Examen de Matem§ticas 2º de Bachillerato

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Problema 2 *(2 puntos)* Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \ \ ; \ \ C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

1. (2 puntos) Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

2. (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Problema 4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

1. (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abcisa positiva de la gráfica de f.

2. (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

Problema 1

Solución:
Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\left\{\begin{array}{lll} x-14= & 5(& y+z-28)\\ x+10= & & y+z+20\\ x-42= & & y-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126=0\\ x- & y- & z- & 10=0\\ x- & y+ & z- & 42=0 \end{array}\right.$$

Multiplicamos la 2ª ecuación por -5 y la sumamos a la 1ª:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126=0\\ -5x+ & 5y+ & 5z+ & 50=0 \end{array}\right. \Longrightarrow -4x+176=0 \Longrightarrow x=44$$

Ahora por simple sustitución en la 2ª y la 3ª nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{rr} y+z= & 34\\ y-z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=18\\ z=16 \end{array}\right.$$

Problema 2

Solución:

$$A=\left[\begin{array}{rrrr} 2 & 0 & a & 2\\ -1 & 0 & -1 & 3\\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 0 & a\\ -1 & 0 & -1\\ 5 & a+4 & -4 \end{array}\right)\quad A_2=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 5 & a+4 & -3 \end{array}\right)$$

$$A_3=\left(\begin{array}{rrr} 2 & a & 2\\ -1 & -1 & 3\\ 5 & -4 & -3 \end{array}\right)\quad A_4=\left(\begin{array}{rrr} 0 & a & 2\\ 0 & -1 & 3\\ a+4 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

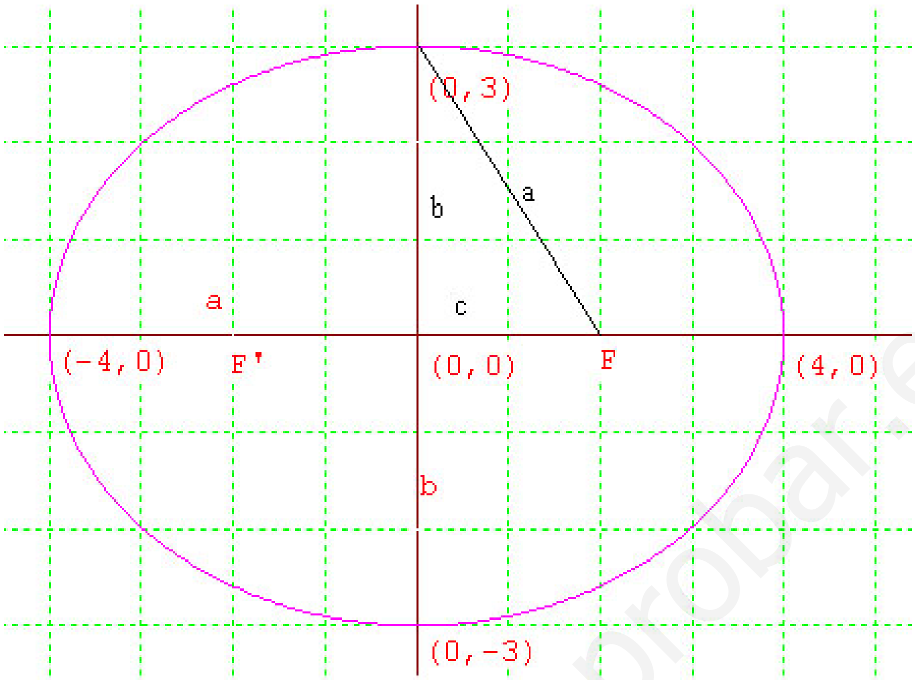
Calculamos sus determinantes:
$|A_1|=-(a+4)(a-2)=0 \Longrightarrow\ a=-4\ \ a=2$
$|A_2|=8(a+4)=0 \Longrightarrow\ a=-4$
$|A_3|=12a+48=0 \Longrightarrow\ a=-4$
$|A_4|=(a+4)(3a+2)=0 \Longrightarrow\ a=-4\ \ a=-\frac{2}{3}$ El único valor de a que anula todos los determinantes es $a=-4$. Además tenemos que $\left|\begin{array}{rr} 2 & 2\\ -1 & 3 \end{array}\right| \neq 0$.
Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:
Si $a=-4$ el rango de A es 2
Si $a\neq -4$ el rango de A es 3

Problema 3

Solución:

a) $C_1: 9x^2+16y^2=144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9}+\frac{y^2}{144/16}=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a=4$ y semieje menor $b=3$.
Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2+c^2=a^2 \Longrightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.
Su excentricidad será: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.
Podemos concluir:

- Focos: $F'(-\sqrt{7},0)$ $F(\sqrt{7},0)$
- Vértices: $(-4,0)$ $(0,3)$ $(0,-3)$ $(4,0)$
- Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$
- Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.



