

Opción A

Ejercicio n° 1 de la opción A del modelo 4 de 2005

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (5x + 8) / (x^2 + x + 1)$.

(a) [0'5 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados.

(b) [0'5 puntos] Halla las asíntotas de la gráfica de f .

(c) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(d) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

Solución

$$f(x) = (5x + 8) / (x^2 + x + 1)$$

(a) Corte con los ejes

Para $x = 0$, punto $(0, f(0)) = (0, 8)$

Para $f(x) = 0$, tenemos $5x + 8 = 0$, de donde $x = -8/5$. Punto $(-8/5, 0)$

(b) Asíntotas

Resolvemos el denominador igualado a cero

$x^2 + x + 1 = 0$, y vemos que no tiene ninguna solución real, por tanto la función no tiene asíntotas verticales (A.V.)

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x+8}{x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x} = 0$, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal (A.H.) de la gráfica de f tanto en $+\infty$ como en $-\infty$.

Veamos su posición relativa.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \text{asíntota}) = 0^+$, $f(x)$ está por encima de la A.H. en $+\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \text{asíntota}) = 0^-$, $f(x)$ está por debajo de la A.H. en $-\infty$.

(c) Monotonía. Estudio de $f'(x)$

$$f(x) = (5x + 8) / (x^2 + x + 1)$$

$$f'(x) = [5(x^2 + x + 1) - (5x + 8)(2x + 1)] / (x^2 + x + 1)^2 = (-5x^2 - 16x - 3) / (x^2 + x + 1)^2$$

Los posibles máximos o mínimos relativos son las soluciones de $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0$, de donde $-5x^2 - 16x - 3 = 0$. Resolviéndolo se obtiene $x = -1/5$ y $x = -3$.

Como $f'(-4) = -19/(+) < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, -3)$

Como $f'(-2) = 9/(+) > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-3, -1/5)$

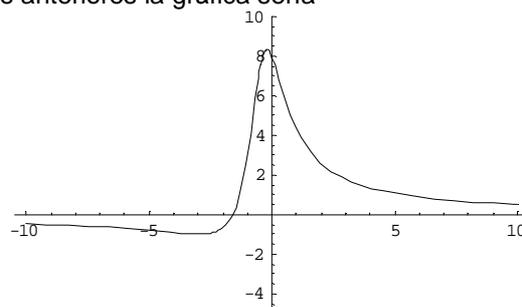
Como $f'(0) = -3/(+) < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-1/5, +\infty)$

Por definición $x = -3$ es un mínimo relativo que vale $f(-3) = -1$

Por definición $x = -1/5$ es un máximo relativo que vale $f(-1/5) = 25/3$

(d) Esbozo de la gráfica de f

Teniendo en cuenta los apartados anteriores la gráfica sería



Ejercicio n° 2 de la opción A del modelo 4 de 2005

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

- (a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 3$.
 (b) [1'75 puntos] Calcula el área de la región acotada que esta limitada por el eje de ordenadas, por la gráfica de f y por la recta tangente obtenida.

Solución

$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

(a)

La recta tangente en $x = 3$ es $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$

$$f(x) = x^2 - 5x + 4, \text{ de donde } f(3) = -2$$

$$f'(x) = 2x - 5, \text{ de donde } f'(3) = 1.$$

Luego la recta es $y - (-2) = 1(x - 3)$, es decir $y = x - 5$

(b)

Dibujamos la parábola y la recta tangente que nos ayudarán a calcular el área pedida

$$f(x) = x^2 - 5x + 4.$$

$$f'(x) = 2x - 5.$$

El vértice (mínimo) lo obtenemos de $f'(x) = 0$, es decir $2x - 5 = 0$, de donde $x = 5/2$.

