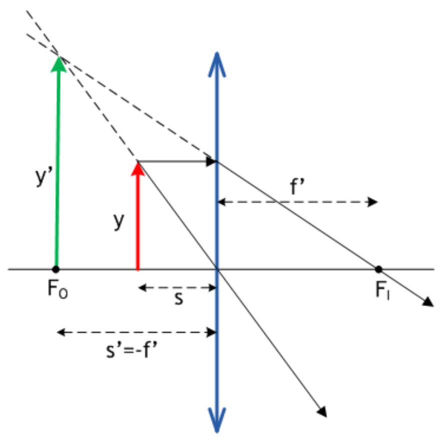
de modo que s’ < 0, igual que s. Llevando esto a la ecuación de las lentes,

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2s}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2s}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow\quad s=-\mathbf{\frac{f'}{2}}$$

tenemos que el objeto debe estar situado dentro de la distancia focal, en el punto medio entre el foco y la lente La imagen es esta vez **virtual y derecha**.

La construcción geométrica de las imágenes en ambos casos aparece a continuación:





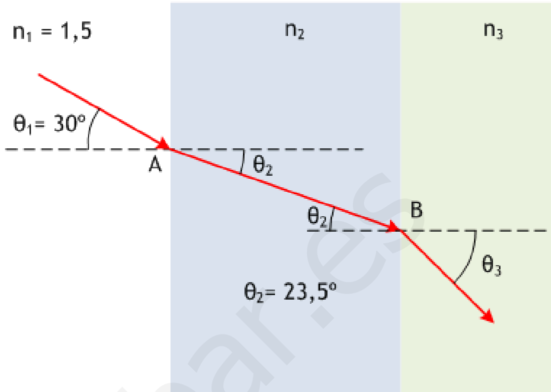
MODELO 05

B1.– Se tienen tres medios transparentes de índices de refracción n_1, n_2 y n_3 separados entre sí por superficies planas y paralelas. Un rayo de luz de frecuencia $\nu = 6.10^{14}$ Hz incide desde el primer medio ($n_1 = 1,5$) sobre el segundo formando un ángulo $\theta_1 = 30°$ con la normal a la superficie de separación.

a) **Sabiendo que el ángulo de refracción en el segundo medio es $\theta_2 = 23,5°$, ¿cuál será la longitud de onda de la luz en este segundo medio?**

b) **Tras atravesar el segundo medio, el rayo llega a la superficie de separación con el tercer medio. Si el índice de refracción del tercer medio es $n_3 = 1,3$, ¿cuál será el ángulo de emergencia del rayo?**

Dato: Velocidad de la luz en el vacío $c = 3.10^8$ m/s



Una observación previa: a menudo, cuando se discute el comportamiento de una lámina de caras planoparalelas, el medio externo es el aire, en ambos lados de la lámina. Uno de los resultados que se destacan es el **paralelismo** de los rayos incidente y emergente: el rayo no se desvía, aunque sí se **desplaza**. Pues bien, este ejercicio introduce una diferencia, ya que los medios a ambos lados de la lámina son distintos, con índices de refracción n_1 y n_3. Los rayos incidente y emergente, como sugiere la figura, **ya no van a ser paralelos**.

a) Comenzamos aplicando la ley de Snell a la primera refracción, que se escribe

$$1,5.\text{sen } 30° = n_2.\text{sen } 23,5° \qquad \Rightarrow \qquad n_2 = 1,88$$

Ahora, debemos tener presente que la frecuencia de la luz, 6.10^{14} Hz será la misma en cualquier medio, pero **no su longitud de onda**. Para hallar la correspondiente a este medio n_2, recordemos

$$n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{c}{\lambda_2 \nu} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2 = \frac{c}{n_2\,\nu} = \frac{3.10^8}{1,88.6.10^{14}} = \mathbf{265,96\ nm}$$

b) Y ahora, otra aplicación de la ley de Snell, esta vez en el punto B, al pasar del medio 2 al 3. Nótese que la simetría, en la figura, deja claro que el ángulo de incidencia es 23,5° en esta refracción:

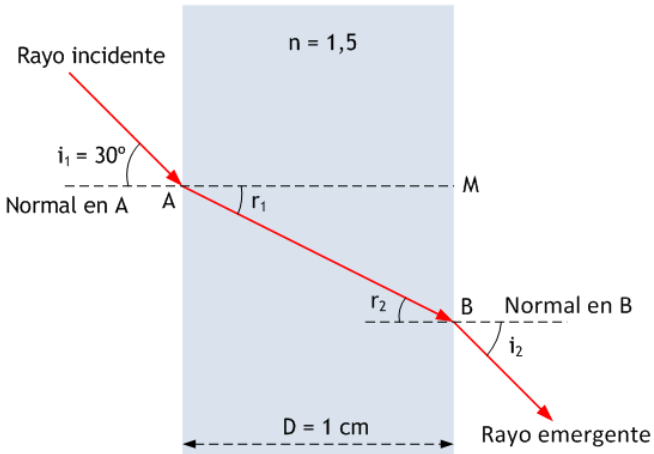
$$1,88.\text{sen } 23,5° = 1,3.\text{sen } \theta_3 \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen } \theta_3 = \frac{1,88.\text{sen } 23,5°}{1,3} = 0,5767 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_3 = \mathbf{35°12'56''}$$

JUNIO 05

C4.– Sobre una lámina transparente de índice de refracción 1,5 y 1 cm de espesor, situada en el vacío, incide un rayo luminoso formando un ángulo de 30º con la normal a la cara. Calcule:

a) **El ángulo que forma con la normal el rayo que emerge de la lámina. Efectúe la construcción geométrica correspondiente.**

b) **La distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina.**



Esta vez estamos ante una aplicación típica de una lámina de caras planoparalelas situada en el vacío. Como sabemos, el rayo de luz que llega a la cara izquierda de la lámina con un ángulo de incidencia de 30° emergerá, tras atravesar la lámina, con el mismo ángulo de emergencia, 30°, sin experimentar desviación, aunque sí habrá sufrido un desplazamiento lateral. Todo ello queda reflejado en la figura, que muestra el camino del rayo a través de la lámina.

a) En efecto, la aplicación de la ley de Snell en las dos refracciones que experimenta el rayo, en los puntos A y B, implica que

en A: $1.\text{sen } 30° = 1,5.\text{sen } r_1$ (1)

en B: $1,5.\text{sen } r_2 = 1.\text{sen } i_2$ (2)

y, puesto que $r_1 = r_2$ por razones obvias, se sigue que

$$\text{sen } 30° = \text{sen } i_2 \qquad \Rightarrow \qquad i_2 = 30°$$

b) Podemos usar (1), o (2), para hallar el ángulo r_1, o r_2, indistintamente, ya que ambas son en realidad la misma ecuación. De (1) tenemos:

$$1.\text{sen } 30° = 1,5.\text{sen } r_1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen } r_1 = \frac{\text{sen } 30°}{1,5} = 0,3333 \Rightarrow \qquad r_1 = 19°28'16''$$

Ahora, en el triángulo ABM de la figura, resulta

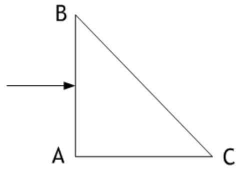
$$\cos r_1 = \frac{AM}{AB} = \frac{1\text{ cm}}{AB} \qquad \Rightarrow \qquad AB = \frac{1\text{ cm}}{\cos r_1} = \mathbf{1,06\ cm}$$

SEPTIEMBRE 05

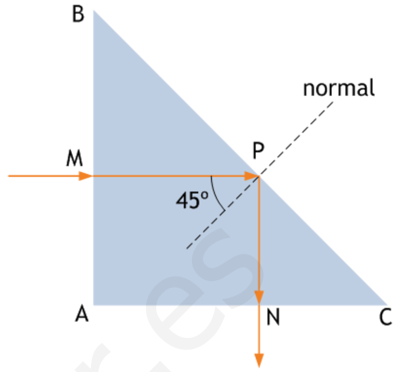
C4.− Se tiene un prisma óptico de índice de refracción 1,5 inmerso en el aire. La sección del prisma es un triángulo rectángulo isósceles como muestra la figura. Un rayo luminoso incide perpendicularmente sobre la cara AB del prisma.

a) Explique si se produce o no reflexión total en la cara BC del prisma.

b) Haga un esquema gráfico de la trayectoria seguida por el rayo a través del prisma. ¿Cuál es la dirección del rayo emergente?

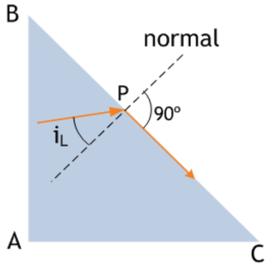


a) Sea M el punto de la cara izquierda en que incide el rayo: no se produce desviación alguna, puesto que índice **normalmente a la cara**. La trayectoria dentro del prisma es MP, de modo que el rayo incide en P haciendo un ángulo de 45°, por razones geométricas obvias, con la normal en ese punto. Un eventual rayo refractado, saliendo al aire, debería cumplir la ley de Snell, en términos



$$1{,}5.\text{sen } 45° = 1.\text{sen } r$$

ecuación sin solución, toda vez que el primer miembro es mayor que 1, y sen r no puede ser mayor que 1. Literalmente, Snell nos está diciendo que **no hay rayo refractado**, ya que no hay forma de cumplir la ley.