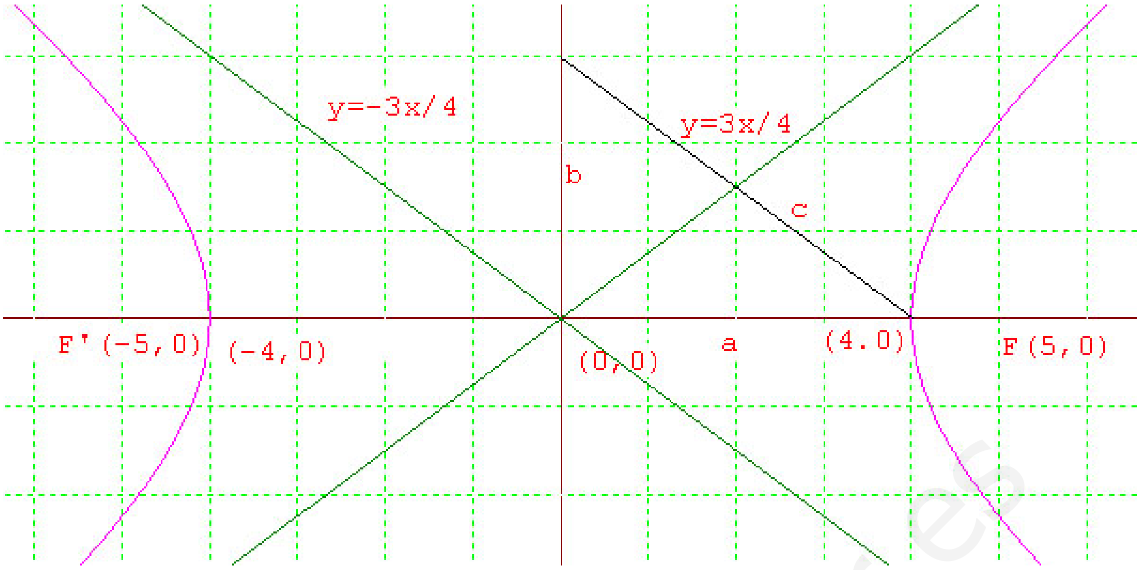
$C_2: 9x^2-16y^2=144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9}-\frac{y^2}{144/16}=1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a=4$, y $b=3$, y se encuentra centrada en el origen.
Para calcular los focos $a^2+b^2=c^2 \Longrightarrow c=\sqrt{16+9}=5$
Para calcular la excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$
Las pendientes de las asíntotas serían: $m=\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$ y $m'=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{4}$
Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0,0)$ las rectas buscadas serían:

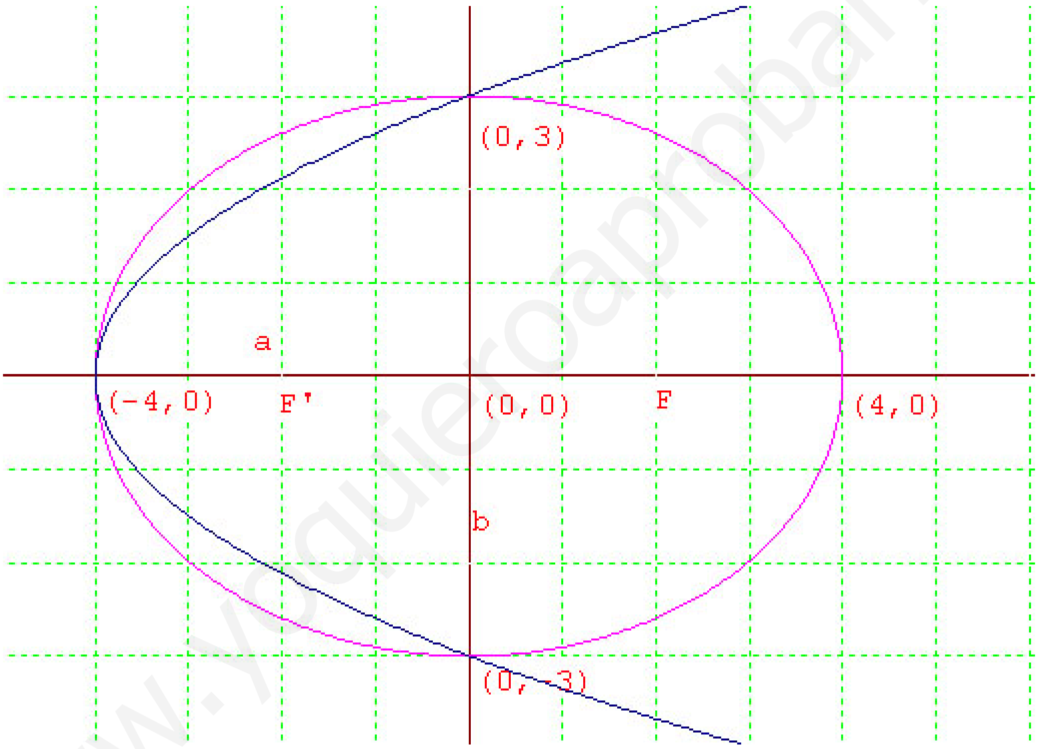
$$y=\frac{3}{4}x \quad ; \quad y=-\frac{3}{4}x$$

Podemos concluir:

- Focos: $(-5,0)$ $(5,0)$
- Vértices: $(-4,0)$ $(4,0)$
- Excentricidad: $e=\frac{5}{4}$
- Asíntotas:
$$y=\frac{3}{4}x \quad ; \quad y=-\frac{3}{4}x$$

b) La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abcisas y simétrica respecto a este eje es $x=ay^2+by+c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.





