Ejercicio nº 1 de la opción A del modelo 4 de 2004

Considera la integral definida I = $\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

(a) [1'5 puntos] Expresa la anterior integral definida aplicando el cambio de variables 1 + $\sqrt{x}$ = t.
(b) [1 punto] Calcula I.

Solución

(a)

$I_1 = \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$

Cambio 1 + $\sqrt{x}$ = t, despejamos "x" y diferenciamos

$\sqrt{x} = t - 1$; $x = (t-1)^2$ por tanto dx = 2(t – 1)

I = $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{2(t-1)}{t}dt$ = {dividiendo miembro a miembro} =

= $2\cdot\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt$ = 2(t – Ln|t|) + K = {quito cambio} = 2[(1 + $\sqrt{x}$) – Ln|1 + $\sqrt{x}$ |] + K

(b)

I = $\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = 2[(1+\sqrt{x}) - Ln|1+\sqrt{x}|\,]_1^9$ =

= 2[(4 - ln(4)) - (2 – Ln(2))] = 2[2 – 2ln(2) – Ln(2)] = 4 – 2Ln(2)

Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 4 de 2004

(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ que es paralela a la recta 4x + y + 3 = 0.
(b) [1'5 puntos] Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto (2, 0).

Solución

(a)
Si las rectas son paralelas sus pendientes son iguales.
La pendiente genérica de la parábola $f(x) = x^2$ es f '(x) = 2x
La pendiente de la recta y = - 4x - 3 es y ' = - 4
Igualo pendientes y determino el punto donde tengo que calcular la recta tangente
2x = - 4, de donde x = - 2
La recta tangente en x = -2 es y – f(-2) = f '(-2)(x+2)
f(-2) = 4
f '(-2) = -4
La recta tangente en x = -2 es y – 4 = -4·(x+2)
(b)
La recta tangente a $f(x) = x^2$ en el punto x = a es y – f(a) = f '(a)(x – a). En mi caso $y - a^2 = 2a\cdot(x - a)$.
Como pasa por (2,0) tenemos $0 - a^2 = 2a\cdot(2 - a) = 4a - 2a^2$. Resolviendo la ecuación $a^2 = 4a$, obtenemos los puntos donde tenemos que calcular las restas tangentes.
$a^2 = 4a$, de donde $a^2 - 4a = 0 = a(a - 4)$. Luego los puntos son a = 0 y a = 4

La recta tangente en x = 0 es y – f0) = f '(0)(x – 0)
f(0) = 0
f '(-2) = 0
La recta tangente en x = 0 es y – 0 = 0·(x+2) = 0, es decir la recta y = 0 (eje de abscisas OX)

La recta tangente en x = 4 es y – f4) = f '(4)(x – 4)
f(4) = 4
f '(4) = 8
La recta tangente en x = 4 es y – 16 = 8·(x– 4)

Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 4 de 2004

Denotamos por M^t a la matriz transpuesta de una matriz M .

(a) [1 punto] Sabiendo que A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que det(A) = 4, calcula los siguientes determinantes:

$$\det(3A^t) \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix} .$$

(b) [0'75 puntos] Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea B una matriz cuadrada tal que B^3 = I. Calcula det(B).
(c) [0'75 puntos] Sea C una matriz cuadrada tal que $C^{-1} = C^t$. ¿Puede ser det(C) = 3? Razona la respuesta.

Solución

(a)

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que det(A) = 4

Sabemos que si una matriz cuadrada M es de orden n entonces det(k.M) = k^n.det(M)
También sabemos que el determinante de una matriz coincide con el determinante de su matriz transpuesta.

