Ejercicio 1 de la opción A del modelo 1 de 2000.

(a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas $y = x^2 + 1$, $y = \frac{2}{x}$ e $y = x - 1$.

(b) [1'5 puntos] Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución

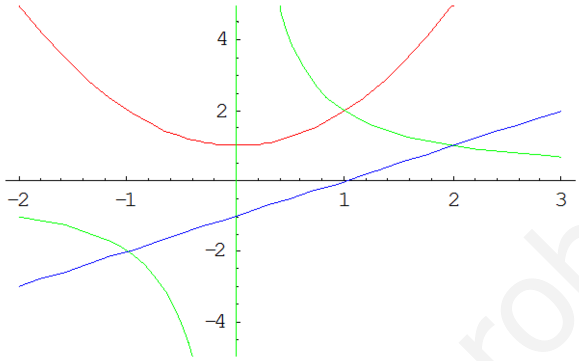
(a)

$y = x^2 + 1$ es un parábola igual que $y = x^2$, pero desplazada una unidad hacia arriba en ordenadas.

$y = \frac{2}{x}$ es un hipérbola que pasa por (1,2) y (-1,-2)

$y = x - 1$ es un recta igual que $y = x - 1$, pero desplazada una unidad hacia la derecha en abcisas

Sus gráficas las tenemos en rojo, verde y azul



(b)

Para determinar su área determinamos sus puntos de corte

De $x^2 + 1 = 2/x$, tenemos $x^3 + x - 2 = 0$ y su solución es $x = 1$

De $x^2 + 1 = x - 1$, tenemos $x^2 - x + 2 = 0$ que no tiene solución real

De $2/x = x - 1$ tenemos $x^2 - x - 2 = 0$ y se obtienen como soluciones $x = -1$ y $x = 2$, en nuestro caso la que nos interesa es $x = 2$.

Area = $\int_0^1 (x^2+1)dx + \int_1^2 (2/x - (x-1))dx = [x^3/3 + x]_0^1 + [2\ln|x| - x^2/2 + x]_1^2 = (1/3 + 1) +$

$+ [(2\ln(2) - 2 + 2) - (2\ln(1) - ½ + 1)] = 5/6 + 2\ln(2)$ u.a.

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 1 de 2000.

[2'5 puntos] Calcula a y b sabiendo que la función f: $\Re \to \Re$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \frac{a}{x} + bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ sea derivable.

Solución

Como $f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \frac{a}{x} + bx & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ nos dicen que es derivable, también es continua en particular en x = 2, es decir f(2) = $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$, para que sea continua en x = 2. Sustituyendo tenemos

$$2a + 20 = 2a + 20 = a/2 + 2b$$

Como f(x) es derivable tenemos $f'(x) = \begin{cases} a + 10x & \text{si} \quad x \le 2 \\ \frac{-a}{x^2} + b & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$, con lo cual concretando en x = 2 tenemos

$f'(2^-) = f'(2^+)$, es decir $a + 20 = -a/4 + b$.

Resolviendo el sistema $2a + 20 = a/2 + 2b$ con $a + 20 = -a/4 + b$ obtenemos $a = -20$ y $b = -5$.

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 1 de 2000.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:

(a) [1 punto] $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$. (b) [1'5 puntos] $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$

Solución

(a) Si un fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número se puede sacar factor común multiplicando al determinante

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} a & b & 5c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot2 = 30$$

(b) Si se cambian entre si dos columnas de un determinante el determinante cambia de signo, y a una columna se le puede sumar una combinación lineal de las otras columnas sin que el determinante cambie de valor

$$\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix} = \text{(Cambio 2ª columna por 3ª)} = -\begin{vmatrix} a+2b & b & c \\ d+2e & e & f \\ g+2h & h & i \end{vmatrix} = \text{(a la 1ª columna le sumo 2ªx(-2))} =$$

$$= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2.$$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 1 de 2000.

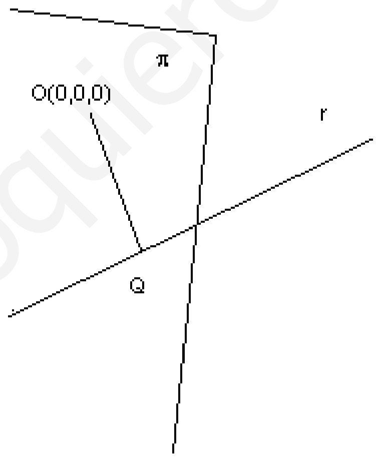
[2'5 puntos] Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas $x+y+2z = 4$ y $2x-y+z = 2$.