Como pasa por el vértice $(-4,0), (0,3), (0,-3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:

$$\left\{\begin{array}{rlll} -4 = & & & c \\ 0 = & 9a+ & 3b+ & c \\ 0 = & 9a- & 3b+ & c \end{array}\right. \Longrightarrow c = -4,\ a = \frac{4}{9}\ y\ b = 0 \Longrightarrow x = \frac{4}{9}y^2 - 4$$

Problema 4

Solución:

a) Para encontrar los puntos de inflexión tendremos que ver los puntos en los que se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

Es decir, tenemos que calcular los puntos que hacen $f''(x) = 0$. Como el denominador $(x^2+3)^3$ no se anula nunca, los puntos buscados son aquellos que anulen el numerador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, de estas dos soluciones sólo nos interesa la positiva, que es la que nos pide el problema. Sisutituimos este punto en la función obtendremos la ordenada correspondiente: $f(1) = \frac{1}{4}$, luego la recta pedida pasará por el punto $(1, \frac{1}{4})$. Para encontrar la pediente utilizamos la primera derivada $m = f'(1) = -\frac{1}{8}$ En conclusión, la recta tangente será:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1) \Longrightarrow x + 8y - 3 = 0$$

b) El recinto pedido se calcularía mediante la integral siguiente:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx$$

Calculamos la integral

$$\int \frac{1}{x^2+3}\, dx = \int \frac{dx}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

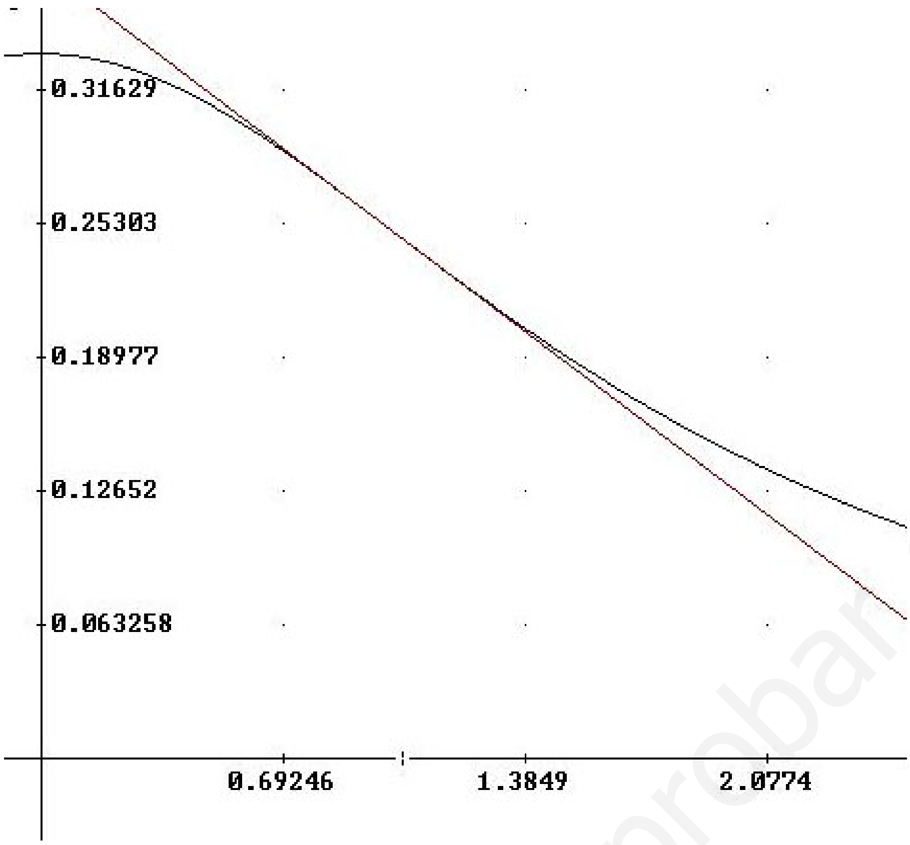
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan t = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$$

Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x}{\sqrt{3}} = t \quad dx = \sqrt{3}dt$

Luego:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx = \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16} - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$


0.31629
0.25303
0.18977
0.12652
0.063258
0.69246
1.3849
2.0774