Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 6 de 2000.

[2,5 puntos] Sea F: $R^+ \to R$ la función definida por $F(x) = \int_0^x (2t+\sqrt{t})\,dt$.

(a) [1'5 puntos] Determina F(1).
(b) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa x = 1.

Solución

(a)

$F(1) = \int_0^1 (2t+\sqrt{t})\,dt = [\ t^2 + t^{3/2}/(3/2)\ ]_0^1 = [\ 1 + 2/3) - (0)\ ] = 5/3$

(b)

La ecuación de la recta tangente en x = 1 es $y - F(1) = F'(1)\cdot(x-1)$

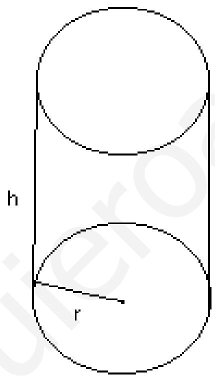
$F'(x) = \left[\int_0^x \left(2t+\sqrt{t}\right)dt\right]' = (2x + \sqrt{x})$; luego $F'(1) = 2(1) + \sqrt{1} = 2+1 = 3$

Por tanto la recta tangente es $y - 5/3 = 3\cdot(x-1)$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 6 de 2000.

[2'5 puntos] Una empresa quiere fabricar vasos de cristal de forma cilíndrica con una capacidad de 250 centímetros cúbicos. Para utilizar la mínima cantidad de cristal, se estudian las medidas apropiadas para que la superficie total del vaso sea mínima. Cuales deben se dichas medidas? Justifica la respuesta.

Solución



Volumen = $\pi\cdot r^2\cdot h = 250$ cc.; $h = \dfrac{250}{\pi\cdot r^2}$

$S(r) = S_T = S_B + S_L = \pi\cdot r^2 + h\cdot 2\pi\cdot r = \pi\cdot r^2 + \dfrac{250}{\pi\cdot r^2}\cdot 2\pi\cdot r = \pi\cdot r^2 + 500/r$.

$S'(r) = 2\pi\cdot r + 500\cdot(-1/r^2)$.; $S'(r) = 0$; $2\pi\cdot r + 500\cdot(-1/r^2) = 0$. Operando $r^3 = 500/2\pi$, luego $r = \sqrt[3]{\dfrac{225}{\pi}}$ y por tanto $h = \dfrac{250}{\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\dfrac{225}{\pi}}\right)^2}$

Para ver que es mínima calculamos la segunda derivada y comprobamos que es mayor que cero

$S''(r) = 2\pi - 500(-2r^{-3}) = 2\pi + \dfrac{1000}{r^3}$. Como r es positivo al sustituir su valor $\sqrt[3]{\dfrac{225}{\pi}}$ en $S''(r) = 2\pi + \dfrac{1000}{r^3}$ nos sale positivo y por tanto tenemos un mínimo.

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 6 de 2000.

[2'5 puntos] Determina los puntos de la recta de ecuaciones $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ que equidistan de los planos de ecuaciones $3x+4y-1=0$ y $4x-3z-1=0$.

Solución

Ponemos la recta en paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases}$, y los planos $\pi_1 \equiv 3x+4y-1=0$ y $\pi_2 \equiv 4x-3z-1=0$.

Nos piden puntos $X \in r$ tales que $d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2)$, es decir

$$\frac{|3(1+2\lambda)+4(-1+3\lambda)-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|4(1+2\lambda)-3(-2+2\lambda)-1|}{\sqrt{16+9}}$$

Operando tenemos :

$3+6\lambda-4+12\lambda-1 = +(4+8\lambda+6-6\lambda-1)$, de donde $16\lambda = 11$ y $\lambda = 11/16$

$3+6\lambda-4+12\lambda-1 = -(4+8\lambda+6-6\lambda-1)$, de donde $20\lambda = -7$ y $\lambda = -7/20$

Para $\lambda = 11/16$ el punto es $(1+2(11/16), -1+3(11/16), -2+2(11/16)) = (38/16, 17/16, -10/16)$

Para $\lambda = -7/20$ el punto es $(1+2(-7/20), -1+3(-7/20), -2+2(-7/20)) = (6/20, -41/20, -54/20)$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 6 de 2000.

Considera el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial $\begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro b.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

(a)

$\begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$; $A^* = \begin{pmatrix} b & 1 & b & -2 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 & -2 \end{pmatrix}$ matriz de los coeficientes y matriz ampliada.

Estudiamos $|A| = \begin{vmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1)(1-b^2)$.

Si $|A| \neq 0$, $b^2 \neq 1$, es decir **si $b \neq \pm 1$, el sistema es compatible y determinado**.