Dicho de otro modo: al refractar del vidrio al aire, podemos hablar de **ángulo límite, i_L,** cuando el rayo refractado sale con ángulo de 90°, como se ve en la figura a la izquierda. El ángulo de incidencia de la luz en P, dentro del prisma, tendría que ser i_L y su valor sería (de nuevo, Snell):

$$1{,}5.\text{sen } i_L = 1.\text{sen } 90° = 1 \quad \Rightarrow \quad i_L = 41°48'37''$$

valor que, por cierto, es el ángulo límite del vidrio al agua. Volviendo entonces a nuestro caso, en la figura de arriba: el ángulo de incidencia en P es mayor que 41°48'37", así que no hay refracción y estamos, por tanto, ante **reflexión total**.

b) Por lo tanto, el rayo se **refleja en N, dentro del vidrio,** verticalmente y hacia abajo, ya que el ángulo de reflexión debe ser también de 45°. El rayo llega a N, incidiendo **normalmente** de nuevo, ahora en la cara AC, y emerge del prisma, sin desviarse en esta segunda refracción, verticalmente y hacia abajo. Estamos ante un bonito medio periscopio: otro como este situado más abajo, y tenemos a un oficial de submarino curioseando desde debajo del agua.

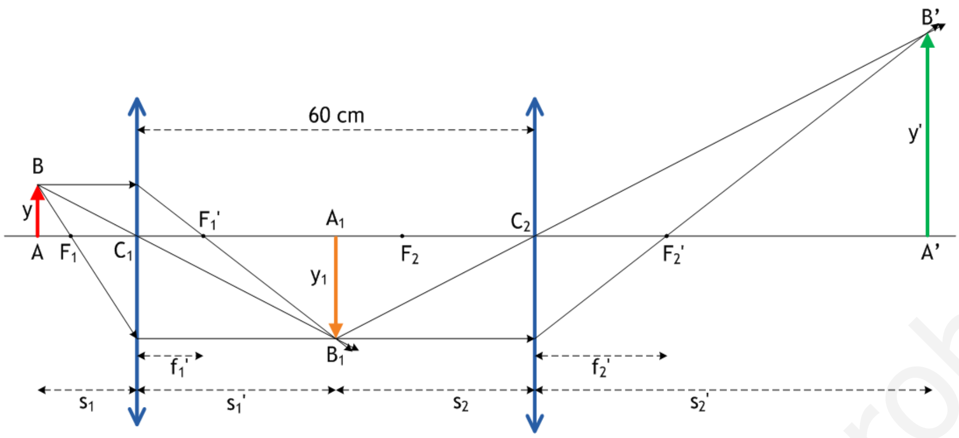
SEPTIEMBRE 05

A2.– Un sistema óptico está formado por dos lentes delgadas convergentes, de distancias focales 10 cm la primera y 20 cm la segunda, separadas por una distancia de 60 cm. Un objeto luminoso de 2 mm de altura está situado 15 cm delante de la primera lente.

a) Calcule la posición y el tamaño de la imagen final del sistema.

b) Efectúe la construcción geométrica de la imagen mediante el trazado de rayos correspondiente.

a) Un sistema formado por dos lentes delgadas tiene, en general, el mismo tratamiento que una lente sencilla: se construye la imagen del objeto en la primera lente, y esta imagen actúa como objeto en la segunda lente, para producir la imagen final del objeto en el sistema. Resulta muy útil trabajar con una construcción geométrica ante nosotros, ya que facilita la comprensión de las sucesivas distancias objeto e imagen con que debemos manejarnos. Así, en el caso que nos ocupa, podemos comenzar por el apartado b), recogido en la figura adjunta.



Estúdiese con atención la marcha de los rayos. El objeto AB está entre F_1 y $2F_1$, ante la primera lente: su imagen A_1B_1 es real, invertida y de mayor tamaño. La imagen A_1B_1 actúa como objeto para la segunda lente, hallándose de nuevo entre F_2 y $2F_2$, de modo que la imagen de A_1B_1 en esta segunda lente acaba siendo A'B', real, invertida y de mayor tamaño que A_1B_1.

Como puede verse, en realidad no se trata más que hacer el mismo trabajo dos veces seguidas. Aplicamos ahora las leyes de construcción de imágenes en una lente, paso por paso:

En la primera lente:

distancia focal imagen, $f_1' = 10$ cm; distancia objeto, $s_1 = -15$ cm; tamaño objeto, $y = 2$ mm

así que podemos poner
$$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s_1'} - \frac{1}{-15} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad s_1' = 30 \text{ cm}$$

y además
$$\frac{y_1}{y} = \frac{s_1'}{s_1} = \frac{30}{-15} = -2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2y = -4 \text{ mm}$$

de modo que la imagen A_1B_1 se forma 30 cm a la derecha de la primera lente; es invertida y de doble tamaño que el objeto inicial. Podemos comprender inmediatamente, mirando la figura cuál es la distancia imagen **en la segunda lente**, s_2, ya que conocemos la distancia entre las lentes.

En la segunda lente:

distancia focal imagen, $f_2' = 20$ cm; distancia objeto, $s_2 = -30$ cm; tamaño objeto, $y_1 = -4$ mm

así que podemos poner
$$\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f_2'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s_2'} - \frac{1}{-30} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad s_2' = \mathbf{60\ cm}$$

y además
$$\frac{y'}{y_1} = \frac{s_2'}{s_2} = \frac{60}{-30} = -2 \quad \Rightarrow \quad y' = -2y_1 = \mathbf{8\ mm}$$

así que la imagen final acaba formándose a 60 cm de la segunda lente, es **real** y **derecha** con respecto al objeto inicial, y su tamaño es **4 veces mayor**.

MODELO 06

C4.– Un objeto de 1 mm de altura se coloca a una distancia de 1 cm delante de una lente convergente de 20 dioptrías.

a) Calcule la posición y el tamaño de la imagen formada, efectuando su construcción geométrica.

b) ¿Se podría recoger esta imagen en una pantalla? ¿Qué instrumento óptico constituye la lente convergente utilizada de esta forma?

Sol.– a) 1,25 cm delante de la lente; 1,25 mm; b) No. Lupa.

A2.– Delante de un espejo cóncavo de 1 m de radio y a una distancia de 0,75 m se coloca un objeto luminoso de tamaño 10 cm.

a) Determine la posición, la naturaleza y el tamaño de la imagen formada por el espejo.

b) Si desde la posición anterior el objeto se acerca 0,5 m hacia el espejo, calcule la posición, la naturaleza y el tamaño de la imagen formada por el espejo en este caso.

Efectúe la construcción geométrica en ambos casos.

a) Hagamos las cuentas, en principio sin hacer la construcción geométrica, aunque sí con las ideas relativas a signos en la cabeza, al menos en lo que respecta a $r<0$, $f<0$, $s<0$, $y>0$, todos ellos fácilmente comprensibles para un espejo cóncavo. Las fórmulas son:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad (1); \qquad \frac{y}{y'}=-\frac{s}{s'} \quad (2)$$

Y, en (1), conocemos $f = r/2 = -0{,}5$ m; $s = -0{,}75$ m

así que s' es inmediata: $\frac{1}{-0{,}75}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-0{,}5} \Rightarrow \frac{1}{s'}=-\frac{2}{3} \Rightarrow s' = -1{,}5$ m

y la imagen se forma a la izquierda del espejo, a **1,5 m de su centro**. Tiene que ser una imagen **real**, ya que se va a formar con los rayos reflejados en el espejo, y no con sus prolongaciones (en este caso, s' sería positiva, pues la imagen estaría a la derecha del espejo).

Ahora, en (2) conocemos y, s y s'; despejar y' es sencillo:

$$\frac{s}{s'}=-\frac{y}{y'} \Rightarrow \frac{-0{,}75}{-1{,}5}=-\frac{10}{y'} \Rightarrow y' = -20 \text{ cm}$$

(un poco de cuidado a las unidades: se ha puesto s y s' en m; y e y' en cm. No hay problema en ello). En resumen, imagen **real, invertida, de tamaño mayor (doble) y situada a 1,5 m del espejo**. Y sin hacer dibujos.

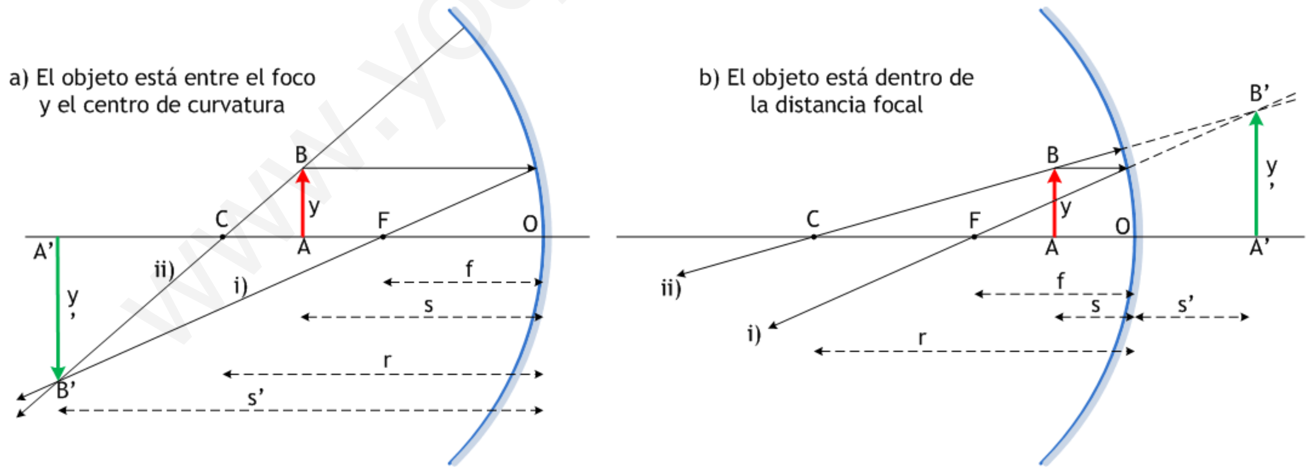
b) Entonces $s = -0{,}25$ m (dentro de la distancia focal, por tanto, ya que $f = -0{,}5$ m). Seguimos sin hacer dibujos, a base de cuentas: de (1), esta vez $\frac{1}{-0{,}25}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-0{,}5} \Rightarrow s' = -2 + 4 = 2$ m

así que la imagen sale a la derecha del espejo, ya que s' es positiva. Esto implica que será **virtual**, puesto que tendrá que formarse con prolongaciones de los rayos reflejados. Sobre el tamaño de la imagen, veamos que dice (2):

$$\frac{s}{s'}=-\frac{y}{y'} \Rightarrow \frac{-0{,}25}{2}=-\frac{10}{y'} \Rightarrow y' = 80 \text{ cm}$$

En resumen, imagen **virtual**, **derecha**, de **mayor tamaño** y 2 m del espejo, a su derecha.

