Opción A

Ejercicio nº 1 de la opción A del modelo 2 de 2005

Sea f la función definida para x ≠ por f(x) = e^x /(x – 1)
(a) [0'5 puntos] Halla las asíntotas de la gráfica de f.
(b) [0'75 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
(c) [0'75 puntos] Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f.
(d) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

Solución

f(x) = e^x /(x – 1)
(a)
Asíntotas

Como $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$, la recta x = 1 es una asíntota vertical (A.V.) de la gráfica de f

$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$, para ver la posición relativa.

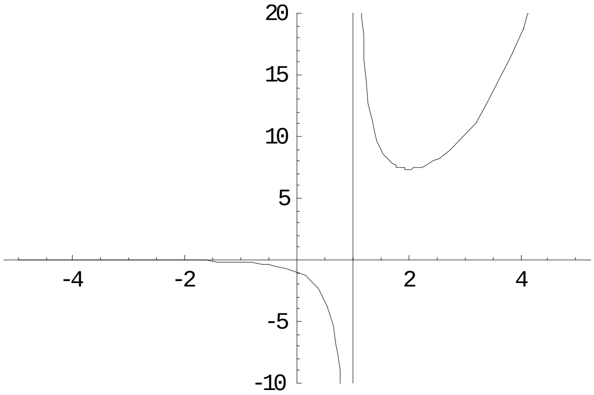
Como $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{-x-1} \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^x(-x-1)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$, la recta y = o es una asíntota horizontal (A.H.) de la gráfica de f.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$, aplicándole la regla de L'Hôpital

(si f(x) y g(x) son continuas en [a – r, a + r], derivables en (a – r, a + r), con f(a) = g(a) = 0, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar y también es cierta cuando salga ∞/∞, y cuando x → ∞)

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \{L'Hopital\} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$

(b)
Monotonía. Estudiamos la primera derivada f '(x)
f(x) = e^x /(x – 1)
f '(x) = [e^x (x – 1) – e^x] /$(x – 1)^2$ = [e^x (x – 2)] /$(x – 1)^2$.
Resolviendo f '(x) = 0, tenemos x – 2 = 0, porque e^x siempre es positivo, de donde x = 2, que es el posible máximo o mínimo relativo.
Como f ' (0) = [e^0 (- 2)] /$(-1)^2$ < 0, f(x) es estrictamente decreciente en el intervalo (-∞, 2)
Como f ' (3) = [e^3 (1)] /$(2)^2$ > 0, f(x) es estrictamente creciente en el intervalo (2, +∞) – {1}, puesto que en 1 la función nos han dicho que no está definida.
Por definición x = 2 es un mínimo relativo que vale f(x) = e^2 /(1) ≅ 7'4
(c)
Curvatura. Estudiamos la segunda derivada f ''(x)
f(x) = e^x /(x – 1)
f '(x) = [e^x (x – 2)] /$(x – 1)^2$.
f ''(x) = { [e^x (x – 2) + e^x]$(x – 1)^2$ - e^x (x – 2)2(x – 1) } /$(x – 1)^4$ = [e^x (x – 1)(x^2 – 4x + 5)] /$(x – 1)^4$.
Resolviendo f ''(x) = 0, tenemos (x – 1)(x^2 – 4x + 5) = 0, porque e^x siempre es positivo, de donde x = 1, (recordamos que era una A.V.), y de x^2 – 4x + 5 = 0 no obtenemos ninguna solución porque nos sale la raíz de un número negativo en la solución d dicha ecuación.
Como f '' (0) = [e^0 (– 1)(+ 5)] /(1) < 0, f(x) es cóncava (∩) en el intervalo (-∞, 1)
Como f ' (2) = [e^2 (1)(4 – 8 + 5)] /(1) > 0, f(x) es convexa (∪) en el intervalo (1, +∞).
(d)
Un esbozo de la función, sabiendo lo anterior y que f(0) = -1 es



