

**Ejercicio 1 de la Opción A de sobrantes de 2002.**

Sea  $\text{Ln}(x)$  el logaritmo neperiano de  $x$  y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = \frac{1}{x(\text{Ln}(x))^2}$ .

(a) [1'5 puntos] Determina el conjunto  $D$  sabiendo que está formado por todos los puntos  $x \in \mathbb{R}$  para los que existe  $f(x)$ .

(b) [1 punto] Usa el cambio de variable  $t = \text{Ln}(x)$  para calcular una primitiva de  $f$ .

**Solución**

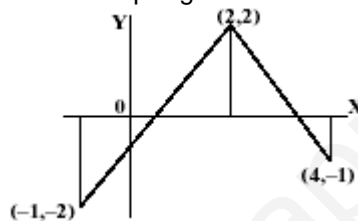
(a)  $\text{Ln}(x)$  solo existe para  $x > 0$ , por tanto el dominio de  $f(x) = \frac{1}{x(\text{Ln}(x))^2}$  como es un cociente, aparte de los  $n^{\text{os}} x > 0$ , hemos de quitar los números que anulan el denominador que en nuestro caso es  $x = 1$  puesto que  $\text{Ln}(1) = 0$ . Por tanto el dominio pedido son los  $n^{\text{os}} x > 0$  salvo el  $n^{\text{o}} x = 1$

$$(b) \int \frac{1}{x(\text{Ln}(x))^2} dx = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = -1/t = -1/(\text{Ln}(x)) + K$$

Cambio  $\text{Ln}(x) = t \rightarrow (1/x) \cdot dx = dt$

**Ejercicio 2 de la Opción A de sobrantes de 2002.**

Sea  $f: [-1,4] \rightarrow \mathbb{R}$  una función cuya derivada tiene por gráfica la de la figura.



(a) [1'5 puntos] Estudia el crecimiento y decrecimiento de  $f$  y determina los valores donde alcanza sus extremos relativos.

(b) [1 punto] Estudia la concavidad y convexidad de  $f$ . ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de  $f$ ?

**Solución**

(b)  $f'$  crece de  $(-1,2) \rightarrow f'' > 0$  en  $(-1,2) \rightarrow$  luego  $f$  es convexa ( $\cup$ ) en  $(-1,2)$

$f'$  decrece de  $(2,4) \rightarrow f'' < 0$  en  $(2,4) \rightarrow$  luego  $f$  es cóncava ( $\cap$ ) en  $(2,4)$

luego por definición  $x = 2$  es un punto de inflexión de  $f$

(a) Para determinar la monotonía antes tenemos que determinar la ecuación de la recta  $r$  que une los puntos  $(-1,-2)$  con  $(2,2)$  y su corte con el eje  $OX$ , así como la de la recta  $s$  que une los puntos  $(2,2)$  con  $(4,-1)$ .

$$\text{Recta } r \equiv y = mx + n \rightarrow \begin{cases} -2 = -m + n \\ 2 = 2m + n \end{cases} \rightarrow 3m = 4 \rightarrow m = 4/3, \text{ de donde } n = -2 + m = -2 + 4/3 = -2/3, \text{ luego}$$

$$r \equiv y = mx + n = 4/3x - 2/3$$

$$r \text{ corta al eje } OX \text{ en } y = 0 \rightarrow 4/3 \cdot x = 2/3 \rightarrow x = 1/2. \text{ Punto } (1/2, 0)$$

$$\text{Recta } s \equiv y = mx + n \rightarrow \begin{cases} 2 = 2m + n \\ -1 = 4m + n \end{cases} \rightarrow -3 = 2m \rightarrow m = -3/2, \text{ de donde } n = 2 - 2m = 2 + 3 = 5, \text{ luego}$$

$$s \equiv y = mx + n = -3/2x + 5$$

$$s \text{ corta al eje } OX \text{ en } y = 0 \rightarrow -3/2 \cdot x = -5 \rightarrow x = 10/3. \text{ Punto } (10/3, 0)$$

$f' < 0$  en  $(-1, 1/2) \cup (10/3, 4) \rightarrow f$  decrece en  $(-1, 1/2) \cup (10/3, 4)$

$f' > 0$  en  $(1/2, 10/3) \rightarrow f$  crece en  $(1/2, 10/3)$

$f'(1/2) = 0$  y  $f'(10/3) = 0$

Por definición y teniendo en cuenta lo anterior  $x = 1/2$  es un mínimo relativo y  $x = 10/3$  es un máximo relativo.

**Ejercicio 3 de la Opción A de sobrantes de 2002.**

[2'5 puntos]. En el sector de las aceitunas sin hueso, tres empresas A, B y C, se encuentran en competencia. Calcula el precio por unidad dado por cada empresa sabiendo que verifican las siguientes relaciones:

- El precio de la empresa A es 0'6 euros menos que la media de los precios establecidos por B y C.

- El precio dado por B es la media de los precios de A y C.

- El precio de la empresa C es igual a 2 euros más  $2/5$  del precio dado por A más  $1/3$  del precio dado por B.