Así que, como se ve, es perfectamente posible resolver un problema de formación de imágenes en un espejo sin echar mano de dibujos. Por supuesto, en general el dibujo ayuda, aunque solo sea en la determinación de signos. Ahora añadimos la construcción gráfica de las imágenes en ambos casos:



empleando, como es habitual, un rayo i) paralelo al eje que se refleja pasando por el foco F, y un rayo ii) que pasa poe el centro de curvatura y se refleja sobre sí mismo. En el caso a) los rayos convergen en B', imagen real del punto B, y en el caso b) los rayos divergen, de manera que necesitamos sus prolongaciones hasta B', imagen virtual del punto B.

JUNIO 06

C4.– Explique dónde debe estar situado un objeto respecto a una lente delgada para obtener una imagen virtual y derecha:

a) Si la lente es convergente.
b) Si la lente es divergente.

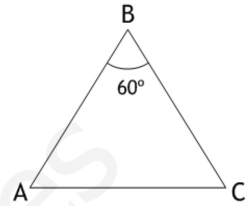
Realice en ambos casos las construcciones geométricas e indique si la imagen es mayor o menor que el objeto.

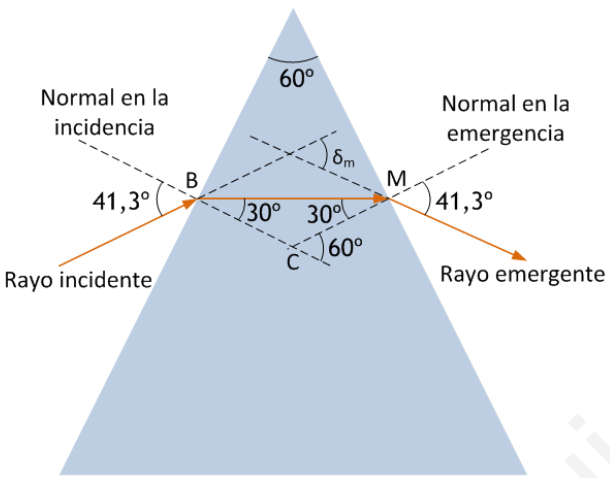
Véase la teoría.

JUNIO 06

A2.– Sobre un prisma de ángulo 60° como el de la figura, situado en el vacío, incide un rayo luminoso monocromático que forma un ángulo de 41,3° con la normal a la cara AB. Sabiendo que en el interior del prisma el rayo es paralelo a la base AC:

a) Calcule el índice de refracción del prisma.
b) Realice un esquema gráfico de la trayectoria seguida por el rayo a través del prisma
c) Determine el ángulo de desviación del rayo al atravesar el prisma
d) Explique si la frecuencia y la longitud de onda correspondientes al rayo luminoso son distintas, o no, fuera y dentro del prisma.





a) La observación de que el rayo es paralelo a la base del prisma en su interior es lo más relevante del enunciado: significa que tenemos mucha información acerca de los ángulos involucrados en la marcha del rayo. Estamos ante un caso de desviación mínima del rayo emergente, y en tal caso se cumplen las siguientes condiciones:

1) Los ángulos internos del rayo con las normales en B y M, en la figura, son iguales. Como su suma debe ser igual al ángulo del prisma, se sigue que cada uno de ellos es de 30°.

2) Los ángulos de incidencia y emergencia son iguales, de modo que el ángulo de emergencia es de 41,3°.

La figura recoge toda esta información; el resto es una serie de respuestas inmediatas a las cuestiones que nos plantean, y la única idea necesaria, más allá de la observación de la figura y consideraciones geométricas sencillas, es la ley de Snell.

a) Por aplicación de la esta ley en B, siendo n el índice de refracción del prisma:

$$1.\text{sen } 41{,}3° = n.\text{sen } 30° \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{\text{sen } 41{,}3°}{\text{sen } 30°} = 1{,}32$$

b) Hecho. Véase la figura.

c) En un prisma, el ángulo de desviación se obtiene de la expresión

$$\delta = i + \varepsilon - \alpha$$

donde i_1 e i_2 son, respectivamente, los ángulos de incidencia y emergencia, y α es el ángulo del prisma. En el caso que nos ocupa, los ángulos de incidencia y emergencia son iguales, y valen 41,3°; el ángulo del prisma es 60°. Se concluye que la desviación en nuestro caso, que es la **desviación mínima** en este prisma, vale

$$\delta_m = 41{,}3° + 41{,}3° - 60° = 22{,}6°$$

d) Recordemos una vez más un hecho esencial: **la frecuencia de la luz se mantiene en los cambios de medio**, ya que sólo depende de la fuente, y no del medio de propagación. No así la longitud de onda, que debe cumplir la ecuación

velocidad de propagación de la luz = longitud de onda x **frecuencia**

de modo que, si la frecuencia permanece invariable, un cambio en la velocidad de propagación supone un cambio de longitud de onda. Con más detalle, como la velocidad de la luz será mayor en el aire que dentro del prisma (el aire se considera a menudo como el vacío), la longitud de onda será mayor en el aire que en el prisma: de acuerdo con la igualdad anterior, si una cosa aumenta, la otra también.

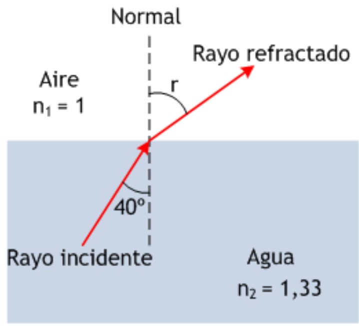
SEPTIEMBRE 06

C4.- Un buceador enciende una linterna debajo del agua (índice de refracción 1,33) y dirige el haz luminoso hacia arriba formando un ángulo de 40º con la vertical.

a) ¿con qué ángulo emergerá la luz del agua?

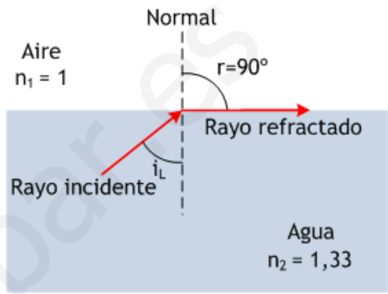
b) ¿cuál es el ángulo de incidencia a partir del cual la luz no saldrá del agua?

Efectúe esquemas gráficos en la explicación de ambos apartados.



a) La luz se mueve desde un medio de índice de refracción más alto, $n_2 = 1,33$, hacia otro de índice más bajo, $n_1 = 1$ (que suponemos el del aire). Como consecuencia, el ángulo de refracción será mayor que 40º, y lo obtendremos por aplicación de la ley de Snell:

$$1,33 . \text{sen } 40^\circ = 1 . \text{sen } r \quad \Rightarrow \quad \text{sen } r = 0,8549 \quad \Rightarrow \quad r = \mathbf{58^\circ 44' 58''}$$



b) Ya que el ángulo de refracción al pasar del agua al aire es mayor que el de incidencia, podemos aumentar éste hasta un valor i_L, que llamamos **ángulo límite**, para el que resulte $r = 90º$, de forma que el rayo refractado se mueva sobre la superficie de separación y no llegue a propagarse en el aire. Desde este ángulo límite en adelante, $i \geq i_L$, no existe refracción y tenemos reflexión total dentro del agua. Aplicando la ley de Snell al supuesto del ángulo límite:

$$1,33 . \text{sen}\, i_L = 1 . \text{sen } 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\, i_L = \frac{1}{1,33} = 0,752 \quad \Rightarrow \quad i_L = \mathbf{48^\circ 45' 12,5''}$$

SEPTIEMBRE 06

A2.− Se tiene un espejo cóncavo de 20 cm de distancia focal.

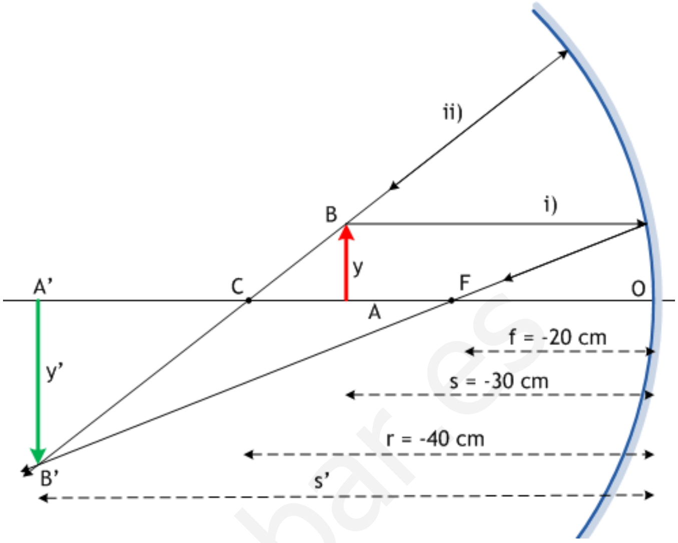
a) ¿Dónde se debe situar un objeto para que su imagen sea real y doble que el objeto real?

b) ¿Dónde se debe situar el objeto para que su imagen sea doble que el objeto pero tenga carácter virtual?

