Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes 6 de 2002.

[2'5 puntos] De entre todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas, determina las que son tangentes a la curva de ecuación $y = 1/4\cdot x^2 + 4x + 4$. Calcula los puntos de tangencia correspondientes.

Solución

$y = mx$ es una recta que pasa por el origen (0, 0)
Parábola $f(x) = 1/4\cdot x^2 + 4x + 4$
Si la recta $y = mx$ es tangente a $f(x) = 1/4\cdot x^2 + 4x + 4$, tienen que coincidir por tanto las igualamos
$1/4\cdot x^2 + 4x + 4 = mx$
Por otro lado como es recta tangente su pendiente $y' = m$ coincide con la pendiente de la recta tangente de un punto genérico que es $f'(x) = 1/2x + 4$. Igualándolo tenemos
$m = 1/2x + 4$
Resolvemos el sistema
$1/4\cdot x^2 + 4x + 4 = mx$
$m = 1/2x + 4$. Sustituyendo en la 1ª
$1/4\cdot x^2 + 4x + 4 = mx = (1/2x + 4)x = 1/2x^2 + 4x$. De donde $1/4x^2 – 1/2x^2 + 4 = 0$. Operando nos queda
$x^2 = 16$, de donde $x = \pm 4$.
Para $x = 4$ la pendiente es $m = 4/2 + 4 = 6$. La recta es $y = 6x$ y la ordenada es $6(4) = 24$. Punto (4,24)
Para $x = -4$ la pendiente es $m = -4/2 + 4 = 2$. La recta es $y = 2x$ y la ordenada es $2(-4) = -8$. Punto (-4,-8)

Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes 6 de 2002.

Considera la función $f :\Re \to \Re$ definida por $f(x) = x^2\cdot e^{(x/2)}$
(a) [1 punto] Calcula $\lim_{x\to \infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
(b) [1'5 puntos] Calcula los intervalos de monotonía y los extremos locales de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

Solución

$f(x) = x^2\cdot e^{(x/2)}$
(a)
$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} x^2\cdot e^{(x/2)} = (+\infty)(e^{+\infty}) = (+\infty)(+\infty) = (+\infty)$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^2\cdot e^{(x/2)} = \lim_{x\to \infty} (-x)^2\cdot e^{(-x/2)} = \lim_{x\to \infty} (x)^2/ e^{(x/2)} =$
$= \lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{e^{x/2}} = ((-x)^2\cdot e^{(-x/2)} = (+\infty)/(+\infty)$ y le aplicamos la Regla de L'Hopital
$\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{e^{x/2}} = \lim_{x\to \infty} \dfrac{2x}{(1/2)e^{x/2}} = \lim_{x\to \infty} \dfrac{4x}{e^{x/2}} = (+\infty)/(+\infty)$ le volvemos a aplicar la Regla de L'Hopital
$\lim_{x\to \infty} \dfrac{4x}{e^{x/2}} = \lim_{x\to \infty} \dfrac{4}{(1/2)e^{x/2}} = \lim_{x\to \infty} \dfrac{8}{e^{x/2}} = \dfrac{8}{+\infty} = 0$, por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$ de la función $f(x) = x^2\cdot e^{(x/2)}$
(b)
Para la monotonía realizamos el estudio de $f'(x)$
$f(x) = x^2\cdot e^{(x/2)}$
$f'(x) = 2x\cdot e^{(x/2)} + x^2 e^{(x/2)}(1/2) = e^{(x/2)}(2x + x^2/2)$
$f'(x) = 0 \to (2x + x^2/2) = 0$ puesto que la exponencial no se anula nunca
$(2x + x^2/2) = 0 = x(2 + x/2)$, de donde $x = 0$ y $x = -4$

Como $f'(-5) > 0$, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -4)$
Como $f'(-2) < 0$, $f(x)$ es decreciente en $(-4, 0)$
Como $f'(1) > 0$, $f(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$
Por definición $x = -4$ es un máximo y vale $f(-4) = 16\cdot e^{-2} = 16/e^2$
Por definición $x = 0$ es un mínimo y vale $f(0) = 0$

Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes 6 de 2002.

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-my+z = 1 \\ x+y+z = m+2 \\ x+y+mz = 4 \end{cases}$.
(a) [1'5 puntos] Clasifícalo según los valores del parámetro m.
(b) [2 puntos] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado

Solución

$\begin{cases} x-my+z = 1 \\ x+y+z = m+2 \\ x+y+mz = 4 \end{cases}$. Matriz de los coeficientes M = $\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

Matriz ampliada M * = $\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m+2 \\ 1 & 1 & m & 4 \end{pmatrix}$

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$ = { (2ªF-1ªF y 3ªF-1ªF) } = $\begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 0 & 1+m & 0 \\ 0 & 1+m & m-1 \end{vmatrix} = (1)\cdot\begin{vmatrix} 1+m & 0 \\ 1+m & -1+m \end{vmatrix} = (1+m)(-1+m)$

|M| = 0 si (1+m)(-1+m) = 0 de donde m = 1 y m = -1

Si **m ≠ 1 y m ≠ -1**, rango(M) = rango(M *) = 3 = nº de incógnitas, y por el Teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado (tiene solución única).