Ejercicio nº 2 de la opción A del modelo 2 de 2005

[2'5 puntos] Calcula la integral $\int\left(\frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}\right)dx$

Solución

Dividimos $3x^3 + x^2 - 10x + 1$ entre $x^2 - x - 2$, puesto que es una integral racional y tenemos que tener previamente el numerador con grado inferior al denominador

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + x^2 - 10x + 1 & x^2 - x - 2 \\ \cline{2-2} -3x^3 + 3x^2 + 6x & 3x + 4 \\ \hline 4x^2 - 4x + 1 & \\ -4x^2 + 4x + 8 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$I = \int\left(\frac{3x^3+x^2-10x+1}{x^2-x-2}\right)dx = \int\left(3x+4+\frac{9}{x^2-x-2}\right)dx = 3x^2/2 + 4x + I_1$

$I_1 = \int\left(\frac{9}{x^2-x-2}\right)dx = \int\left(\frac{9}{(x-2)(x+1)}\right)dx = \int\left(\frac{A}{(x-2)}\right)dx + \int\left(\frac{B}{(x+1)}\right)dx =$

$= A.Ln|x-2| + B.Ln|x+1| = [*] = (3).Ln|x-2| + (-3).Ln|x+1|$

[*] Calculamos A y B

$[(9)] / [(x-2)(x+1)] = A / (x-2) + B / (x+1) = [A(x+1) + B(x-2)] / ([x-2)(x+1)]$

Igualando numeradores tenemos $9 = A(x+1) + B(x-2)$

Para $x = 2$, nos resulta $9 = 3A$ de donde $A = 9/3 = 3$

Para $x = -1$, nos resulta $9 = (-3)B$ de donde $B = -9/3 = -3$

Por tanto la integral pedida es

$I = 3x^2/2 + 4x + I_1 = 3x^2/2 + 4x + (3).Ln|x-2| + (-3).Ln|x+1| + K$

Ejercicio nº 3 de la opción A del modelo 2 de 2005

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ mx + 2z &= 0 \\ my - z &= m \end{aligned}$$

(a) [1 punto] Determina los valores de m para los que el sistema tiene una única solución. Calcula dicha solución para m = 1.

(b) [1 punto] Determina los valores de m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcula dichas soluciones.

(c) [0'5 puntos] ¿Hay algún valor de m para el que el sistema no tiene solución?

Solución

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ mx + 2z &= 0 \\ my - z &= m \end{aligned}$$

(a)

Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de kos coeficientes y A* = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Para que el sistema tenga solución única, por el Teorema de Rouche, rango(A) = rango(A*) = 3, por tanto el determinante de A tiene que ser distinto de cero.

|A| = $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix}$ = 1(-2m) – 3(-m) + 1(m^2) = m^2 + m

Igualándolo a cero m^2 + m = m(m +1) = 0, de donde m = 0 y m = -1. Por tanto **para m ≠ 0 y m ≠ -1 el sistema tiene solución única.**

Si m = 1

El sistema es

x + 3y + z = 5		x + 3y + z = 5		x + 3y + z = 5
x + 2z = 0	2ª + 1ª(-1)	-3y + z = -5	2ª + 3ª	-2y = -4
y - z = 1		y – z = 1		y – z = 1

De -2y = -4 tenemos y = 2, con lo cual 2 – z = 1, de donde z = 1. Entrando en la 1ª ecuación x + 3(2) + (1) = 5 , con lo cual x = -2.

La solución única con m = 1 es (x, y, z) = (-2, 2,1)

Veamos que ocurre cuando m = 0 y m = -1

Si m = 0

El sistema es

x + 3y + z = 5
2z = 0
- z = 0

De la 2ª y de la 3ª obtenemos z = 0
En la 1ª ecuación tomando y = t, tenemos x = 5 – 3t

La solución con m = 0 es (x, y, z) = (5 – 3t, t, 0) con t $\in \Re$, es decir es un sistema compatible e indeterminado que tiene infinitas soluciones.