Efectúe la construcción geométrica en ambos casos.

a) Aunque la construcción geométrica aparece al lado, la discusión del problema debe hacerse a partir de las fórmulas para la construcción de imágenes en un espejo esférico. Se trata de

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad ; \quad \frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}$$



con f = −20 cm y, naturalmente, s<0. Para que la imagen sea real debe formarse a la izquierda del espejo, con los rayos reflejados; esto implica que s' ha de ser negativo, lo mismo que s. Consecuentemente, el cociente y'/y debe ser negativo, lo que significa que la imagen aparecerá invertida, y'<0. Esto permite escribir con seguridad

$$y' = -2y$$

ya que la imagen ha de ser de doble tamaño. Llevando esto a las ecuaciones

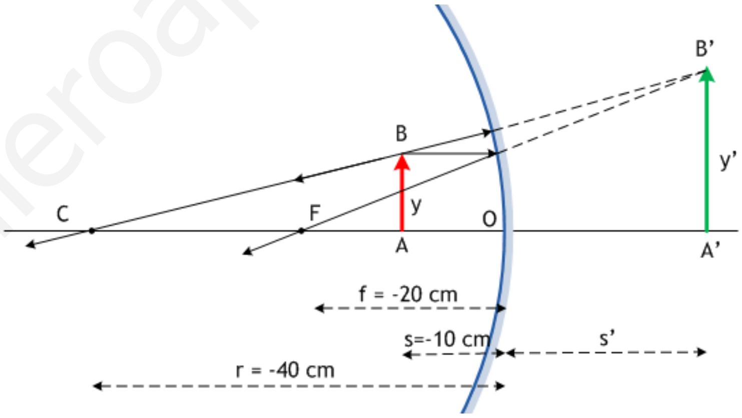
$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{-2y}{y}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad s'=2s\,;$$

$$\text{y} \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{2s}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad s=\frac{3}{2}f=\mathbf{-30\ cm}$$

obtenemos la respuesta: el objeto **debe colocarse a 30 cm del espejo**, en el punto medio entre el foco y el centro de curvatura. La imagen, de acuerdo con lo calculado, aparece en s' = −60 cm y es doble que el objeto.

b) Para que la imagen sea doble y tenga carácter virtual debe formarse a la derecha del espejo, con las prolongaciones de los rayos reflejados: eso significa que será s'>0, en tanto que s<0, de forma que el cociente s'/s será negativo. Se sigue de ahí que el cociente y'/y tiene que ser positivo, así que la imagen aparecerá derecha. Podemos escribir

$$y' = 2y$$



llevar esta conclusión a las ecuaciones:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{2y}{y}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad s'=-2s\,;$$

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{-2s}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad s=\frac{f}{2}=\mathbf{-10\ cm}$$

y tenemos la nueva respuesta: **a 10 cm del espejo,** dentro de la distancia focal. La figura muestra que la imagen es virtual, como preveíamos, y está situada a 20 cm a la derecha del espejo.

Modelo 07

C4.–.Determine el tipo de imagen y el aumento lateral que se obtiene al situar un objeto delante de una lente divergente en los siguientes casos:

- **a) El objeto se sitúa a una distancia igual al doble de la distancia focal.**
- **b) El objeto se sitúa a una distancia la mitad de la distancia focal de la lente.**

Efectúe la construcción geométrica en ambos casos.

Los cálculos para localizar la posición y tamaño de la imagen en una lente divergente implican usar las ecuaciones

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \quad ; \quad \frac{y}{y'}=\frac{s}{s'}$$

donde $s < 0$ (el objeto se coloca a la izquierda de la lente)

$f' < 0$ (la distancia focal imagen en una lente divergente es negativa);

$y > 0$ (el objeto se dispone generalmente derecho sobre el eje óptico)

a) Así, podemos aplicarlas al caso en que $s = 2f'$, tal como pide el primer apartado. Las operaciones quedan, entonces,

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'}-\frac{1}{2f'}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'}=\frac{3}{2f'} \Rightarrow s'=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{f'} \quad ; \quad \frac{y}{y'}=\frac{s}{s'} \Rightarrow \frac{y}{y'}=\frac{2f'}{2f'/3}=3 \Rightarrow y'=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{y}$$

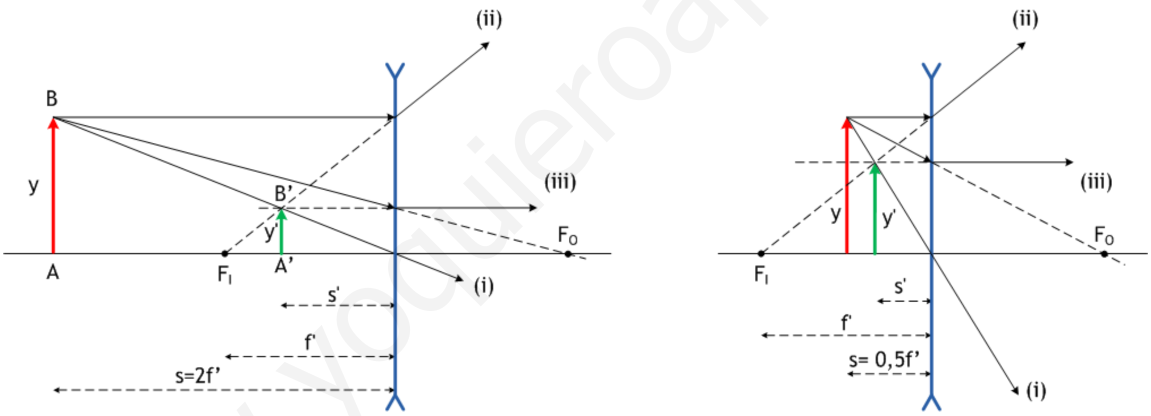
prediciendo una imagen **virtual**, pues s' tiene el mismo signo que f' y es, por tanto, negativa: a la izquierda de la lente, donde se ha de formar con las prolongaciones de los rayos desviados en la lente; dentro de la distancia focal de la lente y **derecha** y de **menor tamaño** que el objeto.

b) Del mismo modo, cuando $s=\frac{1}{2}f'$, las cuentas son

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'}-\frac{1}{f'/2}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{s'}=\frac{3}{f'} \Rightarrow s'=\frac{\mathbf{f'}}{\mathbf{3}} \quad ; \quad \frac{y}{y'}=\frac{s}{s'} \Rightarrow \frac{y}{y'}=\frac{f'/2}{f'/3}=\frac{3}{2} \Rightarrow y'=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{y}$$

e indican una imagen otra vez **virtual**, más cercana a la lente que el objeto, **derecha** y de **menor tamaño** que el objeto.

La construcción geométrica confirma, en ambos casos, los cálculos teóricos:



En ambas imágenes se emplean los rayos (i), que pasa por el centro de la lente sin desviarse; (ii), paralelo al eje y que se refracta de modo que su prolongación pasa por el foco imagen F_I y (iii), dirigido hacia el foco objeto F_O y que se desvía en la dirección del eje.

Junio 07

C3.– Una superficie plana separa dos medios de índices de refracción distintos n_1 y n_2. Un rayo de luz incide desde el medio de índice n_1. Razone si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

- **a) El ángulo de incidencia es mayor que el ángulo de reflexión.**
- **b) Los ángulos de incidencia y de refracción son siempre iguales.**
- **c) El rayo incidente, el reflejado y el refractado están en el mismo plano.**
- **d) Si $n_1 > n_2$ se produce reflexión total para cualquier ángulo de incidencia.**

Véase la teoría. También **Junio 00 C4**, **Junio 01 C4**, **Septiembre 04 C3**, entre otros.
Sol.– a) Falso; b) Falso; c) Cierto; d) Falso

JUNIO 07

A2.– Una lente convergente forma, de un objeto real, una imagen también real, invertida y aumentada 4 veces. Al desplazar el objeto 3 cm hacia la lente, la imagen que se obtiene es virtual, derecha y con el mismo aumento en valor absoluto. Determine:
a) La distancia focal imagen y la potencia de la lente.
b) Las distancias del objeto a la lente en los dos casos citados.
c) Las respectivas distancias imagen.
d) Las construcciones geométricas correspondientes.

a) En la posición inicial, s_1, el objeto de tamaño y forma una imagen invertida y cuatro veces mayor: si y_1' es el tamaño de la imagen, entonces nos están diciendo que $y_1' = -4y$ (el signo – es preciso por ser imagen invertida). Apelando a la fórmula para el aumento lateral,

$$\frac{y_1'}{y} = \frac{s_1'}{s_1} \quad \Rightarrow \quad -4 = \frac{s_1'}{s_1} \quad \Rightarrow \quad s_1' = -4\,s_1 \qquad (1)$$

tenemos la relación entre las distancias objeto s_1 e imagen s_1': nótese que son de signo contrario, así que, siendo $s_1 < 0$, parece claro que $s_1' > 0$ y, por tanto, la imagen aparece a la derecha de la lente, donde debe ser real.