Solución

Ponemos la recta $x+y+2z = 4$ y $2x-y+z = 2$, en paramétricas. Tomamos $z = \lambda$, con lo cual resolvemos el sistema $x+y = 4 - 2\lambda$ e $2x-y = 2 - \lambda$. Sus soluciones son $x = 2 - \lambda$ e y $2 - \lambda$, luego la recta es

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Calculamos el plano π perpendicular ($\perp$) a la recta r que pasa por O(0,0,0), su punto de corte Q con dicha recta y la distancia buscada es d(O,Q)



El plano π tiene como vector normal **n** el vector director de la recta **v** = (-1,-1,1)

$\pi \equiv (-1)(x-0) + (-1)(y-0) + (1)(z-0) = -x-y+z = 0$

$Q = r \cap \pi$, para lo cual sustituimos la recta r en π

$-(2 - \lambda) – (2 - \lambda) + (\lambda) = 0 \rightarrow 3\lambda - 4 = 0 \rightarrow \lambda = 4/3$

El punto Q es Q(2-(4/3), 2-(4/3), 4/3) = Q(2/3, 2/3, 4/3)

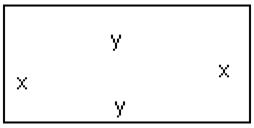
OQ = (2/3-0, 2/3-0, 4/3-0) = ((2/3, 2/3, 4/3)

d(O,Q) = |**OQ**| = $\sqrt{4/9 + 4/9 + 16/9} = \sqrt{24/9}$ unidades de longitud (u.l.)

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 1 de 2000.

[2'5 puntos] De entre todos los rectángulos de 40 kilómetros de perímetro calcula las dimensiones del que tiene área máxima.

Solución



La función a optimizar es Área = A = x·y

La relación entre las variables es 2x + 2y = 40, luego y = 20 – x, de donde A = x·y = x·(20 – x) = 20x – x^2

Derivamos, igualamos a cero para obtener los posibles máximos o mínimos y comprobamos con la segunda derivad si es máximo o mínimo

A ‘ = 20 – 2x; A ‘ = 0; 20 . 2x = 0 de donde x = 10 que es el posible máximo o mínimo

A ‘’ = -2 < 0, por tanto es un máximo

Si x = 10, y = 20 – 10 = 10, es decir es un cuadrado de lado 10 kilómetros.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 1 de 2000.

(a) [1 punto] Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{9 - x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abcisa x = 1 y el eje de abcisas.

(b) [1’5 puntos] Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución

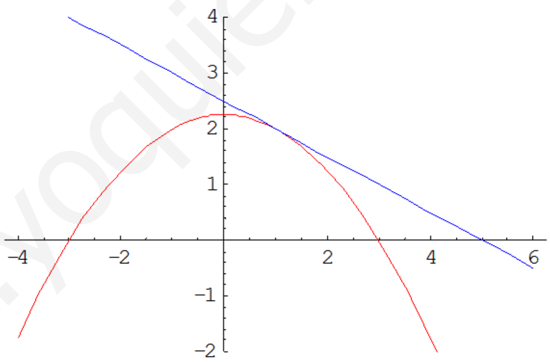
(a)

$y = \frac{9 - x^2}{4} = \frac{9}{4} - \left(\frac{x}{2}\right)^2$, es decir su gráfica es la de una parábola igual a la de – x^2, pero desplazada 9/4 hacia arriba y un poco mas abierta.

La recta tangente en x = 1 es y – f(1) = f ‘ (1)(x – 1)

$f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$, derivando tenemos f ‘ (x) = -x/4, por tanto f(1) = 8/4 = 2 y f ‘ (1) = -1/2. sustituyendo tenemos que la recta tangente es y – 2 = -1/2((x – 1). Operando resulta y = -1/2x + 5/2

Su gráfica es



Para determinar el área pedida tenemos que hallar el corte de la parábola con la recta resolviendo $\frac{9 - x^2}{4}$ = -1/2x + 5/2, y nos sale 1 pues es el punto de tangencia

También hay que determinar los puntos de corte de la recta y de la parábola con el eje de abcisas OX, de ecuación y = 0, resultándonos x = 5 para la recta, y x = ± 3 para la parábola, del que solo nos vale el x = 3.

