

Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 4 de 1999.

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función logaritmo neperiano $f(x) = \ln(x)$.

(a) [1 punto] Prueba que la función derivada f' es decreciente en todo su dominio.

(b) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x)/x$.

Solución

(a)

$$f(x) = \ln(x).$$

$$f'(x) = 1/x$$

Para que $f'(x)$ sea decreciente su derivada $f''(x)$ tiene que ser < 0 , en todo su dominio, pero

$f''(x) = -1/x^2$, la cual siempre es negativa.

(b)

$$g(x) = f(x)/x = \ln(x)/x.$$

Estudiamos su primera derivada

$$g'(x) = [(1 - \ln(x))/x^2].$$

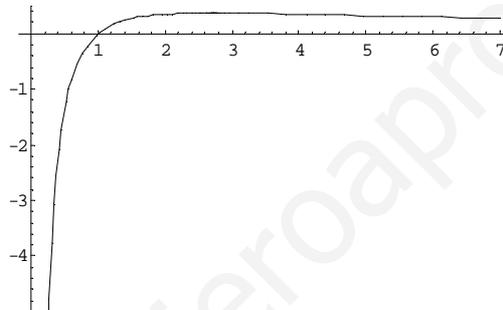
$g'(x) = 0$, nos dá $1 - \ln(x) = 0$, de donde $\ln(x) = 1$, es decir $x = e$.

Como $g'(x) > 0$ si $0 < x < e$, la función $g(x)$ es creciente en $0 < x < e$

Como $g'(x) < 0$ si $x > e$, la función $g(x)$ es decreciente en $x > e$

Por definición en $x = e$ hay un máximo relativo que vale $g(e) = 1/e$

Su gráfica es



Ejercicio 2 de la opción A del modelo 4 de 1999.

[2'5 puntos] Dibuja y calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 - 2x$

Solución

$f(x) = x^2$ es una parábola

$g(x) = x^3 - 2x$, es una cúbica que corta a los ejes en $(0,0)$, $(+\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

Estudiamos $g'(x) = 3x^2 - 2$.

$$g'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \text{ nos da } x = \pm\sqrt{2/3}$$

Como $g'(x) > 0$ si $x < -\sqrt{2/3}$, $g(x)$ es creciente en $x < -\sqrt{2/3}$,

Como $g'(x) < 0$ si $-\sqrt{2/3} < x < +\sqrt{2/3}$, $g(x)$ es decreciente en $-\sqrt{2/3} < x < +\sqrt{2/3}$,

Como $g'(x) > 0$ si $x > +\sqrt{2/3}$, $g(x)$ es creciente en $x > +\sqrt{2/3}$,

Por definición en $x = -\sqrt{2/3}$, hay un máximo relativo y en $x = +\sqrt{2/3}$ hay un mínimo relativo