$\det(3A^t) = 3^2\cdot \det(A^t) = 9\cdot \det(A) = 9\cdot 4 = 36$

Sabemos que si una fila (columna) del determinante de una matriz está multiplicada por un número, dicho numero sale fuera multiplicando al determinante.
También sabemos que si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante, dicho determinante cambia de signo

$$\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} b & a \\ -3d & -3c \end{vmatrix} = (2)\cdot(-3)\cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = (2)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (2)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot(4) = 24$$

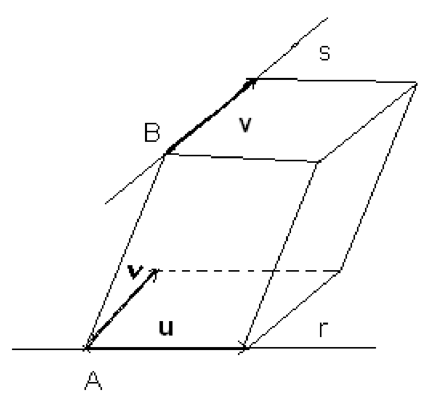
(b)
Como $B^3 = I_3$, donde I_3 es la identidad de orden 3 luego B es una matriz cuadrada de orden 3 también.
Sabemos que det(A·B) = det(A)·det(B)
Tambien sabemos que $\det(I_3)= 1$, luego de $B^3 = I_3$, tenemos:
$\det(I_3)= 1 = \det(B^3) = = \det(B)\cdot\det(B)\cdot \det(B) = [\det(B)]^3$, de donde $\det(B) = \sqrt[3]{1} = 1$
(c)
Como $C^{-1} = C^t$, la matriz C tiene inversa y por definición de inversa $C\cdot C^{-1}$ = I, siendo la matriz unidad.
De $C\cdot C^{-1}$ = I tenemos $|C|\cdot|C^{-1}| = |I|$. Si fuese |C| = 3 tendríamos $3\cdot|C^{-1}| = |I| = 1$, de donde $|C^{-1}| = 1/3$.
De $C^{-1} = C^t$ tenemos que $|C^{-1}| = |C^t| = |C| = 3$ {puesto que el determinante de una matriz y de su transpuesta coinciden}.
La respuesta a la pregunta es falsa, es decir no hay ninguna matriz cuadrada cuyo determinante sea 3 y que verifique $C^{-1} = C^t$, pues hemos llegado a una contradicción, por un lado $|C^{-1}| = 1/3$ y por otro lado $|C^{-1}| = 3$, y sabemos que el determinante de una matriz es un número único

Ejercicio n° 4 de la opción A del modelo 4 de 2004

[2'5 puntos] Halla la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y-1 = \dfrac{z-2}{-3} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x-1 = 1-z \\ y = 0 \end{cases}$$

Solución



De cada recta tomamos un punto y un vector de dirección
De la recta “r” tomamos el punto A y el vector de dirección **u**
De la recta “s” tomamos el punto B y el vector de dirección **v**
Sabemos que el volumen del paralelepípedo = | |**AB,u,v**| | = {valor absoluto del producto mixto de los vectores **AB**, **u** y **v** } = (área de la base)(altura) = || **u** x **v**||·d(“r”,”s”)
|| **u** x **v**|| es el módulo del producto vectorial de los vectores **u** y **v**·
d(“r”,”s”) es la distancia entre las rectas

Despejando tenemos
d(“r”,”s”) = (| |**AB,u,v**| |) / (|| **u** x **v**||)

Vamos ya a conseguir los puntos y los vectores

De la recta r ≡ $\begin{cases} x = 0 \\ y-1 = \dfrac{z-2}{-3} \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ -3y+3-z+2 = 0 \end{cases}$

Punto A, tomo y = 0 con lo cual z = 5 y el punto es A(0,0,5)

Vector **u** = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ = **i**(0) - **j**(-1) + **k**(-3) = (0,1,-3)

De la recta s ≡ $\begin{cases} x-1 = 1-z \\ y = 0 \end{cases} = \begin{cases} x+z-2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Punto B, tomo z = 0 con lo cual x = 2 y el punto es B(2,0,0)

Vector **v** = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = **i**(-1) - **j**(0) + **k**(1) = (-1,0,1)

AB = (2,0,-5)

|**AB,u,v**| = $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = **-** 3 , su valor absoluto es **|** |**AB,u,v**| **|** = |-3| = 3

u x **v** = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(1) - **j**(-3) + **k**(1) = (1,3,1)

|| **u** x **v**|| = √(1+9+1)= √(11)
Por tanto d(“r”,”s”) = (| |**AB,u,v**| |) / (|| **u** x **v**||) = 3/(√(11)) = 3/√(11) unidades de longitud (u.l.)