**Solución**

x = precio de la empresa A  
 y = precio de la empresa B  
 z = precio de la empresa C

Las relaciones son

$$x = (y+z)/2 - 0'6 \rightarrow 2x = y + z - 1'2$$

$$y = (x+z)/2 \rightarrow 2y = x + z$$

$$z = 2 + 2/5 \cdot x + 1/3 \cdot y \rightarrow 15z = 30 + 6x + 5y$$

El sistema es

$$x - 2y + z = 0$$

$$2x - y - z = 1'2$$

$$6x + 5y - 15z = -30$$

Matriz de los coeficientes  $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & -15 \end{pmatrix}$ . Matriz ampliada  $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1'2 \\ 6 & 5 & -15 & -30 \end{pmatrix}$

Como  $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 6 & 5 & -15 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$ , rango (M) = rango (M\*) = 3 y por el Teorema de Rouché el sistema tiene

solución única

$$(x,y,z) = \left( \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1'2 & -1 & -1 \\ -30 & 5 & -15 \end{vmatrix}}{|M|}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1'2 & -1 \\ 6 & -30 & -15 \end{vmatrix}}{|M|}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1'2 \\ 6 & 5 & -30 \end{vmatrix}}{|M|} \right) = (-120/-12, -115'2/-12, -110'4/-12) = (10, 9'6, 9'2)$$

También se puede resolver por Gauss y el resultado es el mismo.

El sistema es

$$x - 2y + z = 0$$

$$2x - y - z = 1'2$$

$$6x + 5y - 15z = -30$$

Matriz asociada  $\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1'2 \\ 6 & 5 & -15 & -30 \end{array} \right) \xrightarrow{2^a+1^a(-2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1'2 \\ 0 & 17 & -21 & -30 \end{array} \right) \xrightarrow{3^a+1^a(-6)}$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1'2 \\ 0 & -1 & -3 & -37'2 \end{array} \right) \xrightarrow{2^a \text{ por } 3^a} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -37'2 \\ 0 & 3 & -3 & 1'2 \end{array} \right) \xrightarrow{3^a+2^a(3)}$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -37'2 \\ 0 & 0 & -12 & -110'4 \end{array} \right) \rightarrow \text{sistema asociado} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y - 3z = -37'2 \\ -12z = -110'4 \end{cases}$$

$$z = (110'4)/(12) = 9'3 \text{ €}$$

$$y = 37'2 - 3z = 37'2 - 3(9'2) = 9'6 \text{ €}$$

$$x = 2y - z = 2(9'6) - 9'2 = 10 \text{ €}$$

Que son las mismas soluciones de antes

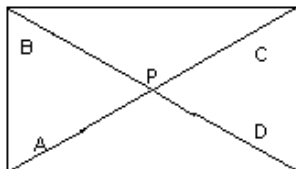
**Ejercicio 4 de la Opción A de sobrantes de 2002.-**

Considera los puntos A(1,-3,2), B(1,1,2) y C(1,1,-1).

(a) [1'25 puntos] ¿Pueden ser A, B y C vértices consecutivos de un rectángulo? Justifica la respuesta.

(b) [1'25 puntos] Halla, si es posible, las coordenadas de un punto D para que el paralelogramo ABCD sea un rectángulo

**Solución**



(a) Si A, B y C son vértices consecutivos de un rectángulo los vectores **AB** y **CB** son perpendiculares ( $\perp$ ) y por tanto su producto escalar es cero.

**AB** = (0,4,0)

**CB** = (0,0,3)

**AB**•**CB** = (0,4,0) •(0,0,3) = 0 + 0 + 0 = 0, por tanto A, B y C son los vértices consecutivos de un rectángulo.

(b) En un rectángulo las diagonales se cortan en su punto medio.

P = punto medio de los puntos A y C = [ (1+1)/2, (-3+1)/2, (2-1)/2 ] = (1, -1, 1/2)

P = punto medio de los puntos B y D = (1, -1, 1/2) = [ (1+x)/2, (1+y)/2, (2+z)/2 ] = (1, -1, 1/2).

Igualando

1 = (1+x)/2 → 2 = 1+x → x = 1

-1 = (1+y)/2 → -2 = 1+y → y = -3

1/2 = (2+z)/2 → 1 = 2+z → z = -1

El vértice D es D = (1, -3, -1)

**Ejercicio 1 de la Opción B de sobrantes de 2002.**

[2'5 puntos] Determina el valor de las constantes c y d sabiendo que la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$  tiene como recta tangente en su punto de inflexión a la recta  $y = 3x + 4$ .

**Solución**

$f(x) = x^3 + 3x^2 + cx + d$

la recta tangente en su punto de inflexión es  $y = 3x + 4$

El punto de inflexión es la solución de la ecuación  $f''(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 6x + c$

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0 \rightarrow 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$  que es el punto de inflexión

La pendiente de la recta tangente en  $x = -1$  es  $f'(-1)$  y además también es 3 que es la pendiente de la recta tangente que me han dado luego  $f'(-1) = 3$ .