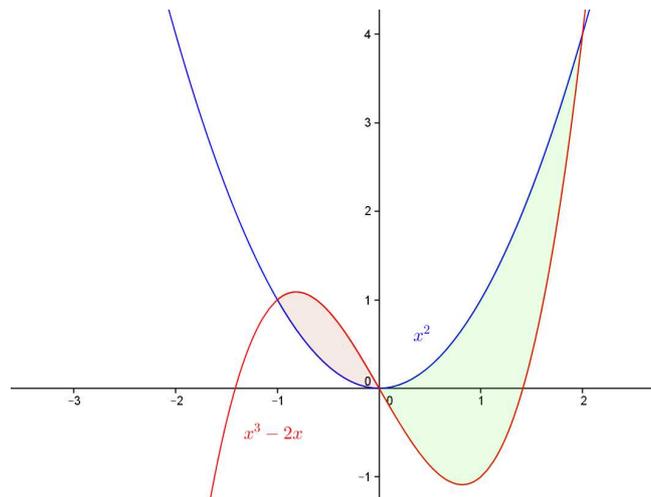
Estudiamos $g''(x) = 6x$

$$g''(x) = 0, \text{ para } x = 0$$

Como $g''(x) < 0$ si $x < 0$, $g(x)$ es cóncava(en Andalucía) si $x < 0$

Como $g''(x) > 0$ si $x > 0$, $g(x)$ es convexa(en Andalucía) si $x > 0$

La gráfica de las dos funciones es



Para determinar el área encerrada por las dos funciones tenemos que calcular los puntos donde coinciden, es decir las soluciones de $f(x) = g(x)$
 $x^3 - 2x = x^2$, de donde $x(x^2 - x - 2) = 0$. Y las soluciones son $x = -1, x = 0$ y $x = 2$, por tanto

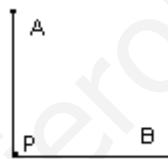
$$\text{Area} = \int_{-1}^0 [(x^3 - 2x) - x^2] dx + \int_0^2 [x^2 - (x^3 - 2x)] dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 =$$

$$= [(0) - (1/4 + 1/3 - 1)] + [(-2^4/4 + 2^3/3 + 2^2) - (0)] = 37/12 \text{ u. a.}$$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 4 de 1999.

[2'5 puntos] Determina y representa el lugar geométrico formado por los puntos $P = (x, y)$ del plano que verifican la siguiente propiedad: El triángulo PAB cuyos vértices son P, $A = (2, 0)$ y $B = (-2, 0)$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en P.

Solución



Si el triángulo APB es rectángulo en P los vectores **PA** y **PB** son perpendiculares, por tanto su producto escalar es cero

PA = $(2-x, -y)$

PB = $(-2-x, -y)$

PA • PB = $(2-x, -y) \cdot (-2-x, -y) = x^2 - 4 + y^2 = 0$, es decir nos sale la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2
 $x^2 + y^2 = 2^2$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 4 de 1999.

La matriz cuadrada X de orden 3 verifica la relación $X^3 + X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Determina si es posible el rango de X.

(b) [1'5 puntos] ¿Verifica alguna de las matrices A y B siguientes la relación del enunciado:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

(a)

$0 \neq \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 = 8 = |X^3 + X| = |X(X^2 + I)| = |X| |(X^2 + I)| \neq 0$, ninguno de los dos números $|X|$, y

$|(X^2 + I)|$ son cero, luego $|X| \neq 0$, y por tanto $\text{rango}(X) = 3$.

(b)

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, la matriz A no puede verificar la relación.

Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, la matriz B puede verificar la relación. Veámoslo

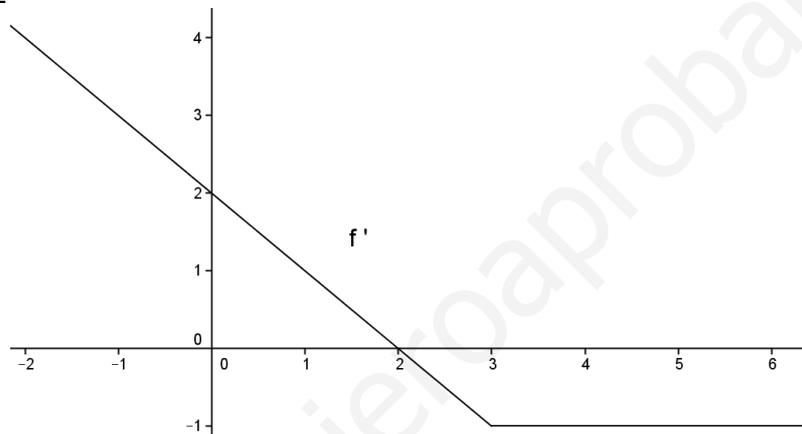
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad B^3 + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz B si verifica la relación