Si desplazamos el objeto 3 cm hacia la lente, pasa a tener una distancia objeto $\qquad s_2 = s_1 + 3 \qquad (2)$

igualdad en la que debe tenerse presente que s_1 y s_2 son cantidades negativas, y que s_2 debe ser menor en valor absoluto, pues el objeto está ahora más cerca de la lente. Como nos dicen que ahora la imagen es derecha y cuatro veces mayor que el objeto, entendemos que deber ser $y_2' = 4y$, donde y_2' es el tamaño de la nueva imagen. De nuevo la fórmula del aumento lateral para comprobar que

$$\frac{y_2'}{y} = \frac{s_2'}{s_1} \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{s_2'}{s_2} \quad \Rightarrow \quad s_2' = 4\,s_2 \qquad (3)$$

Nótese que ahora s_2' es negativa, igual que s_2, de modo que la nueva imagen se forma a la izquierda de la lente, donde debe hacerlo con las prolongaciones de los rayos difractados por la lente; por eso la imagen es ahora virtual.

A continuación podemos emplear la ecuación de las lentes delgadas en ambos casos, teniendo en consideración los resultados de (1), (2) y (3):

Para la 1ª imagen $\qquad \dfrac{1}{s_1'} - \dfrac{1}{s_1} = \dfrac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{-4s_1} - \dfrac{1}{s_1} = \dfrac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{5}{4s_1} = \dfrac{1}{f'} \qquad (4)$

Para la 2ª imagen $\qquad \dfrac{1}{s_2'} - \dfrac{1}{s_2} = \dfrac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{4s_2} - \dfrac{1}{s_2} = \dfrac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{3}{4s_2} = -\dfrac{3}{4(s_1+3)} = \dfrac{1}{f'} \qquad (5)$

De estas dos igualdades, ya que el segundo miembro es el mismo, podemos obtener:

$$-\frac{5}{4s_1} = -\frac{3}{4(s_1+3)} \quad \Rightarrow \quad 5(s_1+3) = 3s_1 \quad \Rightarrow \quad s_1 = -7{,}5 \text{ cm}$$

y, llevando este valor a (4), la distancia focal: $\quad -\dfrac{5}{4s_1} = \dfrac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{5}{-30} = \dfrac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = \mathbf{6\ cm}$

e inmediatamente la potencia de la lente: $\quad P = \dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{0{,}06 \text{ m}} = \mathbf{+16{,}67\ dioptrías}$

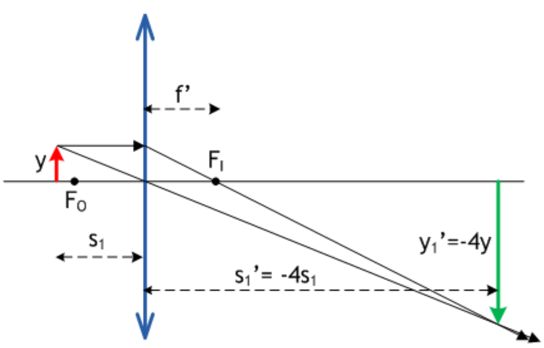
b) Ya conocemos la primera de las distancias objeto, $\qquad s_1 = \mathbf{-7{,}5\ cm}$
y la otra se obtiene de inmediato de (2): $\qquad s_2 = s_1 + 3 = -7{,}5+3 = \mathbf{-4{,}5\ cm}$

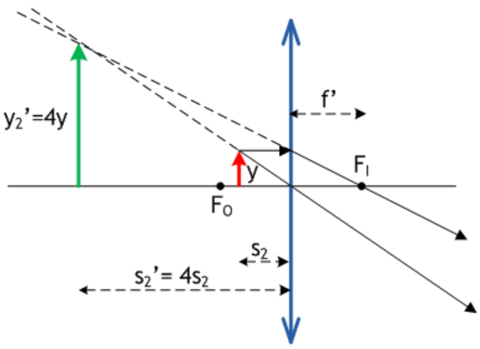
c) Conocidas las distancias objeto, las distancias imagen se obtienen de (1) y de (3):

de (1) $\qquad s_1' = -4\,s_1 \quad \Rightarrow \quad s_1' = -4(-7{,}5) = \mathbf{30\ cm}$

de (3) $\qquad s_2' = 4\,s_2 = 4\,(s_1+3) \quad \Rightarrow \quad s_2' = 4(-4{,}5) = \mathbf{-18\ cm}$

d) y quedan finalmente las construcciones geométricas correspondientes a ambos casos:





SEPTIEMBRE 07

C3.– Una lente convergente tiene una distancia focal de 20 cm. Calcule la posición y aumento de la imagen que produce dicha lente para un objeto que se encuentra delante de ella a las siguientes distancias: a) 50 cm; b) 15 cm. Realice el trazado de rayos en ambos casos.

Sol.– a) 33,33 cm detrás de la lente; real, invertida y de menor tamaño, en proporción 2/3;
b) 60 cm delante de la lente; virtual, derecha y cuatro veces mayor.

SEPTIEMBRE 07

B1.– Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de 10 cm.

a) Determine la posición y el tamaño de la imagen de un objeto de 5 cm de altura que se encuentra frente al mismo, a la distancia de 15 cm. ¿Cómo es la imagen obtenida? Efectúe la construcción geométrica de dicha imagen.

b) Un segundo objeto de 1 cm de altura se sitúa delante del espejo, de manera que su imagen es del mismo tipo y tiene el mismo tamaño que la imagen del objeto anterior. Determine la posición que tiene el segundo objeto respecto al espejo.

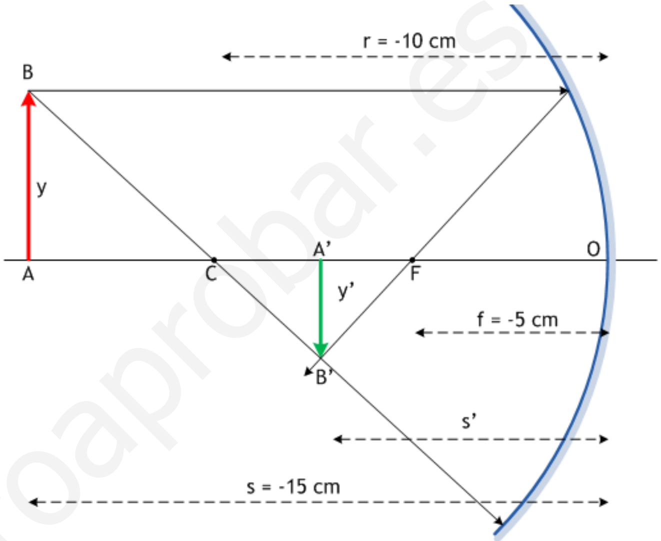
a) Esto es una sencilla construcción de la imagen en un espejo cóncavo, cuando el objeto está más allá del centro de curvatura del espejo. La construcción geométrica muestra dos rayos típicos que salen de B, se reflejan de acuerdo con las reglas bien conocidas y se encuentran en B'. La imagen resulta **real**, **invertida** y de **menor tamaño**, como puede verse. Los cálculos son también sencillos: la distancia imagen se obtiene de

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-15}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-5} \quad \Rightarrow \quad s' = \mathbf{-7{,}5\ cm}$$

es decir, en el punto medio entre el foco y el centro de curvatura del espejo. El tamaño de la imagen se sigue de

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{5}=-\frac{-7{,}5}{-15}=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \mathbf{-2{,}5\ cm}$$

y resulta la mitad del objeto.



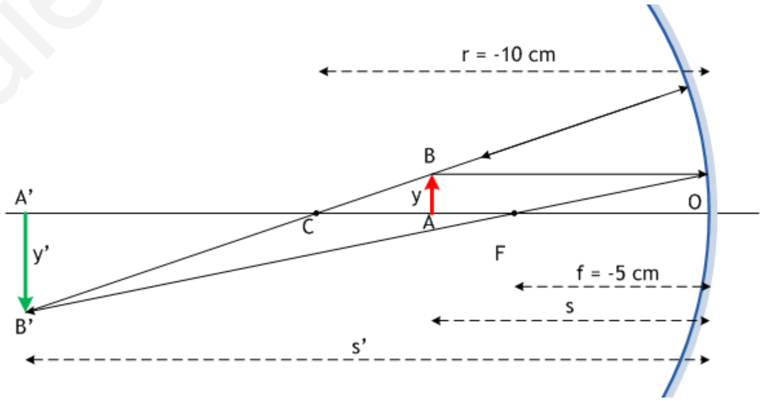
b) El segundo objeto ha de tener, pues, imagen **real**, **invertida** y su tamaño ha de ser −2,5 cm. Estas condiciones nos permiten hallar una condición que han de cumplir s y s':

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{-2{,}5}{1}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad s'=\frac{5}{2}s$$

que, llevada a la ecuación de los espejos esféricos, implica que

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{\frac{5}{2}s}=\frac{1}{-5} \quad \Rightarrow \quad s = \mathbf{-7\ cm}$$

el objeto debe ser colocado 7 cm delante del espejo, entre el foco y el centro del mismo. Además, tenemos de inmediato la distancia imagen:



$$s'=\frac{5}{2}s=-\frac{35}{2}\ \text{cm}=-17{,}5\ \text{cm}$$

MODELO 2008

C3.– a) ¿Puede un espejo cóncavo producir una imagen virtual, derecha y menor que el objeto?
b) ¿Puede una lente convergente producir una imagen real, invertida y mayor que el objeto?
Justifique la respuesta en cada caso mediante un diagrama de rayos.