Si **m = -1**

En M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, rango(M) = 2

En M *= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, rango(M *) = 2

Como rango(M) = rango(M *) = 2 < nº de incógnitas, y por el Teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado (tiene infinitas soluciones). Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

x+y+z = 1

x+y-z = 4

restando -2z = 3, de donde z = -3/2

Tomo y = λ, luego x+y –(-3/2) = 4; x = 4 - 3/2 - λ= 5/2 - λ

La solución es (x,y,z) = (5/2 - λ, λ, -4/3) con $\lambda \in \Re$

Si **m = 1**

En M = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, rango(M) = 2

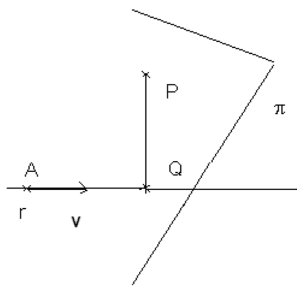
En M *= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10$, rango(M *) = 3

Como rango(M) ≠ rango(M *) ,por el Teorema de Rouche el sistema es incompatible.

Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes 6 de 2002.-

[2'5 puntos] Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y+z = 1 \\ y+z = -1 \end{cases}$ que está más cercano al punto P(1,-1,0).

Solución



El punto más cercano de la recta r al punto P es el punto Q que está en la proyección ortogonal de P sobre r.
Para determinarlo tenemos que calcular el plano π perpendicular a la recta r por el punto P
Como π es perpendicular a r el vector normal **n** del plano coincide con el vector director **v** de r

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2) - \mathbf{j}(1) + \mathbf{k}(1) = (2, -1, 1) = \mathbf{n}$$

$\pi \equiv \mathbf{n} \bullet (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = (2)(x-1) + (-1)(y+1) + (1)(z-0) = 2x - y + z - 3 = 0$

Un punto A de r sería. Tomando z = 1, tenemos y = -1-z = -2 y x = 1-3y-z = 1-3(-2) -1 = 6. El punto A es A(6,-2,1)

La recta r en paramétricas conocido el punto A(6,-2,1) y el vector v = (2, -1, 1) es

$x = 6+2\lambda$
$y = -2-\lambda$
$z = 1+\lambda$

El punto Q es la intersección de la recta r con el plano π, para lo cual sustituimos la ecuación de la recta en el plano

$2(6+2\lambda) - (-2-\lambda) + (1+\lambda) - 3 = 0 \rightarrow 6\lambda + 12 = 0 \rightarrow \lambda = -2$

El punto pedido es Q(6+2(-2), -2-(-2), 1+(-2)) = Q(2, 0, -1)

Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes 6 de 2002.

[2'5 puntos] Estudia la derivabilidad de la función $f : \Re \rightarrow \Re$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & \text{si} \quad x>0 \\ 1 & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$

Solución

Si x > 0, f(x) = senx/x, luego $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\cdot x - sen(x)}{x^2}$

Si x < 0, f(x) = 0 , luego f '(x) = 0

Veamos si existe f '(0) calculando $f'(0^+)$, $f'(0^-)$ y viendo si son iguales.

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)\cdot x - sen(x)}{x^2} = \dfrac{\cos(0)\cdot 0 - sen(0)}{0^2} = 0/0$. Le aplicamos la regla de L`Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\cdot x - sen(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-sen(x)\cdot x + \cos(x) - \cos(x)}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-sen(x)}{2} = 0/2 = 0$$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0} (0) = 0$

Como $f'(0^-) = f'(0^+) = 0$, existe f ' (0) = 0 por tanto $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot\cos(x)-sen(x)}{x^2} & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$

Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes 6 de 2002.

[2'5 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de la parábola $y = -(x-2)^2 - 2$, la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abcisas x = 3, el semieje positivo de abcisas y el semieje negativo de ordenadas. Calcula su área

Solución

L gráfica de la parábola $y = -(x-2)^2 - 2$ es la misma que la de la parábola $-x^2$ pero desplazada 2 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia abajo, es decir con el vértice en el punto (2,-2).