$$\text{Vértice } V(2.5, f(2.5)) = V(2.5, -2.25)$$

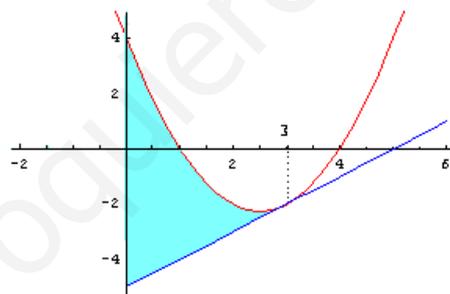
Cortes con los ejes

$$\text{Para } x = 0, \text{ punto } (0, f(0)) = (0, 4)$$

$$\text{Para } f(x) = 0, \text{ tenemos } x^2 - 5x + 4 = 0, \text{ de donde } x = 1 \text{ y } x = 4. \text{ Puntos } (1, 0) \text{ y } (4, 0)$$

Para la recta $y = x - 5$, tenemos los puntos $(0, -5)$ y $(5, 0)$

Las gráficas conjuntas son



El área pedida es la señalada en color azul, que es

$$\text{Área} = \int_0^3 [(parabola) - (tangente)] dx = \int_0^3 [(x^2 - 5x + 4) - (x - 5)] dx = = =$$

$$\int_0^3 [x^2 - 6x + 9] dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_0^3 = (9 - 27 + 27) - (0) = 9 \text{ u}^2$$

Ejercicio n° 3 de la opción A del modelo 4 de 2005

Sea I la matriz identidad de orden 2 y sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) [1 punto] Halla los valores de x para los que la matriz $A - xI$ no tiene inversa.

(b) [1'5 puntos] Halla los valores de a y b para los que $A^2 + aA + bI = O$.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A - xI$ no tiene inversa si y solo si $\det(A - xI) = |A - xI| \neq 0$

$$A - xI = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$|A - xI| = \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$$

Resolviendo $x^2 - 4x + 3 = 0$, obtenemos $x = 1$ y $x = 3$, por tanto la matriz $A - xI$ no tiene inversa si $x = 1$ y $x = 3$.

(b)

$$A^2 + aA + bI = O$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$aA = a \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 1a \\ 1a & 2a \end{pmatrix};$$

$$bI = b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$A^2 + aA + bI = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 1a \\ 1a & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2a+b & 4+a \\ 4+a & 5+2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Igualando miembro a}$$

miembro tenemos:

$$4 + a = 0, \text{ de donde } a = -4$$

$$5 + 2a + b = 0, \text{ de donde } b = -5 + 8 = 3$$

Ejercicio n° 4 de la opción A del modelo 4 de 2005

[2'5 puntos] Calcula la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x=6+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=5-7\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$

Solución

$$\text{Distancia entre } r \equiv \begin{cases} x=6+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=5-7\lambda \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$$

Tomamos un punto y un vector de cada recta

De la recta r punto el $A(6, 1, 5)$ y vector $\mathbf{u} = (1, -2, -7)$

De la recta s punto el B y vector \mathbf{v}

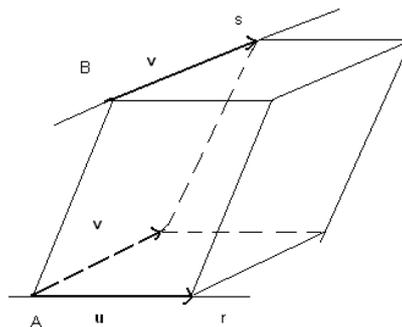
El punto B se obtiene resolviendo el sistema $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x-y-2=0 \end{cases}$, que sale $x = y = 1$, y tomando $z = 0$. Punto $B(1, 1, 0)$

El vector \mathbf{v} es paralelo al producto vectorial de los vectores normales que determinan cada plano de la recta s ,

es decir $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(7) = (0, 0, 7)$. Tomamos como vector director otro más sencillo (paralelo,

proporcional) que sería el $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$

Hay varias formas de calcular la distancia entre dos rectas. Vamos a utilizar la del volumen del paralelepípedo.