Véase la teoría

MODELO 08

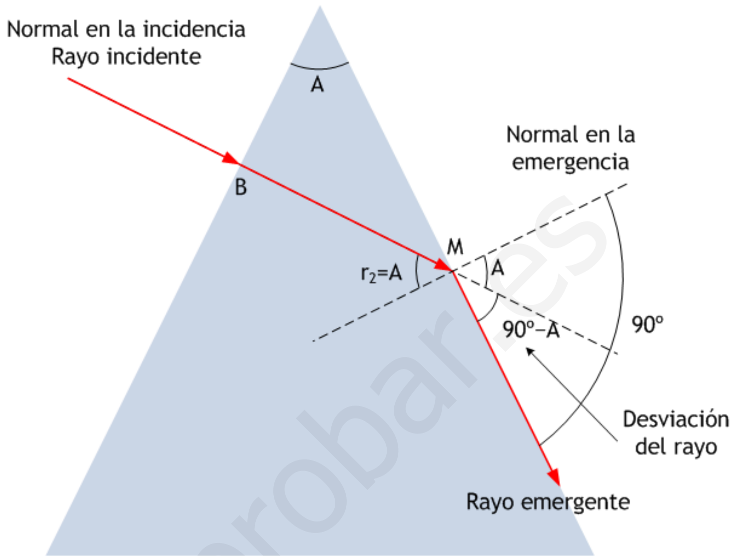
A2.– Se construye un prisma óptico de ángulo A con un vidrio de índice de refracción n = $\sqrt{2}$. Sabiendo que el rayo que incide perpendicularmente en la primera cara lateral del prisma tiene un ángulo de emergencia de 90º en la segunda cara lateral y que el prisma está inmerso en el aire, determine:

a) El ángulo A del prisma.

b) El valor del ángulo de desviación mínima.

Dibuje la marcha del rayo en ambos casos.

Un problema interesante, por poco usual. La trayectoria del rayo que nos proponen es extrema, en el sentido de que en la emergencia, donde puede existir **reflexión total**, estamos justo en el límite de ésta. Dicho de otro modo, el ángulo de incidencia en la segunda refracción, al salir del vidrio al aire, es el **ángulo límite**. Además, el rayo incidente llega en la dirección de la normal en el punto de incidencia, de modo que el ángulo de incidencia en esta primera refracción, del aire al vidrio, es $i_1 = 0$.



Todas estas circunstancias, y otras de interés, se pueden ver en la figura, que muestra la marcha del rayo:

1) Incide normalmente en la cara izquierda del prisma, en B. No se desvía, como sabemos, así que recorre el interior del prisma, entre B y M, sin cambio de dirección.

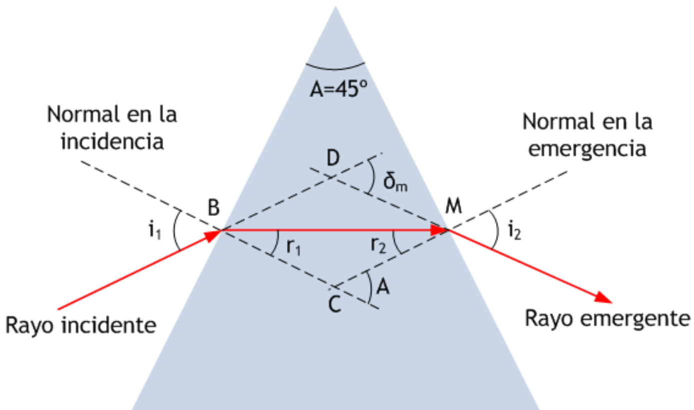
2) En M se produce la refracción del vidrio al aire. Observando la figura, puede verse que las dos normales, dibujadas en línea de puntos, se cortan en M, y forman un ángulo A, el del prisma. Pues bien, el ángulo de incidencia del rayo en M es también igual a A (opuestos por el vértice). El ángulo de emergencia es de 90°, como se nos ha dicho: el rayo emerge **tangente a la cara del prisma**. Nótese también que la desviación del rayo es 90°–A, por simple observación de la figura.

a) Aplicando entonces la ley de Snell a esta segunda refracción, nos queda:

$$n.\text{sen } A = 1.\text{sen } 90^\circ = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{sen } A = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

de donde se sigue inmediatamente que A = **45º = π/4 rad**. Esto responde a la primera cuestión.

b) Para la segunda, hemos de considerar un rayo de trayectoria diferente. Como sabemos, la desviación mínima δ_m al atravesar un prisma se consigue cuando el camino del rayo dentro del prisma es paralelo a su base o, con más propiedad, simétrico con respecto a las caras del prisma. Dicho aún de otro modo, BM tiene que ser horizontal.



La figura muestra, entonces, cómo tienen que ir las cosas ahora. El supuesto de desviación mínima es un caso particularmente sencillo, porque se cumplen las igualdades

$i_1 = i_2$ (ángulos de incidencia y emergencia iguales)

$r_1 = r_2$ (camino del rayo simétrico en el prisma)

así que la figura tiene una simetría total izquierda-derecha. Además, la observación de la figura permite hallar con facilidad r_1, puesto que

$$A = 45^\circ = r_1 + r_2 = 2r_1 \qquad \Rightarrow \qquad r_1 = 22{,}5^\circ$$

Y, aplicando la ley de Snell en la refracción que sucede en B (o en M, da igual), tenemos

$$1.\text{sen } i_1 = n.\text{sen } r_1 = \sqrt{2}\,.\,\text{sen } 22{,}5^\circ$$

es decir, $\text{sen } i_1 = 0{,}541 \qquad \Rightarrow \qquad i_1 = 32{,}77^\circ$

Recordando ahora la expresión para la desviación, en este caso mínima, del rayo, tenemos

$$\delta_m = i_1 + i_2 - 45^\circ = 2i_1 - 45^\circ = \mathbf{20{,}53^\circ = 0{,}36\ rad}$$

JUNIO 08

C3.– Una lámina de vidrio (índice de refracción n = 1,52) de caras planas y paralelas y espesor d se encuentra entre el aire y el agua. Un rayo de luz monocromática de frecuencia 5.10^{14} Hz incide desde el agua en la lámina. Determine:

a) Las longitudes de onda del rayo en el agua y en el vidrio.

b) El ángulo de incidencia en la primera cara de la lámina a partir del cual se produce reflexión total interna en la segunda cara.

Datos: Índice de refracción del agua, n_{agua} = 1,33; Velocidad de la luz en el vacío, c = 3.10^8 m/s

a) La frecuencia de la luz permanece invariable cuando cambia de medio; no así su velocidad de propagación y su longitud de onda, que se adaptan para cumplir

$$v = \lambda\nu \qquad (1)$$

donde v es la velocidad de propagación en el medio y λ la consiguiente longitud de onda. Los índices de refracción que cita el enunciado se refieren a la luz de la frecuencia indicada, 5.10^4 Hz. Es fácil conocer la velocidad de propagación en el agua y en el vidrio, a partir de los índices de refracción:

$$\text{Agua:} \quad n_{agua} = 1,33 = \frac{c}{v_{agua}} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{v_{agua}} \quad \Rightarrow \quad v_{agua} = \frac{3.10^8}{1,33} = 2,26.10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Vidrio:} \quad n_{vidrio} = 1,52 = \frac{c}{v_{vidrio}} = \frac{3.10^8 \text{ m/s}}{v_{vidrio}} \quad \Rightarrow \quad v_{vidrio} = \frac{3.10^8}{1,52} = 1,97.10^8 \text{ m/s}$$

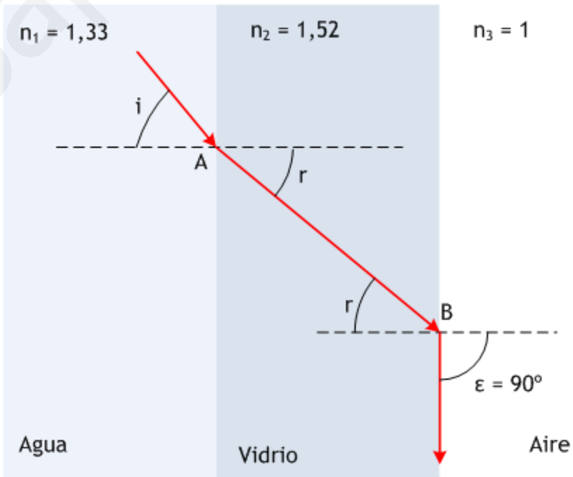
y ahora usaremos (1) para hallar las longitudes de onda:

$$\lambda_{agua} = \frac{v_{agua}}{\nu} = \frac{2,26.10^8 \text{ ms}^{-1}}{5.10^{14} \text{ s}^{-1}} = 4,51.10^{-7} \text{ m} = \mathbf{451\ nm}$$

$$\lambda_{vidrio} = \frac{v_{vidrio}}{\nu} = \frac{1,97.10^8 \text{ ms}^{-1}}{5.10^{14} \text{ s}^{-1}} = 3,95.10^{-7} \text{ m} = \mathbf{395\ nm}$$

mientras que en el vacío (esencialmente, en el aire), como es fácil de comprobar, la longitud de onda correspondiente a esa frecuencia es 600 nm.

b) Esta cuestión incide en la discusión de la marcha de los rayos dentro de la lámina. En la figura puede verse cómo debería ser la incidencia en la primera cara de la lámina, cuando la luz pasa del agua al vidrio, para estar en el comienzo de la reflexión total interna en la segunda cara, cuando la luz va a salir al aire.



En la primera refracción la luz pasa de un medio con índice de refracción más bajo, n_1 = 1,33, a otro con índice refractivo más alto, n_2 = 1,52; por lo tanto, **se acerca a la normal**, tal como muestra la figura: el ángulo r es menor que i. El rayo refractado recorre la distancia AB dentro de la lámina e incide en B con el mismo ángulo r, por razones obvias.