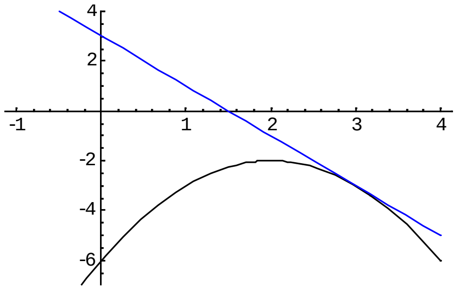
La recta tangente en x = 3 es y – f(3) = f '(3)(x-3)

$f(x) = -(x-2)^2 - 2 \rightarrow f(3) = -(3-2)^2 - 2 = -3$

$f'(x) = -2(x-2) \rightarrow f'(3) = -2(3-2) = -2$

La recta tangente en x = 3 es y + 3 = - 2 (x-3). Operando queda y = -2x + 3. Su gráfica es una recta y con dos valores se obtiene.

La gráfica conjunta es (en azul la recta)



Para determinar el área encerrada tenemos que calcular el punto de corte de la recta y = -2x + 3 con el eje de abcisas OX haciendo y = 0, y nos queda x = 3/2

Área = $\left|\int_{+0}^{3/2}[-(x-2)^2-2]\right| dx + \left|\int_{+0}^{3/2}[(-2x+3)-(-(x-2)^2-2)]\right| dx =$

$= \left| \left[\frac{-(x-2)^3}{3} - 2x \right] \Big|_{+0}^{3/2} \right| + \left| \left[-x^2+3x+\frac{(x-2)^3}{3}+2x \right] \Big|_{3/2}^{+3} \right| =$

= | [(-(3/2-2)^3/3 - 3) –(8/3-0)] | + | [(-9+9+1/3+6) – (-9/4+9/2+(3/2-2)^3/3 + 3)] |=

= |-45/8| + |19/2| = 45/8 + 19/2 = 121/8 unidades de área (u.a.)

Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes 6 de 2002.

[2'5 puntos] Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$ y enuncia las propiedades que hayas utilizado.

Solución

$\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix}$ = { 2ªF+1ª(-2) y 3ªF+1ª(-3) } = $\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 0 & y-2x & ay-2ax \\ 0 & z-3x & az-3ax \end{vmatrix}$ =

$= k\cdot \begin{vmatrix} y-2x & a(y-2x) \\ z-3x & a(z-3x) \end{vmatrix} = k\cdot a\cdot \begin{vmatrix} y-2x & y-2x \\ z-3x & z-3x \end{vmatrix} = k\cdot a\cdot 0 = 0$

Propiedades utilizadas

Sumarle a una fila otra multiplicada por un número

Desarrollar por el adjunto de un elemento cuando el resto de los elementos son nulos

Si todos los miembros de una fila o columna están multiplicados por un número dicho número puede salir fuera del determinante multiplicando

Un determinante con dos filas o columnas iguales es cero

Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes 6 de 2002.

Considera la recta r y el plano π siguientes: $r \equiv \begin{cases} x+z-a = 0 \\ y-az-1 = 0 \end{cases}$, $\pi \equiv 2x - y = b$.

(a) [1'5 puntos] Determina a y b sabiendo que está contenida en π.

(b) [1 punto] Halla la ecuación de un plano que contenga a r y sea perpendicular a π.

Solución

Como la recta r está contenida en el plano π el sistema de ecuaciones formado por la recta y el plano

$$\begin{aligned} x \quad\quad + z &= a \\ y - az &= 1 \\ 2x - y \quad\quad &= b \end{aligned}$$

es compatible e indeterminado con rango(M) = rango(M *) = 2, siendo

M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y

M * = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 2 & -1 & 0 & b \end{pmatrix}$ la matriz ampliada

Como rango(M) = 2 entonces |M| = 0 = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ = {2ªF+3ªF} = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 2 & 0 & -a \end{vmatrix}$ =

= 1· $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -a \end{vmatrix}$ = -a – 2 = 0, de donde a = -2

Como rango(M *) = 2 entonces $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix}$ =0= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix}$ = {2ªF+3ªF} = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & b+1 \end{vmatrix}$ =

= 1· $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & b+1 \end{vmatrix}$ = b+1+4 = 5, de donde b = -5

Por tanto para que la recta esté contenida en el plano a = -2 y b = -5

La recta es

+x +z = -2

+y+2z = 1

y el plano es π ≡ 2x – y = -5

(b)

El plano π' que nos piden contiene a r luego de r tomamos un punto A y su vector director **v.** El otro vector que necesitamos para el plano como es perpendicular a π es su vector normal **n** = (2, -1, 0)

v = $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = **i**(-1) –**j**(2) +**k**(1) = (-1,-2,1)

Para el punto A de r tomamos z = 1, de donde y = 1 – 2z = 1 – 2 = -1 y x = -2 – z = -2 -1 = -3. Luego el punto es A(-3,-1,1)

El plano buscado es π' ≡ det(**x** – **a**, **v**, **n**) = $\begin{vmatrix} x+3 & y+1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ =

= (x+3)(1) – (y+1)(-2) + (z-1)(5) = x + 2y + 5z = 0