

## Opción A

### Ejercicio 1 de la opción A del modelo 3 de 1999.

[2'5 puntos] La función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ , es derivable en el punto  $x = 0$ .

¿Cuánto valen  $b$  y  $c$ ?

(Nota:  $\ln(t)$  es el logaritmo neperiano de  $t$ .)

#### Solución

$$f(x) = \begin{cases} x^2+bx+c & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} 2x+b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como es derivable en  $x = 0$ , existe  $f'(0)$  y además es continua en  $x = 0$

Si existe  $f'(0)$ ,  $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x - (x+1)\ln(x+1) / x^2(x+1)] = [0/0] = \text{aplicamos L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 - \ln(x+1) + 1/x^2 + 2x/(x+1)] = [0/0] = \text{aplicamos L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{-1/(x+1)}{(6x+2)} \right\} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + b) = b$$

Como  $f'(0^+) = f'(0^-)$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ .

Como es continua en  $x = 0$ ,  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + bx + c) = c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(x+1) / x] = [0/0] = \text{aplicamos L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 / (x+1)] = 1$$

De  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , obtenemos  $c = 1$ .

### Ejercicio 2 de la opción A del modelo 3 de 1999.

[2'5 puntos] De las funciones continuas  $f, g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  se sabe que

$$\int_1^2 (f(x)+g(x))dx=3, \quad \int_2^3 (f(x)-g(x))dx=3, \quad \int_1^3 f(x)dx=3, \quad \int_1^2 2f(x)dx=3.$$

Calcula, si es posible,  $\int_1^3 f(x)dx$  y, si no es posible, di por qué.

#### Solución

$$\int_1^2 (f(x)+g(x))dx=3, \quad \int_2^3 (f(x)-g(x))dx=3, \quad \int_1^3 f(x)dx=3, \quad \int_1^2 2f(x)dx=3.$$

$$\int_1^2 (f(x)+g(x))dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 g(x)dx = 3$$

$$\text{De } \int_1^2 2f(x)dx=3, \text{ obtenemos } \int_1^2 f(x)dx=3/2$$

Operando con estas dos expresiones obtenemos

$$\int_1^2 g(x)dx = 3 - 3/2 = 3/2$$

$$\int_2^3 (f(x)-g(x))dx = 3 \int_2^3 f(x)dx - 3 \int_2^3 g(x)dx = 3 \cdot 3/2 - 3 \int_2^3 g(x)dx = 3$$

$$\text{De donde } \int_2^3 g(x)dx = 3/6 = 1/2$$

$$3 = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 3/2 + \int_2^3 f(x)dx$$

$$\text{De donde } \int_2^3 f(x)dx = 3 - 3/2 = 3/2$$

Luego

$$\int_1^3 g(x)dx = \int_1^2 g(x)dx + \int_2^3 g(x)dx = 3/2 + 1/2 = 2$$

### Ejercicio 3 de la opción A del modelo 3 de 1999.

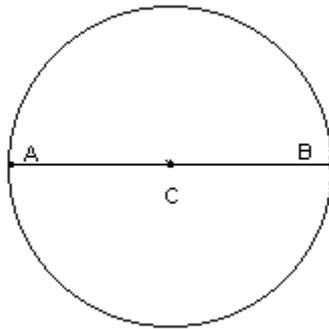
Los puntos  $A = (1, 2)$  y  $B = (5, 6)$  son los extremos de un diámetro de una circunferencia.

(a) [1'5 puntos] Calcula la ecuación de la circunferencia.

(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto A.

#### Solución

(a)



El vector  $\mathbf{AB} = (4,4)$ , su modulo es el diámetro de la circunferencia, luego el radio es la mitad

$$r = \frac{1}{2} |\mathbf{AB}| = \frac{1}{2} (4^2 + 4^2)^{(1/2)} = \sqrt{8}$$

El centro C de la circunferencia es el punto medio del segmento AB, es decir  $C = [(1+5)/2, (2+6)/2] = (3,4)$

La circunferencia pedida es  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8$

(b)

La recta tangente en el punto A es una recta perpendicular al segmento AB que pase por el punto A(1,2)

Un vector perpendicular es  $(-4,4)$ , cambio las coordenadas del vector  $\mathbf{AB} = (4,4)$  de lugar y una de signo, luego la recta pedida es  $(x - 1)/(-4) = (y - 2)/(4)$

#### Ejercicio 4 de la opción A del modelo 3 de 1999.

Se dice que dos matrices A y B son semejantes cuando existe una matriz invertible P tal que  $AP = PB$

Halla a, b, c y d sabiendo que:

(a) [1'5 puntos] Prueba que las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  son semejantes.