(b)

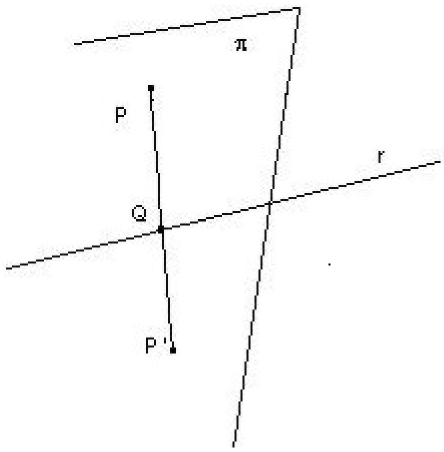
Área = $\int_1^5$ (-1/2x + 5/2)dx - $\int_1^3 \left(\frac{9 - x^2}{4}\right)dx$ = $[-x^2/4 + 5/2x\ ]_1^5$ - $[9/4x – x^3/12\ ]_1^3$ =

= [(-25/4 + 25/2) – (-1/4 +5/2)] – [(27/4 – 27/12) – (9/4 – 1/12)] = 5/3 u.a.

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 1 de 2000.

[2’5 puntos] Calcula las coordenadas del punto simétrico del (1,-3,7) respecto de la recta dada por las ecuaciones $x – 1 = y + 3 = \frac{z - 4}{2}$.

Solución



Ponemos la recta en paramétricas
x = 1+λ
y = -3+λ
z = 4+2λ

Calculamos el plano π perpendicular a la recta r por el punto P(1,-3,7). El plano π tiene como vector normal **n** el vector director de la recta **v** = (1,1,2)
π ≡ (1)(x-1) + (1)(y+3) + (2)(z-7) = x+y+2z-12 = 0

Q es el punto de corte de la recta r con el plano π
(1+λ)+(-3+λ)+2(4+2λ) -12= 6λ -6 = 0 → λ = 1
Luego el punto Q es Q(1+1, -3+1, 4+2) = Q(2, -2, 6)

Q es el punto medio de P y de su simétrico P ‘, es decir
(2,-2,6) = ((1+x)/2, (-3+y)/2, (7+z)/2). Igualando miembro a miembro tenemos:
2 = (1+x)/2, -2 = (-3+y)/2, 6 = (7+z)/2 . De donde obtenemos x = 3 , y = -1 y z = 5, es decir el simétrico buscado es P ‘(3,-1,5)

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 1 de 2000.

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{cases}$.

(a) [1 punto] Halla todos los valores del parámetro λ para os que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.
(b) [1 punto] Resuelve el sistema para los valores de λ en el apartado anterior.
(c) [0’5 puntos] Discute el sistema para los restantes valores de λ.

Solución

(a)
Sean A y A* la matriz de os coeficientes y la matriz ampliada del sistema

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad y \quad A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2\lambda & -1 \\ 3 & -1 & -7 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Si |A| ≠ 0, el sistema tiene solución única
Si |A| = 0, el sistema no tiene solución única, y tendremos que verlo caso a caso según los valores de λ, y estudiar si los rangos de A y de A^* coinciden o no.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2\lambda \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2\lambda^2+12\lambda - 14$$

Resolviendo $2\lambda^2+12\lambda - 14 = 0$ obtenemos λ = 1 y λ = -7
Si λ ≠ 1 y λ ≠ -7, el sistema tiene solución única puesto que rango(A) = rango (A^*)=3.

Si λ = 1. Tenemos |A| = 0, y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, rango (A) = 2

En A*, de $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, tenemos rango(A*) = 2

Por el Teorema de Rouché-Frobeniüs como rango(A) = rango(A*) = 2, el sistema tiene infinitas soluciones.

Si λ = -7. Tenemos |A| = 0, y como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, rango (A) = 2

En A*, de $\begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix} \neq 0$, tenemos rango(A*) = 3

Por el Teorema de Rouché-Frobeniüs como rango(A)=2$\neq$ rango(A*)=3, el sistema no tiene solución y es incompatible.

(c) Ya hemos resuelto la discusión del sistema.

(b) Si λ = 1, como rango(A) = rango(A*) = 2, nos quedamos solo con las dos primeras ecuaciones:
x+2y = 3 ; -x+2z = -1. Para resolverlo tomamos z = μ , y nos resulta x=1+2μ e y=1-μ, por tanto las infinitas soluciones son (x,y,z) = (1+2μ, 1-μ, μ) con $\mu \in \Re$.