Si b = 1,

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, pero $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ por tanto rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ rango $(A^*) = 2$

Al ser rango(A) = 2 = rango (A^*), el sistema es compatible e indeterminado. Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas principales (después lo resolveremos)

Si b = - 1,

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, pero $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ por tanto rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ rango $(A^*) = 3$

Al ser rango(A) = 2 $\neq$ 3 = rango (A^*), el sistema es incompatible.

(b)

Lo resolvemos en el caso de b = 1, que era compatible e indeterminado

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas principales (elegimos las dos primeras, con las que hemos formado el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$)

$x + y + z = -2$

0 + y + z = 0; hacemos z = λ con lo cual y = - z = - λ y x = - 2- y – z = - 2 – (-λ) -λ = - 2. Es decir las soluciones del sistema son (x, y, z) = =(- 2, - λ , λ) con $\lambda \in \Re$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 6 de 2000.

[2'5 puntos] Sea f : $\Re \rightarrow \Re$ la función definida en la forma f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} & si \quad x \le -2 \\ 0 & si \quad -2 < x \le 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} & si \quad 1 < x \end{cases}$. Estudia la derivabilidad de f.

Solución

f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} & si \quad x \le -2 \\ 0 & si \quad -2 < x \le 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3} & si \quad 1 < x \end{cases}$. Veamos primero la continuidad en x = -2 y en x = 1 puesto que las ramas son continuas al ser ramas polinómicas

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} [\,(1/3)x^3 - x + 2/3] = (1/3)(-8) + 2 + 2/3 = -8/3 + 8/3 = 0 = f(-2)$

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (0) = 0.$

Como f(- 2) = $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = 0$, la función es continua en x = - 2.

Análogamente

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} [\,(1/3)x^3 - x + 2/3] = (1/3) - 1 + 2/3 = 3/3 - 1 = 0$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (0) = 0 = f(1).$

Como f(1) = $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$, la función es continua en x = 1.

Estudiemos ahora la derivabilidad

f ' (x) = $\begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x < -2 \\ 0 & si \quad -2 < x < 1 \\ x^2 - 1 & si \quad 1 < x \end{cases}$.

Nos falta ver la continuidad en x = -2 y x = 1

En x = - 2

f ' (-2$^-$) = $\lim_{x \to -2^-} f'(x) = \lim_{x \to -2} (x^2 - 1) = 4 - 1 = 3$

f ' (-2$^+$) = $\lim_{x \to -2^+} f'(x) = \lim_{x \to -2} (0) = 0$

Como f ' (-2$^-$) $\neq$ f ' (-2$^+$), no existe f ' (- 2)

En x = 1

f ' (1$^-$) = $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1} (0) = 0$

f ' (1$^+$) = $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 - 1) = 1 - 1 = 0$

Como f ' (1$^-$) = f ' (1$^+$) = 0, existe f ' (1) = 0, por tanto f(x) es derivable en $\Re$ - {- 2}

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 6 de 2000.

Considera las funciones f, g : [0,2π] $\rightarrow$ R definidas por f(x) = 2sen(x) y g(x) = sen(2x)

(a) [1 punto] Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de f y g.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución

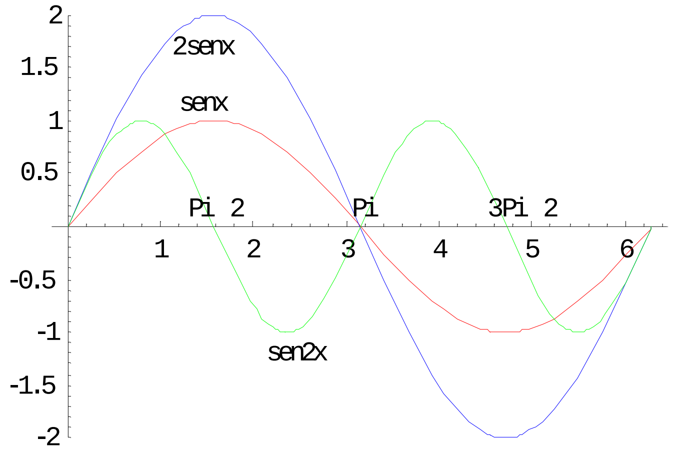
(a)

f(x) = 2sen(x) y g(x) = sen(2x)

la gráfica de 2sen(x) es igual que la de sen(x) pero de amplitud 2

la gráfica de sen(2x) es igual que la de sen(x) pero de periodo 2π/2 = π

Las gráficas pedidas son: (2sen(x) en azul, sen(x) en rojo y sen(2x) en verde)



(b)

Los puntos de corte de 2senx y sen2x son 0, π y 2π. Salen resolviendo 2senx = sen2x

Área = $\int_0^{\pi}$ (2senx - sen2x)dx + $\int_{\pi}^{2\pi}$ (sen2x – 2senx)dx =

= [-2cosx + 1/2cos2x $]_0^{\pi}$ + [- 1/2cos2x +2cosx $]_{\pi}^{2\pi}$ =

= [(-2cosπ + 1/2cos2π) – (-2cos0 + 1/2cos0)] – [(- 1/2cos4π +2cos2π) – (- 1/2cos2π +2cosπ)] =
= (2 + ½ + 2 – ½) + (- ½ + 2 + ½ + 2) = 4 + 4 = 8 u.a.