(b) [1 punto] Resuelve los sistemas:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

#### Solución

(a)

A y B son semejantes cuando existe una matriz invertible P tal que  $AP = PB$ , luego  $AP - PB = O$ , siendo O la matriz nula.

De  $AP = PB$ ,  $A = PBP^{-1}$

$PP^{-1} = I$ ; de donde  $|P| \cdot |P^{-1}| = 1$

Luego  $|A| = |PBP^{-1}| = |B||P||P^{-1}| = 1 \cdot |B| = |B|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Otra variante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ x & y \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -y \\ 2z & -t \end{pmatrix}$$

Igualando obtenemos

$$x + 2z = 2x$$

$$y + 2t = -y$$

$$x = 2z$$

$$y = -t$$

Tomando  $z = \lambda$ ,  $y = t = \mu$ , nos resulta  $x = 2z = 2\lambda$ , e  $y = -t = -\mu$ , por tanto la matriz P es

$$P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}, \text{ y verifica } AP = PB$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ Igualando}$$

$$x + 2y = 2x$$

$$x = 2y$$

Tomando  $y = \lambda$ , sale  $x = 2\lambda$ . La solución es  $(x,y) = (2\lambda,\lambda)$  con  $\lambda \in \mathfrak{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ Igualando}$$

$$x + 2y = -x$$

$$x = -y$$

Tomando  $y = \lambda$ , sale  $x = -\lambda$ . La solución es  $(x,y) = (-\lambda,\lambda)$  con  $\lambda \in \mathfrak{R}$

### Opción B

#### Ejercicio 1 de la opción B del modelo 3 de 1999.

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x$ .

(a) [1'5 puntos] Demuestra que la recta tangente de ecuación  $y = -2x + 1$  es tangente a la gráfica de la función y halla el punto de tangencia correspondiente.

(b) [1 punto] ¿Corta esta recta tangente a dicha gráfica en algún punto distinto al de tangencia?

#### Solución

(a)

$y = -2x + 1$  es tangente a la función  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x$

La pendiente de la función es  $f'(x)$ , y la pendiente de la recta es  $-2$ , luego igualamos  $f'(x)$  a  $-2$  y resolvemos la ecuación

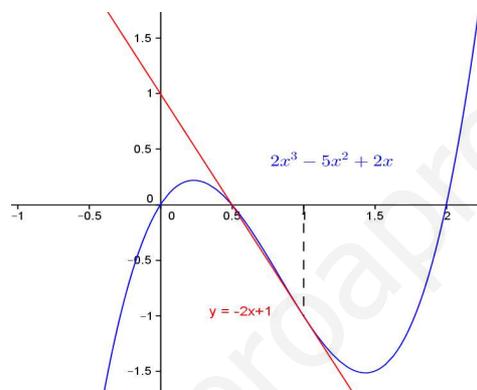
$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 2$$

$$f'(x) = -2, \text{ nos da } 6x^2 - 10x + 2 = -2, 6x^2 - 10x + 4 = 0, \text{ de donde se obtiene } x = 1 \text{ y } x = 2/3$$

Luego el punto de tangencia tiene de abscisa  $x = 1$

Veamos una gráfica



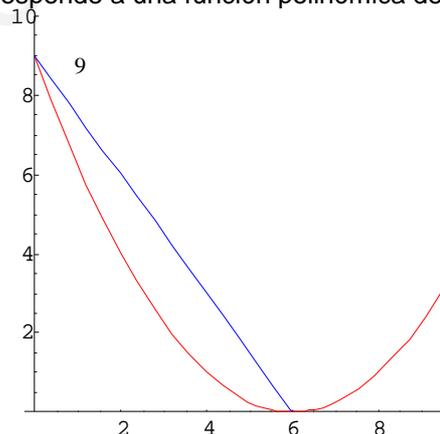
(b)

Para ver si dicha recta tangente corta en otro punto distinto del de tangencia resolvemos la ecuación  $f(x) = -2x + 1$

$2x^3 - 5x^2 + 2x = -2x + 1$ ;  $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = (x-1)(x-1)(2x+1)$ . Luego la función es cortada también en el punto  $x = 1/2$

#### Ejercicio 2 de la opción B del modelo 3 de 1999.

La gráfica  $f$  de la figura (en rojo) corresponde a una función polinómica de grado 2.



(a) [1'5 puntos] Determina una expresión algebraica de la función  $f$ .

(b) [1 punto] Determina el área de la región limitada por dicha función y la recta dibujada (en azul).