Volumen paralelepípedo = $|\{\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}| = (\text{Área de la base}) \cdot (\text{altura}) = \|\mathbf{uxv}\| \cdot d(r, s)$, de donde
 $d(r, s) = (|\{\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}|) / (\|\mathbf{uxv}\|)$

$\mathbf{AB} = (-5, 0, -5)$; $\mathbf{u} = (1, -2, -7)$ y $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$

$$\{\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(10) = 10$$

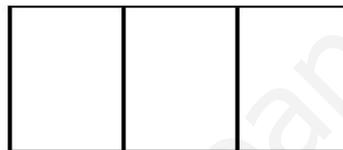
$$\mathbf{uxv} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2) - \mathbf{j}(1) + \mathbf{k}(0) = (-2, -1, 0); \|\mathbf{uxv}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Luego $d(r, s) = (|\{\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}|) / (\|\mathbf{uxv}\|) = 10 / \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$ u.l.

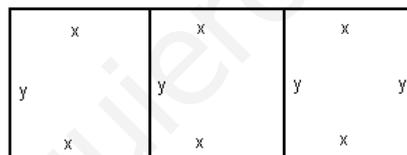
Opción B

Ejercicio n° 1 de la opción B del modelo 4 de 2005

[2'5 puntos] De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12.800 m^2 dividido en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Si se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas), determina las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución



Área = $3x \cdot y = 12800$, de donde $y = 12800/3x$

Longitud $L = 6x + 4y$

Minimizamos la función $L = 6x + 4y = 6x + 4(12800/3x) = 6x + 51200/3x$

$L(x) = 6x + 51200/3x$

$L'(x) = 6 + (51200/3)(-1/x^2)$

Resolvemos la ecuación $L'(x) = 0$, de donde $(51200/3)(1/x^2) = 6$, por tanto $x^2 = 25600/9$ y las soluciones son $x = \pm 160/3$.

Como las soluciones son distancias han de ser positivas luego $x = 160/3$. Veamos que efectivamente es un mínimo con la segunda derivada.

$L'(x) = 6 + (51200/3)(-1/x^2)$

$L''(x) = (51200/3)(-1(-2x/x^4)) = (102400/3)(1/x^3)$

$L''(160/3) = (102400/3)(1/(160/3)^3) > 0$, luego $x = 160/3$ es un mínimo.

Las dimensiones pedidas son $3x = 160 \text{ m}$. de largo e $y = 12800/160 = 80 \text{ m}$. de ancho.

Ejercicio n° 2 de la opción B del modelo 4 de 2005

Calcula las siguientes integrales:

(a) [0'5 puntos] $\int \cos(5x + 1) dx$.

(b) [0'5 puntos] $\int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}} dx$

(c) [1'5 puntos] $\int_0^1 x e^{-3x} dx$

Solución

(a) $\int \cos(5x + 1) dx = [\text{sen}(5x + 1)] / 5 + K$

$$(b) \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}} dx = \int \frac{1}{(x+2)^{3/2}} dx = \int (x+2)^{-3/2} dx = \frac{(x+2)^{-3/2+1}}{-3/2+1} + K = \frac{-3}{\sqrt{x+2}} + K$$

$$(c) \int_0^1 x e^{-3x} dx$$

$$I = \int_0^1 x e^{-3x} dx$$

$I_1 = \int x e^{-3x} dx$ es una integral por partes

$$(\text{Aplicamos } \int u dv = uv - \int v du)$$

Tomamos $u = x$ y $dv = e^{-3x} dx$, con lo cual $du = dx$ y $v = \int e^{-3x} dx = (e^{-3x})/(-3)$

$I_1 = \int x e^{-3x} dx = x \cdot [(e^{-3x})/(-3)] + (1/3) \cdot \int e^{-3x} dx = (-x \cdot e^{-3x})/3 - (e^{-3x})/9$. Luego

$$I = \int_0^1 x e^{-3x} dx = \left[\frac{-x \cdot e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} \right]_0^1 = (-e^{-3}/3 - e^{-3}/9) - (0 - 1/9) = (-4/9) \cdot e^{-3} + 1/9$$

Ejercicio n° 3 de la opción B del modelo 4 de 2005

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 0 \\ x + y + (m + 4)z &= my \\ 2x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

- (a) [1 punto] Determina los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.
 (b) [1'5 puntos] Resuelve el sistema cuando tenga infinitas soluciones y da una solución en la que $z = 19$.