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 6 de 2000.

[2'5 puntos] Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas de ecuaciones respectivas 2x – y – 4 = 0 y x – 2y +3=0, y es tangente a la recta x – 3y +3 = 0. Calcula el punto de tangencia.

Solución

El centro de la circunferencia es la intersección de las rectas 2x – y – 4 = 0 y x – 2y +3 = 0. Resolviendo dicho sistema obtenemos como centro C(11/3, 10/3)

Como dicen que la circunferencia es tangente a la recta r ≡ x – 3y + 3 = 0, y sabemos que los radios son perpendiculares a las rectas tangentes, vamos a calcular la recta perpendicular a r que pase por el centro C, y la llamamos s. Dicha recta tiene de ecuación s ≡ 3x + y + K = 0. Le obligamos a pasar por el centro C(11/3, 10/3) y tenemos 3(11/3) + (10/3) + K = 0, de donde K = -43/3 y por tanto s ≡ 3x + y – 43/3 = 0

Sea Q = r $\cap$ s

Resolviendo el sistema x – 3y + 3 = 0 y 3x + y – 43/3 = 0 obtenemos Q(4,7/3)

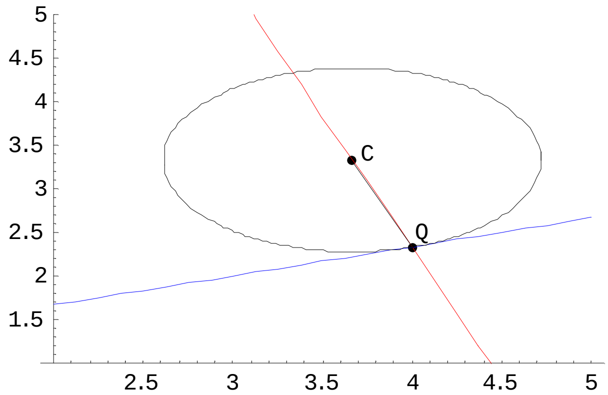
Por lo dicho anteriormente el radio es d(C,Q) = ||**CQ**|| = $\sqrt{\frac{1}{9}+1}=\sqrt{\frac{10}{9}}$

CQ = (4 –1/3, 73 – 10/3) = (1/3, - 1)

La circunferencia pedida es la que tiene de centro C(11/3, 10/3) y radio $\sqrt{\frac{10}{9}}$, es decir su ecuación es

$(x – 11/3)^2 + (y – 10/3)^2 = \left(\sqrt{\frac{10}{9}}\right)^2$

Su gráfica es



Ejercicio 4 de la opción B del modelo 6 de 2000.

[2'5 puntos] Un mayorista de café dispone de tres tipos base, Moka, Brasil y Colombia, para preparar tres tipos de mezcla, A, B y C, que envasa en sacos de 60 Kg. Con los siguientes contenidos en kilos y precios del kilo en euros:

	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C
Moka	15	30	12
Brasil	30	10	18
Colombia	15	20	30
Precio(cada Kg.)	4	4'5	4'7

Suponiendo que el preparado de las mezclas no supone coste alguno, cual es el precio de cada uno de los tipos de café.

Solución

Moka = x; Brasil = y; Colombia = z

15x + 30y +15z = 4(15+30+15); 3x+6y+3z = 48; x+2y+z=16

30x +10y +20z = 4'5(15+30+15); 6x+2y+4z=54; 3x+y+2z=27

12x+18y+30z = 4'7(15+30+15); 2x+3y+5z=47; 2x+3x+5z=47

Vamos a resolverlo por Gauss

$$\begin{cases} x+2y+z=16 \\ 3x+y+2z=27 \\ 2x+3y+5z=47 \end{cases} \begin{cases} x+2y+z=16 \\ 0-5y-z=-21 \\ 0-y+3z=15 \end{cases} \begin{cases} x+2y+z=16 \\ 0-0-16z=-96 \\ 0-y+3z=15 \end{cases}$$

De donde z = 96/16 = 6

De – y = 15 – 3z, tenemos y = 3

De x = 16 – 2y – z, tenemos x = 4