Ahora hemos de imponer la condición mínima de reflexión total interna en esta cara; para ello, el ángulo de emergencia debiera ser ε = 90º, de modo que r sería en realidad el **ángulo límite** del vidrio al aire.

Sólo resta aplicar la ley de Snell en las dos caras de la lámina, en los términos siguientes:

Primera cara: n_1.sen i = n_2.sen r

Segunda cara: n_2.sen r = n_3.sen ε

lo que implica, evidentemente

$$n_1 \operatorname{sen} i = n_3 \operatorname{sen}\varepsilon \quad \Rightarrow \quad 1,33 \text{ sen i} = 1 \text{ sen } 90° \quad \Rightarrow \quad \text{sen i} = \frac{1}{1,33} = 0,7519 \quad \Rightarrow \quad i = \mathbf{48°\,45'12"}$$

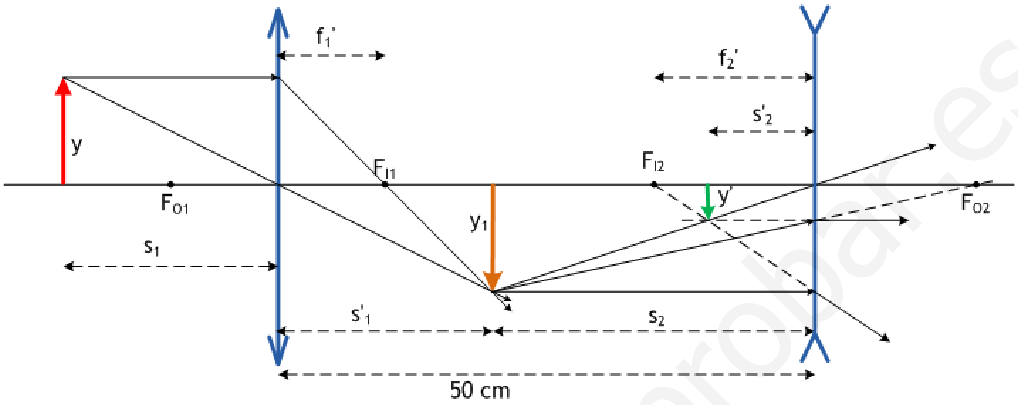
A partir de este ángulo, para valores i ≥ 48º45'12", no existirá emergencia del vidrio al aire, produciéndose reflexión total en la segunda cara de la lámina de vidrio.

JUNIO 08

B1.– Un sistema óptico está formado por dos lentes: la primera es convergente y con distancia focal de 10 cm; la segunda, situada a 50 cm de distancia de la primera, es divergente y con 15 cm de distancia focal. Un objeto de tamaño 5 cm se coloca a una distancia de 20 cm delante de la lente convergente.

a) Obtenga gráficamente mediante el trazado de rayos la imagen que produce el sistema óptico.
b) Calcule la posición de la imagen producida por la primera lente.
c) Calcule la posición de la imagen producida por el sistema óptico.
d) ¿Cuál es el tamaño y la naturaleza de la imagen final formada por el sistema óptico?

a) La figura recoge la formación de las imágenes en ambas lentes; como siempre en estos casos la imagen en la primera lente actúa como objeto en la segunda, para formar en ésta la imagen producida por el sistema óptico. Como es habitual, se emplean rayos que pasan por los centros de las lentes sin desviarse, o que discurren paralelos al eje y se desvían para pasar por el correspondiente foco imagen, o que pasan por el foco objeto correspondiente y se desvían paralelamente al eje del sistema.



b) La posición de la imagen en la primera lente se sigue de la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s_1'}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f_1'} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s_1'}-\frac{1}{-20}=\frac{1}{10} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s_1'}=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20} \quad\Rightarrow\quad s_1'=\mathbf{20\ cm}$$

de acuerdo con lo que puede observarse en la figura. Se trata de una imagen **real**, **invertida** y **del mismo tamaño** que el objeto, como es fácil de comprobar:

$$\frac{y_1}{y}=\frac{s_1'}{s_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{y_1}{y}=\frac{20}{-20} \quad\Rightarrow\quad y_1=-y=\mathbf{-5\ cm}$$

c) Ahora debemos aplicar de nuevo la ley de las lentes, esta vez sobre la segunda lente, de carácter divergente. La distancia objeto es $s_2 = -30$ cm, pues la posición del objeto, imagen de la primera lente, es de 30 cm a la izquierda de la segunda lente. Además, la distancia focal de esta lente es $f_2' = -15$ cm, de acuerdo con los datos. La ecuación se escribe:

$$\frac{1}{s_2'}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f_2'} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s_2'}-\frac{1}{-30}=\frac{1}{-15} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{s_2'}=-\frac{1}{15}-\frac{1}{30}=-\frac{3}{30} \quad\Rightarrow\quad s_2'=\mathbf{-10\ cm}$$

de modo que la imagen aparece a la **izquierda** de la lente, lo que implica que es **virtual**, ya que debe formarse con las prolongaciones de los rayos que se refractan en la segunda lente.

d) Su tamaño resulta

$$\frac{y'}{y_1}=\frac{s_2'}{s_2} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{-5}=\frac{-10}{-30} \quad\Rightarrow\quad y'=\mathbf{-\frac{5}{3}\ cm = -2{,}67\ cm}$$

que concuerda con la figura. Concluimos que es **virtual**, como ya hemos dicho, **invertida** respecto del objeto y de **menor tamaño** que el mismo.

Septiembre 08

C4.– Un microscopio consta de dos lentes convergentes (objetivo y ocular).

a) Explique el papel que desempeña cada lente.

b) Realice un diagrama de rayos que describa el funcionamiento de un microscopio.

Véase la teoría

Modelo 09

C3.– a) Si un objeto se sitúa a una distancia de 2 cm delante de una lente convergente o delante de un espejo cóncavo, ambos de distancia focal 5 cm en valor absoluto, ¿cómo están relacionados los aumentos laterales y las posiciones de las imágenes que la lente y el espejo producen de dicho objeto?

b) Realice el trazado de rayos en ambos casos.

Sol.– a) Ambas imágenes son del mismo tamaño, 5/3 mayor que el tamaño objeto; ambas son virtuales y aparecen a la misma distancia de la lente y del espejo, 3,33 cm, delante de la lente y detrás del espejo.

Modelo 09

B2.– Sobre una lámina de vidrio de caras planas y paralelas de 3 cm de espesor y situada en el aire incide un rayo de luz monocromática con un ángulo de incidencia de 35°. La velocidad de propagación del rayo en la lámina es 2/3 c, siendo c la velocidad de la luz en el vacío.

a) Determine el índice de refracción de la lámina.

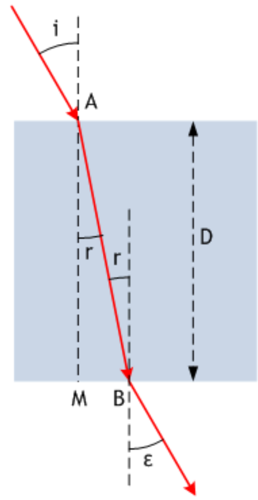
b) Compruebe que el rayo emergerá de la lámina y determine el ángulo de emergencia.

c) Dibuje la marcha del rayo a través de la lámina.

d) Calcule la distancia recorrida por el rayo dentro de la lámina.

a) Inmediato, ya que conocemos la velocidad de propagación de la luz en el medio. El índice de refracción sería

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\frac{2}{3}c} = \frac{3}{2} = \mathbf{1{,}5}$$



b,c) El rayo emergerá de la lámina con ángulo de emergencia igual al de incidencia en la primera cara, como sucede siempre en una lámina de caras planoparalelas. La marcha del rayo, recogida en la figura, muestra cómo se refracta en la primera cara, acercándose a la normal puesto que pasa a un medio más refringente. El ángulo de incidencia en la segunda cara es igual al de refracción en la primera, por razones geométricas obvias. La aplicación de la ley de Snell a ambas refracciones demuestra la igualdad entre los ángulos de incidencia i y emergencia ε:

$$\begin{matrix} \text{primera cara:} & 1\,.\,\text{sen}\,35° = n\,.\,\text{sen}\,r \\ \text{segunda cara:} & n\,.\,\text{sen}\,r = 1\,.\,\text{sen}\,\varepsilon \end{matrix} \;\Rightarrow\; \text{sen}\,35° = \text{sen}\,\varepsilon \;\Rightarrow\; \varepsilon = \mathbf{35°}$$

d) Podemos obtener la distancia AB, recorrido del rayo dentro de la lámina, haciendo unos sencillos cálculos en el triángulo AMB. Empezamos por hallar el ángulo r con la ley de Snell en A:

$$1\,.\,\text{sen}\,35° = n\,.\,\text{sen}\,r \;\Rightarrow\; \text{sen}\,r = \frac{\text{sen}\,35°}{1{,}5} = 0{,}3824 \;\Rightarrow\; r = 22°28'53"$$

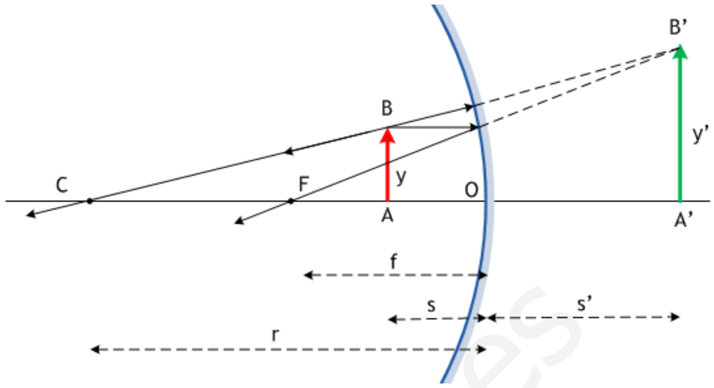
y ahora,
$$\cos r = \frac{AM}{AB} = \frac{D}{AB} \;\Rightarrow\; AB = \frac{D}{\cos r} = \frac{3\text{ cm}}{\cos 22°28'53"} = \mathbf{3{,}25\text{ cm}}$$