Opción A

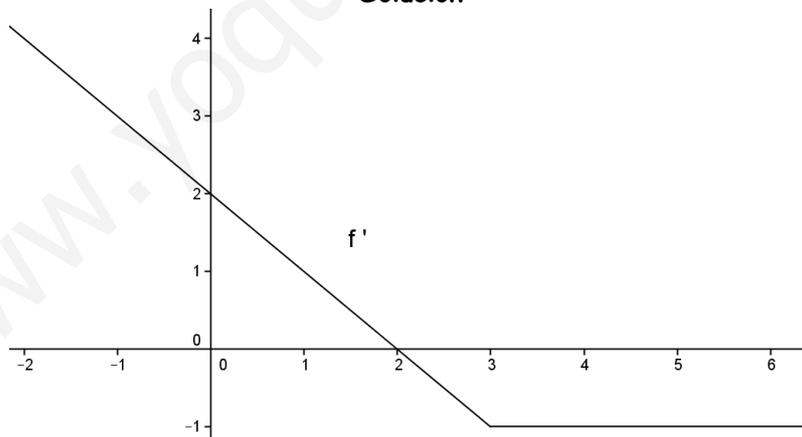
Ejercicio 1 de la opción B del modelo 4 de 1999.

La función derivada de una función derivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por la gráfica de la figura. Además, se sabe que $f(-1) = 9/2$



(a) [2 puntos] Determina una expresión algebraica de f.

Solución



De la gráfica observamos que $f'(x)$ está formada por dos trozos de recta, que pasa por (0,2) y (2,0) y claramente se ve que es la constante $y = -1$ para $x \geq 3$

La ecuación de una recta es $y = mx + n$

Como pasa por (0,2), tenemos $2 = n$

Como pasa por (2,0), tenemos $0 = 2m + 2$, de donde $m = -1$. Luego

$$f'(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 3 \\ -1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Aplicando el teorema fundamental del calculo integral a cada rama tenemos

Si $x < 3$, $f(x) = \int f'(x) dx = \int (-x+2) dx = -x^2/2 + 2x + K$. Como el problema dice que $f(-1) = 9/2$, tenemos que $9/2 = -1/2 - 2 + K$, de donde $K = 7$

Análogamente, si $x > 3$, $f(x) = \int f'(x) dx = \int (-1) dx = -x + K$. Como coinciden en $x = 3$, por ser continua tenemos que

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, es decir

$$-9/2 + 6 + 7 = -3 + K, \text{ de donde } K = 23/2, \text{ y la función pedida es } f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2x + 7 & \text{si } x < 3 \\ -x + 23/2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 4 de 1999.

[2'5 puntos] Calcula una primitiva de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 \sin(x)$ cuya gráfica pase por el origen de coordenadas

Solución

$$F(x) = \int f(x) dx = \int 2x^2 \sin(x) dx = \text{por partes} = I$$

$$x^2 = u; 2x dx = du$$

$$dv = \sin(x) dx; v = \int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

$$F(x) = I = 2 \cdot [x^2 \cdot (-\cos(x)) + \int 2x \cos(x) dx] = 2 \cdot [x^2 \cdot (-\cos(x)) + 2 \int x \cos(x) dx] = 2 \cdot [x^2 \cdot (-\cos(x)) + 2 \cdot I_1]$$

$$I_1 = \int x \cos(x) dx = x \cdot \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x)$$

Habiendo tomado $u = x$ y $dv = \cos(x) dx$. Luego

$$F(x) = 2 \cdot [x^2 \cdot (-\cos(x)) + 2 \cdot I_1] = 2 \cdot [x^2 \cdot (-\cos(x)) + 2 \cdot (x \cdot \sin(x) + \cos(x))] = -2x^2 \cdot \cos(x) + 4x \cdot \sin(x) + 4\cos(x) + K$$

Como $F(0) = 0$, tenemos $0 = 0 + 0 + 4 \cdot 1 + K$, de donde $K = -4$, y la primitiva pedida es

$$F(x) = -2x^2 \cdot \cos(x) + 4x \cdot \sin(x) + 4\cos(x) - 4$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 4 de 1999.

