1. Resuelve:

$$cos^2\frac{x}{2} + cosx - \frac{1}{2} = 0$$

(1,5 puntos)

2. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica:

$$sen2\alpha.cos\alpha - sen\alpha.cos2\alpha = sen\alpha$$

(1,5 puntos)

3. Si $cos\alpha = -\frac{1}{4}\ y\ \alpha < \pi$, halla:

$$a)sen\alpha \qquad b)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) \qquad c)tg\frac{\alpha}{2} \qquad d)sen(\frac{\pi}{6} - \alpha)$$

(1 punto)

4. Desde un punto del suelo medimos el ángulo bajo el que se ve un edificio y obtenemos 40º. Nos alejamos 30 m y el ángulo es ahora de 28º. Calcula la altura del edificio y la distancia desde la que se hizo la primera observación. (1,5 puntos)

5. Resuelve $z^2 - 10\,z + 29 = 0$ (1,5 puntos)

6. Halla el lado del triángulo cuyos vértices son los afijos de las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} - 4i$.

(1,5 puntos)

7. Efectúa y representa la solución:

$$\frac{(3-2i)^2 - (1+i).(2-i)}{-3+i}$$

(1,5 puntos)

1) $\cos^2\frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0$ Como $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^{\cancel{2}} + \cos x - \frac{1}{2} = 0$; $\frac{1+\cos x}{\cancel{2}} + \frac{2\cos x}{\cancel{2}} - \frac{1}{\cancel{2}} = 0$;

$3\cos x = 0$; $\cos x = 0$; $x = \operatorname{Arc}\cos 0 = \begin{cases} 90^\circ \\ 270^\circ \end{cases} + 360^\circ k, \; k \in \mathbb{Z}$

2) $\operatorname{Sen} 2\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{Sen}\alpha \cdot \cos 2\alpha = \operatorname{Sen}\alpha$.

Como $\begin{cases} \operatorname{Sen} 2\alpha = 2\operatorname{Sen}\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{Sen}^2\alpha \end{cases}$ Sustituimos en el primer miembro de la identidad

$2\operatorname{Sen}\alpha\cos\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{Sen}\alpha(\cos^2\alpha - \operatorname{Sen}^2\alpha) = 2\operatorname{Sen}\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{Sen}\alpha\cos^2\alpha$

$+ \operatorname{sen}^3\alpha = \operatorname{Sen}\alpha\cos^2\alpha + \operatorname{Sen}^3\alpha = \operatorname{Sen}\alpha \cdot (\underbrace{\cos^2\alpha + \operatorname{Sen}^2\alpha}_{1}) =$

$= \operatorname{Sen}\alpha$ (Como queríamos demostrar)

3) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ y $\alpha < \pi \Rightarrow$ Estamos en el 2º cuadrante.

II

a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\operatorname{Sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$;

$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$\operatorname{Sen}\alpha = \sqrt{\frac{15}{16}}$; $\boxed{\operatorname{Sen}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}}$

b) $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)} = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\alpha - \operatorname{Sen}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{Sen}\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} =$

$= -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{45}}{8} = \frac{-1-\sqrt{45}}{8} = \boxed{\frac{-1-3\sqrt{5}}{8}}$

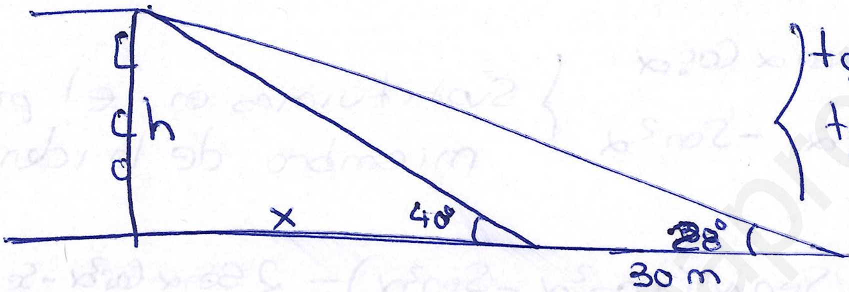
c) $tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \to$ Si $\alpha < \pi \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}$ está en el 1er cuadrante $\Rightarrow tg\alpha > 0$

$$\boxed{tg\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}} = +\sqrt{\frac{5/4}{3/4}} = +\sqrt{5/3} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}$$

d) $\text{Sen}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = \text{Sen}\frac{\pi}{6}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\text{Sen}\,\alpha =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{45}}{8} = \boxed{\frac{-1+3\sqrt{5}}{8}}$$