Solución

$$\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 0 \\ x + y + (m + 4)z &= my \\ 2x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

Si observamos es un sistema homogéneo

$$\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 0 \\ x + (1 - m)y + (m + 4)z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

(a)

Los sistemas homogéneos de tres ecuaciones con tres incógnitas tienen solución única $(0, 0, 0)$ si el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1-m & m+4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5[(1-m)+3m+12] - 2(1-2m-8) + (-1)(-3-2+2m) = 12m + 84$$

Resolviendo $12m + 84 = 0$ tenemos $m = -7$, por tanto para $m \neq -7$ el sistema tiene solución única.

(b)

Si $|A| = 0$, como $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 4 = -19 \neq 0$ tenemos que $\text{rango}(A) = 2$, el sistema es compatible e

indeterminado. Tenemos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Tomo la 1ª y la 3ª (son las que he utilizado para el determinante de orden 2)

$$5x + 2y - z = 0$$

$$2x - 3y + z = 0; \text{ Haciendo } z = t \in \mathfrak{R}, \text{ y resolviendo el sistema}$$

$$5x + 2y = t$$

$$2x - 3y = -t; \text{ obtenemos } x = t/19 \text{ e } y = 7t/19, \text{ por tanto la solución del sistema es}$$

$$(x, y, z) = (t/19, 7t/19, t) \text{ con } z = t \in \mathfrak{R}.$$

Nos piden una solución con $z = 19$, luego $t = 19$ y la solución es $(x, y, z) = (1, 7, 19)$.

Ejercicio n° 4 de la opción B del modelo 4 de 2005

Sean $A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$ los vértices de un triángulo.

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.

(b) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a π y pasa por el origen de coordenadas.

(c) [1 punto] Calcula el área del triángulo ABC .

Solución

$A(-3, 4, 0)$, $B(3, 6, 3)$ y $C(-1, 2, 1)$ vértices de un triángulo.

(a)

Para un plano necesitamos un punto y dos vectores independientes, en nuestro caso para el plano que contiene al triángulo de vértices ABC tomamos como punto el A y como vectores el **AB** y el **AC**.

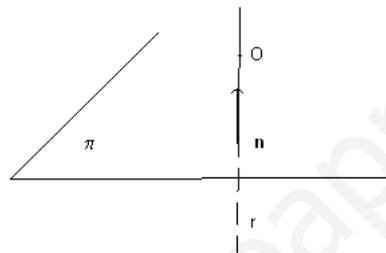
$A(-3, 4, 0)$

$\mathbf{AB} = (6, 2, 3)$

$\mathbf{AC} = (2, -2, 1)$

$$\text{El plano pedido es } \pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = \begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z-0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (x+3)(8) - (y-4)(0) + z(-16) = 8x - 16z + 24 = 0$$

(b)



La recta perpendicular al plano π que pasa por el origen $O(0, 0, 0)$ tiene como vector director \mathbf{v} el vector normal del plano $\mathbf{n} = (8, 0, -16)$.

$$\text{La recta pedida es } r \equiv \begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \\ z = -16t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

(c)

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determina, que sabemos es el módulo del producto vectorial de los vectores **AB** y **AC**, es decir

$$\text{Área} = (1/2) \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 16^2} = \frac{1}{2} \sqrt{320} \text{ u}^2$$

$\mathbf{AB} = (6, 2, 3)$

$\mathbf{AC} = (2, -2, 1)$

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(8) - \vec{j}(0) + \vec{k}(-16) = (8, 0, -16)$$