#### Solución

(a)

La parábola es de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$

La abscisa de su vértice es la solución de  $f'(x) = 0$ , y vemos que el vértice está en  $(6, 0)$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

$$f'(6) = 0, \text{ nos da } 0 = 12a + b$$

También (6,0) pertenece a la gráfica luego  $f(6) = 0$  que nos da  $0 = 36a + 6b + c$

Además el punto (0,9) es de la gráfica luego  $9 = 0 + 0 + c$

Resolviendo obtenemos  $a = 1/14$ ,  $b = -3$  y  $c = 9$

Luego  $f(x) = ax^2 + bx + c = 1/14x^2 - 3x + 9$

Análogamente la recta  $y = mx + n$  pasa por los puntos (6,0) y (0,9) luego

$$0 = 6m + n$$

$$9 = n$$

de donde  $m = -3/2$  y  $n = 9$  y la recta es

$$y = mx + n = -3/2x + 9$$

(b)

Las funciones se cortan en  $x = 0$  y  $x = 6$ , luego el área encerrada por ellas es

$$\text{Area} = \int_0^6 [(-3/2x+9) - (1/14x^2 - 3x + 9)] dx = \int_0^6 [-1/14x^2 - 3/2x] dx = \left[ -\frac{x^3}{42} - \frac{3x^2}{4} \right]_0^6 = -1.6^3/12 + 3.6^2/4 = 9 \text{ u.a.}$$

### Ejercicio 3 de la opción B del modelo 3 de 1999.

[2'5 puntos] Un paralelogramo cuyo centro es  $M = (3/2, 3, 4)$  tiene por vértices los puntos  $A = (1, 2, 3)$  y  $B = (3, 2, 5)$ .

(a) [1 punto] Halla las coordenadas de los otros dos vértices.

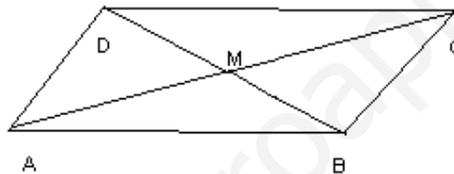
(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular al plano que contiene al paralelogramo.

(c) [0'5 puntos] Calcula el área del paralelogramo.

#### Solución

(a)

$M = (3/2, 3, 4)$ ,  $A = (1, 2, 3)$  y  $B = (3, 2, 5)$ .



El punto medio M se corta en la mitad de las diagonales, por tanto es el punto medio de los segmentos AC y BD. Luego

$$(3/2, 3, 4) = [(1+x)/2, (2+y)/2, (3+z)/2], \text{ de donde}$$

$$x = 2, y = 4, z = 5 \text{ y el punto es } C(2, 4, 5)$$

$$(3/2, 3, 4) = [(3+x)/2, (2+y)/2, (5+z)/2], \text{ de donde}$$

$$x = 0, y = 4, z = 3 \text{ y el punto es } D(0, 4, 3)$$

(b)

La recta  $r$  pedida tiene como punto  $M(3/2, 3, 4)$  y como vector director  $\mathbf{v} = \mathbf{AD} \times \mathbf{AB}$ , que es un vector perpendicular al plano

$$\mathbf{AD} = (-1, 2, 0)$$

$$\mathbf{AB} = (2, 0, 2)$$

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4, 2, -4)$$

La recta pedida en vectorial es  $(x, y, z) = (3/2 + 4\lambda, 3 + 2\lambda, 4 - 4\lambda)$ , con  $\lambda \in \mathfrak{R}$

(c)

El área del paralelogramo es el módulo del vector  $\mathbf{v} = \mathbf{AD} \times \mathbf{AB} = (4, 2, 4)$

$$\text{Área} = |\mathbf{AD} \times \mathbf{AB}| = (4^2 + 2^2 + 4^2)^{1/2} = 6 \text{ u.a.}$$

### Ejercicio 4 de la opción B del modelo 3 de 1999.

Se dice que una matriz A cuadrada de orden 3 es ortogonal si su inversa  $A^{-1}$  y su traspuesta  $A^t$  coinciden.

Dado un número real x sea B la matriz  $B = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) & 0 \\ -\sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [1'5 puntos] ¿Es ortogonal la matriz B?

(b) [1 punto] ¿Es  $B^2$  ortogonal?

#### Solución

(a)

$$B = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) & 0 \\ -\sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adj}(B^t)$$

$$|B| = -1 \cdot \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = -1 \cdot (\cos^2(x) + \sin^2(x)) = -1 \cdot (1) = -1$$

$$\text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} -\cos(x) & \sin(x) & 0 \\ -\sin(x) & -\cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{Adj}(B^t) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -\cos(x) & \sin(x) & 0 \\ -\sin(x) & -\cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^t$$

(b)

Para esta segunda parte tenemos en cuenta que  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$  y que  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ .  
 $(B^2)^{-1} = (B \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot B^{-1} = B^t \cdot B^t = (B \cdot B)^t = (B^2)^t$ .