4)



$$\left\{\begin{array}{l} tg\,40° = \frac{h}{x} \to \boxed{h = x\cdot tg\,40°} \\ tg\,28° = \frac{h}{x+30} \end{array}\right.$$

$tg\,28° = \frac{x\cdot tg\,40°}{x+30}$; $tg\,28°(x+30) = x\,tg\,40°$; $x\,tg\,28° + 30\,tg\,28° = x\,tg\,40°$

$0'53171x + 15'951 = 0'8391x$; $\boxed{x = 51'892\text{ m}}$

$$\boxed{h = 51'892\cdot tg\,40° = 43'543\text{ m}}$$

5) $z^2 - 10z + 29 = 0$.

$$z = \frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 29}}{2} = \frac{10\pm\sqrt{100-116}}{2} = \frac{10\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{10\pm\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}}{2}$$

$$= \frac{10\pm 4i}{2} \begin{cases} \boxed{5+2i = z_1} \\ \boxed{5-2i = z_2} \end{cases}$$

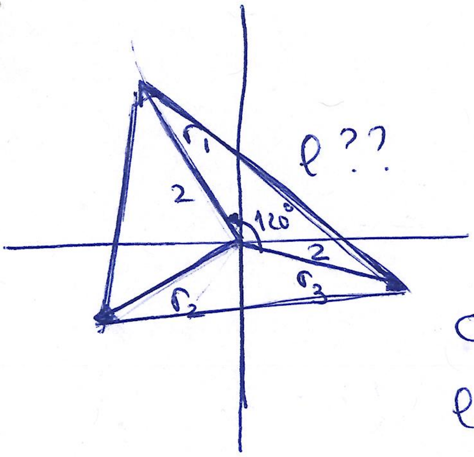
6) $z = 4\sqrt{3} - 4i$

$|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2} = \sqrt{16\cdot 3+16} = \sqrt{64} = 8_{330°}$

$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{-4}{4\sqrt{3}}\right) = 330°$

$|r| = \sqrt[3]{8} = 2$

$\alpha_1 = \frac{330°}{3} = 110°$ $\quad \alpha_2 = \frac{330°}{3} + \frac{360°}{3} = 230°$ $\quad \alpha_3 = \frac{330°}{3} + \frac{360°}{3}\cdot 2 = 350°$



$r_1 = 2_{110^\circ}$

$r_2 = 2_{230^\circ}$

$r_3 = 2_{350^\circ}$

Como el triángulo es equilátero, lo dividimos en tres triángulos iguales cuyo ángulo central es $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

Por el TEOREMA DEL SENO

$\frac{l}{\operatorname{sen} 120^\circ} = \frac{2}{\operatorname{sen} 30^\circ}$; $\boxed{l = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} 120^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 3'46\,m}$

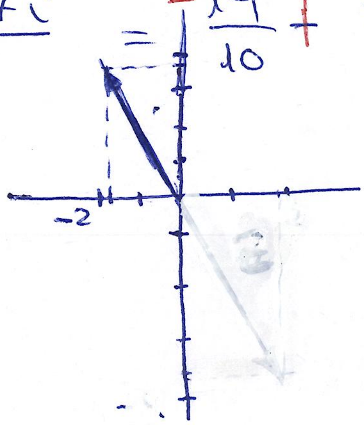
7) $\frac{(3-2i)^2 - (1+i)(2-i)}{-3+i} = \frac{3^2 + (2i)^2 - 2.3.2i - (2 - i + 2i - i^2)}{-3+i} =$

Como $i^2 = -1$

$\frac{9 + 4i^2 - 12i - 2 + i - 2i + i^2}{-3+i} = \frac{9 - 4 - 12i - 2 + i - 2i - 1}{-3+i} =$

$\frac{(2-13i)}{(-3+i)} \cdot \frac{(i+3)}{(i+3)} = \frac{(2-13i)(i+3)}{i^2 - 3^2} = \frac{2i + 6 - 13i^2 - 39i}{-1-9} =$

$= \frac{2i + 6 + 13 - 39i}{-10} = \frac{19 - 37i}{-10} = -\frac{19}{10} + \frac{37}{10} i$



2-