Ejercicio nº 1 de la opción B del modelo 4 de 2004

Sea f : $\Re \rightarrow \Re$ la función definida por $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un punto de la misma de ordenada y = 1, teniendo en cuenta que dicha recta tangente tiene pendiente negativa.
(b) [1’5 puntos] Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

Solución

(a)

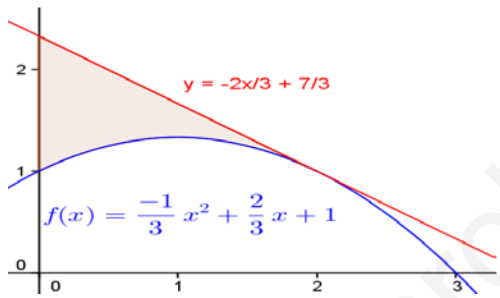
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

f ‘ (x) = (-2/3)x + (2/3)
Como piden la recta tangente en el punto de ordenada y = 1, igualamos 1 a la función f(x) para ver los puntos donde tenemos que calcular la recta tangente. Después veremos cual es el que tiene pendiente negativa.

1 = $(-1/3)x^2 + (2/3)x + 1$, de donde = $(-1/3)x^2 + (2/3)x = 0 = x\cdot [(-1/3)x + (2/3)]$, con lo cual las soluciones son $x = 0$ y $x = 2$

Las pendientes son f '(0) = 2/3 y f '(2) = (-2/3)(2) + (2/3) = (-4/3) + (2/3) = (-2/3) < 0, por tanto me piden la recta tangente en x = 2.

La recta tangente en x = 2 es y - f(2) = f '(2)(x – 2)
$f(2) = (-1/3)(2)^2 + (2/3)(2) + 1 = 1$
f '(2) = (-2/3)(2) + (2/3) = (-2/3)
Luego la recta tangente en x = 2 es y - 1 = (-2/3)(x – 2). Operando y = (-2/3)x + (7/3)
(a)
La función $f(x) = (-1/3)x^2 + (2/3)x + 1$ es una parábola con las ramas hacia abajo, con puntos de corte en x = -1 y x = 3 (soluciones de f(x) = 0) y con vértice en la abscisa x = 1 ((f '(x) = (-2/3)x + (2/3) = 0)). Por tanto las gráficas son:



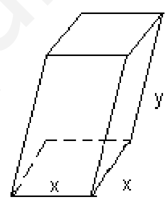
Como me piden el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas, el área es

Área = $\int_0^2 [((-2/3)x + (7/3)) - ((-1/3)x^2 + (2/3)x + 1))] dx = [((-x^2/3) + (7/3)x) - ((-x^3/9) + (2x^2/6) + x))]_0^2 =$
$= [((-4/3) + (14/3)) - ((-8/9) + (8/6) + 2))] = (8/5)\ u^2$

Ejercicio nº 2 de la opción B del modelo 4 de 2004

[2'5 puntos] Se quiere fabricar una caja abierta de chapa con base cuadrada y con 32 litros de capacidad. Halla las dimensiones de la caja que precisa la menor cantidad de chapa.

Solución



Volumen $V = x^2y = 32$, de donde $y = (32)/(x^2)$
Área = $A = 4xy + x^2 = 4x((32)/(x^2) + x^2 = (128/x) + x^2$
$A(x) = (128/x) + x^2$
$A'(x) = (-128/x^2) + 2x = -128x^{-2} +2x$
A '(x) = 0, nos da $128/(x^2 = 2x$, de donde $x^3 = 64$ y hallando la raíz cúbica x = 4
y = (32)/(16) = 2
Veamos que es un mínimo con la 2ª derivada
$A''(x) = (-128)(-2)x^{-3} +2 = (256)/(x^3) + 2$, de donde A ''(4) = (256)/(64) + 2 = 6 > 0, luego es un mínimo y las dimensiones de la caja son base cuadrada de 4dm y altura de 2dm

Ejercicio nº 3 de la opción B del modelo 4 de 2004

Considera el sistema de ecuaciones

$$mx + 2y + z =2$$
$$x + my = m$$
$$2x + mz =0$$

(a) [0'5 puntos] Determina los valores de m para los que x = 0, y =1 y z = 0 es solución del sistema.
(b) [1 punto] Determina los valores de m para los que el sistema es incompatible.
(c) [1 punto] Determina los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones.