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ m y + z &= 0 \\ x + (1+m)y + mz &= 1+m \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Estudia su comportamiento según los valores del parámetro m .

(b) [2'5 puntos] Resuélvelo para $m = 2$.

Solución

(a)

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ m y + z &= 0 \\ x + (1+m)y + mz &= 1+m \end{aligned}$$

Su matriz de los coeficientes A y su matriz ampliada A^* son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & 1+m \end{pmatrix}$$

si $|A| \neq 0$, el sistema tiene solución única

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = 1(m^2 - 1 - m) - 1(-1) = m^2 - m = m \cdot (m - 1)$$

$|A| = 0$, si y solo si $m = 0$ o $m = 1$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, el sistema tiene solución única.

Si $m = 0$

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ &+ z = 0 \\ x + (1)y + &= 1 \end{aligned}$$

Tomando $y = \lambda$, nos queda $x = 1 - \lambda$, luego la solución es $(x, y, z) = (1 - \lambda, \lambda, 0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $m = 1$

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ &y + z = 0 \end{aligned}$$

$$x + (2)y + z = 2$$

restándole a la tercera la primera obtenemos $y + z = 1$, que junto a la segunda $y + z = 0$ me hacen un sistema incompatible

(b)

Si $m = 2$

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2y + z &= 0 \\ x + (3)y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Resolviéndolo obtenemos $x = 2$, $y = -1$ y $z = 2$.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 4 de 1999.

(a) [2 puntos] ¿Cuál es el punto P de la recta r dada por $r \equiv \begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-4z=1 \end{cases}$, que está mas cerca del punto A $A(2,3,-1)$.

(b) [0'5 puntos] Halla el área del triángulo cuyos vértices son A, P y B $B(1, 0, 0)$

Solución

(a)

El punto P de la recta r que está mas cerca del punto A es el que está en la proyección ortogonal, para lo cual calculamos el plano Π perpendicular a r por el punto A, y hallamos la intersección de dicho plano con la

$$\text{recta } r \equiv \begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-4z=1 \end{cases}$$

Tomando $z = \lambda$

Nos queda la recta

$$x + y = 1 - 2\lambda$$

$$x - 2y = 1 + 4\lambda$$

resolviéndolo obtenemos $x = 1$, e $y = -2\lambda$, por tanto la recta r en vectorial es

$$r \equiv (x,y,z) = (1, -2\lambda, \lambda). \text{ Luego un vector director de r es } \mathbf{v} = (0,-2,1)$$

El plano Π pasa por el punto A(2,3,-1) y tiene como vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{v} = (0,-2,1)$, el director de la recta, luego

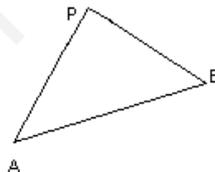
$$\Pi \equiv 0(x-2) - 2(y-3) + 1(z+1) = 0, \text{ de donde } -2y + z + 7 = 0$$

El punto P $= r \cap \Pi$ es

$$-2(-2\lambda) + \lambda + 7 = 0, \text{ de donde } \lambda = -5/7 \text{ y el punto es } P(1, -2(-7/5), -7/5) = P(1, 14/5, -7/5)$$

(b)

$$A(2,3,-1), B(1,0,0), P(1, 14/5, -7/5)$$



El área pedida es $\frac{1}{2} |\mathbf{BP} \times \mathbf{BA}|$

$$\mathbf{BP} = (0, 14/5, -7/5)$$

$$\mathbf{BA} = (1,3,-1)$$

$$\mathbf{BP} \times \mathbf{BA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 14/5 & -7/5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-14/5 + 21/5) - \mathbf{j}(7/5) + \mathbf{k}(-14/5) = (7/5, -7/5, -14/5)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\mathbf{BP} \times \mathbf{BA}| = \frac{1}{2} \cdot (49/25 + 49/25 + 196/25)^{(1/2)} = \sqrt{294/25} \text{ u. a.}$$