Como es tangente en  $x = -1$ , pasa por  $y(-1) = 3(-1) + 4 = 1$ , es decir por el punto  $(-1,1) \rightarrow f(-1) = 1$

De  $f'(-1) = 3 \rightarrow 3 = 3(-1)^2 + 6(-1) + c \rightarrow c = 6$

De  $f(-1) = 1 \rightarrow 1 = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 6(-1) + d \rightarrow d = 5$

**Ejercicio 2 de la Opción B de sobrantes de 2002.**

[2'5 puntos] Calcula  $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} dx$

**Solución**

$I = \int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} dx$

Como el numerador es de mayor grado que el denominador tenemos que efectuar la división

$x^3 + 2x^2 - 2x + 3$	$x^2 - 1$
$-x^3 + x$	$x + 2$
$2x^2 - x + 3$	
$-2x^2 + 2$	
$-x + 5$	

$I = \int \frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^2 - 1} dx = \int (x + 2) dx + \int \frac{-x + 5}{x^2 - 1} dx = x^2/2 + 2x + I_1$

$I_1 = \int \frac{-x + 5}{x^2 - 1} dx = \int \frac{A}{x - 1} dx + \int \frac{B}{x + 1} dx = A \cdot \ln|x - 1| + B \cdot \ln|x + 1| =$

$= 2 \cdot \ln|x - 1| + (-3) \cdot \ln|x + 1|$

$\frac{-x + 5}{x^2 - 1} = \frac{-x + 5}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} \rightarrow$

$\rightarrow -x + 5 = A(x + 1) + B(x - 1)$

Si  $x = 1 \rightarrow 4 = A(2) \rightarrow A = 2$

Si  $x = -1 \rightarrow 6 = B(-2) \rightarrow B = -3$

Luego  $I = x^2/2 + 2x + I_1 = x^2/2 + 2x + 2 \cdot \ln|x-1| + (-3) \cdot \ln|x+1| + K$

### Ejercicio 3 de la Opción B de sobrantes de 2002.

Considera las matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) [1 punto] Calcula la matriz inversa de A.  
 (b) [1 punto] Calcula  $A^{127}$  y  $A^{128}$ .  
 (c) [0'5 puntos] Determina x e y tal que  $AB = BA$ .

#### Solución

$$(a) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como  $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ , existe la matriz inversa  $A^{-1}$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I_3 \cdot A = A$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_3 \cdot I_3 = I_3$$

Por tanto las potencias impares da la matriz A y las potencias pares la matriz identidad  $I_3$ .

$$A^{127} = A^{126} \cdot A = (A^2)^{63} \cdot A = (I_3)^{63} \cdot A = I_3 \cdot A = A \quad \text{y} \quad A^{128} = (A^2)^{64} \cdot A = (I_3)^{64} = I_3.$$

(c)  $AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad BA = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

$$\text{Igualando } AB = BA \text{ tenemos } \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

De la igualdad de matrices obtenemos  $x = 0$  e  $y = 1$

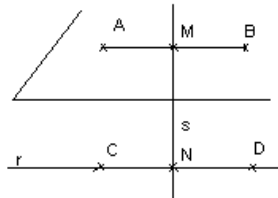
### Ejercicio 4 de la Opción B de sobrantes de 2002.

Considera los puntos  $A(1,1,1)$ ,  $B(2,2,2)$ ,  $C(1,1,0)$  y  $D(1,0,0)$ .

- (a) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y no corta a la recta determinada por C y D.  
 (b) [0'75 puntos] Halla las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD.

#### Solución

(a)  $A(1,1,1)$ ,  $B(2,2,2)$ ,  $C(1,1,0)$  y  $D(1,0,0)$ .



Plano  $\pi$  que contiene a A y B. Punto  $A(1,1,1)$ ; vector  $\mathbf{v} = \mathbf{AB} = (1,1,1)$

Como el plano  $\pi$  no corta a la recta  $r$  determinada por C y D, la recta  $r$  es paralela ( $\parallel$ ) al plano  $\pi$  y por tanto el vector  $\mathbf{CD} = (0,-1,0)$  es paralelo al plano  $\pi$ .

$$\pi \equiv \det(\mathbf{A}, \mathbf{AB}, \mathbf{CD}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(1) - (y-1)(0) + (z-1)(-1) = x - z = 0$$

(b) Punto medio del segmento AB,  $M = ((1+2)/2, (1+2)/2, (1+2)/2) = (3/2, 3/2, 3/2)$

Punto medio del segmento CD,  $N = ((1+1)/2, (1+0)/2, (0+0)/2) = (1, -1, 0)$

La recta  $s$  tiene como punto  $N(1, 1/2, 0)$  y como vector  $\mathbf{v} = \mathbf{MN} = (1-3/2, 1/2 - 3/2, 0 - 3/2) = (-1/2, -1, -3/2)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda/2 \\ y = 1/2 - \lambda \\ z = 0 - 3/2\lambda \end{cases}$$