Solución

(a)

Si en el sistema

$$\begin{aligned} mx + 2y + z &= 2 \\ x + my &= m \\ 2x + mz &= 0 \end{aligned}$$

Entramos con la solución x = 0, y =1 y z = 0, obtenemos

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ m &= m \\ 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lo cual tiene sentido sea cual sea el valor de m, siempre que m me haga el sistema compatible.

(b)

Vamos a estudiar el sistema

$$\begin{aligned} mx + 2y + z &= 2 \\ x + my &= m \\ 2x + mz &= 0 \end{aligned}$$

despacio.

Sea A = $\begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 2 & 0 & m \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 & 2 \\ 1 & m & 0 & m \\ 2 & 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

En A, |A| = $\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix}$ = {desarrollo por los adjuntos de la última fila} =

= 2(-m) – 0 + m(m^2 – 2) = m^3 – 4m.

$m^3 - 4m = 0 = m(m^2 - 4)$, de donde lñas soluciones son m = 0, m = 2 y m = - 2.

Si m ≠ 0, m ≠ 2 y m ≠ -2, |A| ≠ 0, por tanto rango(A) = rango(A^*) = 3 y el sistema es compatible y determinado.

Si m = 0

A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

En A como $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ = -2 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 ≠ 0, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible e indeterminado, luego tiene infinitas soluciones.

Si m = 2

A = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 2 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 ≠ 0, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible e indeterminado, luego tiene infinitas soluciones.

Si m = - 2

A = $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y A^* = $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

En A como $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ = 2 ≠ 0, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 ≠ 0, rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible e indeterminado, luego tiene infinitas soluciones.

A mi no me ha salido ningún valor de m para el cual el sistema sea incompatible.

Ejercicio n° 4 de la opción B del modelo 4 de 2004

[2'5 puntos] Considera los puntos P (6,-1,-10), Q(0, 2, 2) y R, que es el punto de intersección del plano $\pi \equiv 2x + \lambda y + z - 2 = 0$ y la recta r ≡ $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y=1 \end{cases}$

Determina λ sabiendo que los puntos P , Q y R están alineados.

Solución

Como R es el punto intersección de la recta "r" y el plano "π", ponemos la ecuación de la recta "r" en forma paramétrica o en forma vectorial, sustituimos en el plano y obtendremos las coordenadas de R

En la recta r ≡ $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y=1 \end{cases}$, tomando z = μ, tenemos x = - z = - μ, luego su ecuación vectorial es (x,y,z) = (-μ, 1, μ)

Sustituyo en el plano

2(-μ) + λ(1) + μ – 2 = 0, de donde μ = λ - 2

El punto R es R(x,y,z) = R(-μ, 1, μ) = R(-λ + 2, 1, λ - 2)

Como los puntos P , Q y R están alineados, las coordenadas de los vectores **PQ** y **PR** son proporcionales:

PQ = (-6, 3, 12)

PR = (-λ + 2 -6, 1 – (-1), λ - 2 – (-10)) = (-λ - 4, 2, λ + 8)

$\frac{-\lambda-4}{-6} = \frac{2}{3} = \frac{\lambda+8}{12}$, de donde:

$\frac{-\lambda-4}{-6} = \frac{2}{3}$, es decir -3λ - 12 = -12, luego -3λ = 0,   y   λ = 0

$\frac{2}{3} = \frac{\lambda+8}{12}$, es decir 24 = 3λ + 24, luego 3λ = 0,   y λ = 0

Por tanto λ = 0