JUNIO 09

C3.– a) Explique la posibilidad de obtener una imagen derecha y mayor que el objeto mediante un espejo cóncavo, realizando un esquema con el trazado de rayos. Indique si la imagen es real o virtual.

b) ¿Dónde habría que colocar un objeto frente a un espejo cóncavo de 30 cm de radio para que la imagen sea derecha y de doble tamaño que el objeto?

a) Debemos saber que un espejo cóncavo forma una imagen virtual, derecha y de mayor tamaño cuando el objeto está colocado dentro de la distancia focal del espejo; en cualquier otra situación, la imagen resulta real, invertida y puede tener tamaño mayor o menor que el objeto, dependiendo de la distancia al espejo. Es claro, pues, que el objeto debe colocarse **dentro de la distancia focal** para cumplir las condiciones del enunciado. La figura muestra la marcha de los rayos que forman la imagen descrita.



b) La ecuación de formación de imágenes en un espejo esférico, junto a la fórmula del aumento lateral, responden a esta cuestión:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad ; \quad \frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}$$

donde f = –15 cm, la mitad del radio de curvatura y el signo de acuerdo al criterio de signos habitual. Naturalmente, suponemos s < 0, el objeto a la izquierda del espejo; como la imagen debe ser derecha y su tamaño doble que el objeto, será preciso que y' = 2y. Llevando esto al aumento lateral:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{2y}{y}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad s'=-2s$$

Por tanto, $$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{-2s}=\frac{1}{-15} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2s}=-\frac{1}{15} \quad \Rightarrow \quad s=\mathbf{-7{,}5\ cm}$$

y tenemos la respuesta: el objeto debe situarse a mitad de camino entre el foco y el espejo.

SEPTIEMBRE 09

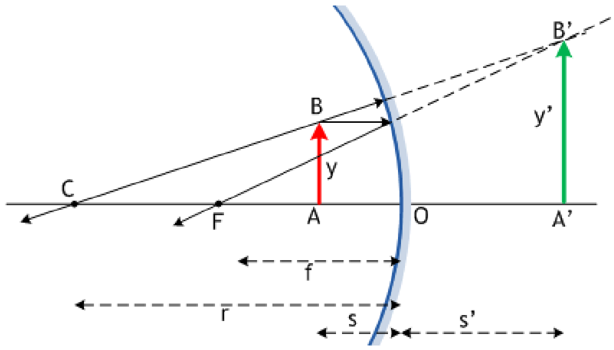
C3.– La distancia focal de un espejo esférico es de 20 cm en valor absoluto. Si se coloca un objeto delante del espejo a una distancia de 10 cm de él, determine la posición y la naturaleza de la imagen formada en los dos casos siguientes:

a) El espejo es cóncavo.

b) El espejo es convexo.

Efectúe la construcción geométrica de la imagen en ambos casos.

a) La distancia focal es negativa, f = –20 cm. También lo es la distancia objeto, s = –10 cm, y su valor muestra que el objeto está dentro de la distancia focal. Su imagen será, por tanto, **virtual**, **derecha,** y de **mayor tamaño** que el objeto. Los cálculos son sencillos:

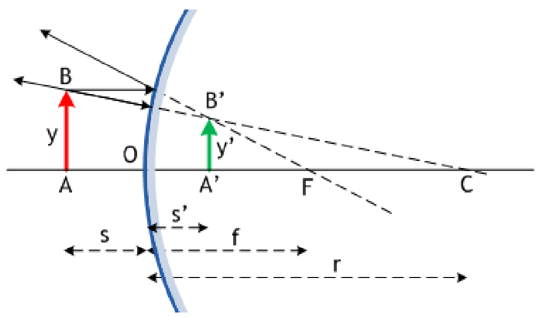


$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-10}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{-20} \quad \Rightarrow \quad s'=\mathbf{20\ cm}$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y}=-\frac{20}{-10} \quad \Rightarrow \quad y'=\mathbf{2y}$$

y concluyen lo que adelantábamos: la imagen se forma a la derecha del espejo — **virtual**, por tanto —, es **derecha** y de **doble tamaño** que el objeto.

b) Ahora la distancia focal es positiva, f = 20 cm; la distancia objeto sigue siendo s = –10 cm. Un espejo convexo forma imagen **virtual**, **derecha** y de **menor tamaño**. Los cálculos son simples e inmediatos:



$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-10}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad s'=\frac{20}{3}=\mathbf{6{,}67\ cm}$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y}=-\frac{20/3}{-10} \quad \Rightarrow \quad y'=\mathbf{\frac{2}{3}y}$$

y de nuevo acuerdan con lo previsto: la imagen se forma a la derecha, **virtual;** es **derecha** y de **menor tamaño**.

SEPTIEMBRE 09

A1.– Un rayo de luz roja que se propaga en el aire tiene una longitud de onda de 650 nm. Al incidir sobre la superficie de separación de un medio trasparente y penetrar en él, la longitud de onda pasa a ser de 500 nm.

- **a) Calcule la frecuencia de la luz roja.**
- **b) Calcule el índice de refracción del medio transparente para la luz roja.**
- **c) Si el rayo incide desde el aire con un ángulo de 30º respecto a la normal, ¿cuál será el ángulo de refracción en el medio transparente?**
- **d) Si el rayo se propagara por el medio transparente en dirección hacia el aire, ¿cuál sería el ángulo de incidencia a partir del cual no se produce refracción?.**

Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3.10^8$ m/s

a) Podemos hallar la frecuencia de la luz roja a partir de su longitud de onda en el vacío, empleando

$$c = \lambda\,\nu \quad\Rightarrow\quad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8\ \mathrm{m/s}}{650.10^{-9}\ \mathrm{m}} = \mathbf{4{,}62.10^{14}\ Hz}$$

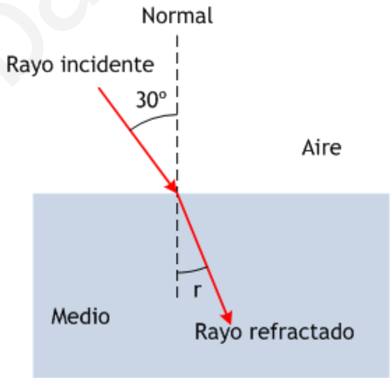
y debemos tener presente que esta frecuencia es característica de la luz roja, independientemente del medio en que se propague. Cuando la luz cambia de medio, cambia su velocidad de propagación y también su longitud de onda, pero se mantiene invariable su frecuencia.

b) En el medio transparente, por tanto, la velocidad de la luz roja será v < c. Conociendo su longitud de onda en este medio, $\lambda' = 500$ nm, podemos hallar la velocidad de propagación:

$$v = \lambda'\nu \quad\Rightarrow\quad v = 500.10^{-9}\ \mathrm{m}\ .\ 4{,}62.10^{14}\ \mathrm{Hz} = 2{,}31.10^8\ \mathrm{m/s}$$

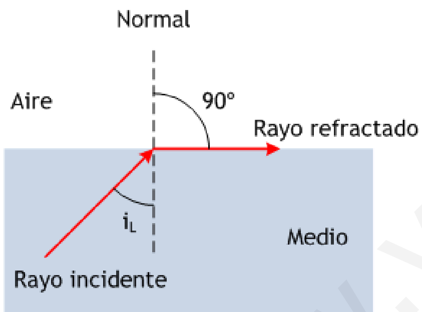
e inmediatamente el índice de refracción:

$$n_{medio} = \frac{c}{v} = \frac{3.10^8\ \mathrm{m/s}}{2{,}31.10^8\ \mathrm{m/s}} = \mathbf{1{,}3}$$



c) Esta vez se trata de una sencilla aplicación de la ley de Snell, tomando el índice de refracción del aire igual a 1, como si se tratase del vacío. Quedaría

$$1.\mathrm{sen}\ 30^\circ = n_{medio}.\mathrm{sen}\ r \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sen}\ r = \frac{0{,}5}{1{,}3} = 0{,}3846 \quad\Rightarrow\quad r = \mathbf{22^\circ 37'12''}$$



d) Finalmente, imaginamos el rayo propagándose desde el medio transparente hacia el aire: como se pasa de un medio más refringente ($n_{medio} = 1{,}3$) a otro menos refringente ($n_{aire} = 1$), puede darse una situación de reflexión total si el rayo incide sobre la superficie de separación con un ángulo mayor o igual que el ángulo límite i_L correspondiente. Para ese valor i_L el ángulo de refracción es, como sabemos, 90º y, de acuerdo con la ley de Snell, pondríamos

$$n_{medio}\ .\ \mathrm{sen}\, i_L = 1\ .\ \mathrm{sen}\,90^\circ = 1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sen}\ i_L = \frac{1}{1{,}3} = 0{,}7692$$

es decir, $i_L =$ **50º17'6"**

MODELO 10

OPCIÓN A C2.– Se dispone de una lente convergente de distancia focal 20 cm. Determine la posición y la naturaleza de la imagen formada por la lente si el objeto está situado, delante de ella, a las siguientes distancias: a) 50 cm; b) 15 cm. Realice el trazado de rayos en ambos casos.

Sol.– a) 33,33 cm detrás de la lente; real, invertida y 2/3 menor que el objeto;
b) 60 cm delante de la lente; virtual, derecha y cuatro veces mayor que el objeto.