Si m = -1

El sistema es

x + 3y + z = 5		x + 3y + z = 5		x + 3y + z = 5
-x + 2z = 0 → 2ª + 1ª	→	3y + 3z = 5	→ 2ª + 3ª(3) →	0 = 2
-y - z = -1		-y – z = -1		-y – z = -1

De la 2ª ecuación obtenemos 0 = 2, lo cual es absurdo y el sistema no tiene solución. Es un sistema incompatible.

Ejercicio n° 4 de la opción A del modelo 2 de 2005

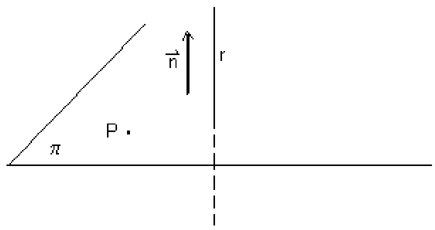
Sea el punto P (1, 0, - 3) y la recta r ≡ $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a r.
(b) [1'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

Solución

P (1, 0, - 3) y la recta r ≡ $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z = 0. \end{cases}$

(a)



Ponemos la recta r ≡ $\begin{cases} 2x-y-1=0 \\ x+z=0. \end{cases}$ en paramétricas.

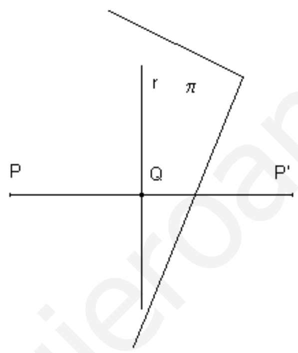
Tomando x = t, tenemos z = -t e y = -1 + 2t, luego la recta es r ≡ $\begin{cases} x=t \\ y=-1+2t \\ z=-t \end{cases}$, con lo cual su vector director es **v** = (1, 2, -1)

El plano π al ser perpendicular a la recta r tiene como vector normal **n** el vector director de la recta **v** = (1, 2, -1)

El plano π pedido es el producto escalar **n•PX** = 0

n•PX = 0 = (1, 2, -1) •(x-1, y, z+3) = x-1+2y-z-3 = x+2y-z-4 = 0

(b)



Para calcular el simétrico del punto P respecto a la recta r, trazamos el plano que pasa por P y es perpendicular a la recta r. Dicho plano es el que hemos calculado en el apartado (a) π ≡ x+2y-z-4 = 0.

Determinamos el punto Q con intersección de la recta r con el plano π (sustituimos la ecuación de la recta en el plano, determinamos el valor del parámetro t y obtenemos Q).

(t) + 2(-1+2t) – (-t) - 4 = 0, de donde 6t - 6 = 0 y t = 1. El punto Q es

Q(1, -1+2(1), -(1)) = Q(1, 1, -1)

Q es el punto medio del segmento PP', siendo P' el punto simétrico buscado

(1, 1, -1) = ((1+x)/2, y/2, (-3+z)/2), de donde

1 = (1+x)/2 con lo cual x = 1

1 = y/2 con lo cual y = 2

-1 = (-3+z)/2 con lo cual z = 1

El punto simétrico pedido es P(1, 2, 1).

Opción B

Ejercicio n° 1 de la opción B del modelo 2 de 2005

[2'5 puntos] Determina los puntos de la parábola de ecuación y = 5 - x^2 que están mas próximos al origen de coordenadas. Calcula la distancia entre los puntos obtenidos y el origen de as coordenadas.

Solución

Los puntos mas próximos a la parábola de ecuación y = 5 – x^2, que están más próximos al origen de coordenadas O(0, 0), son los que hacen mínima la distancia del 0punto O(0, 0) al punto X(x, y) 0X(x, 5- x^2).

Minimizamos f(x) = d(O,X) = **||OX||** = $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x)^2+(5-x^2)^2} = \sqrt{x^4-9x^2+25}$

f(x) = $\sqrt{x^4-9x^2+25}$

f '(x) = $\dfrac{4x^3-18x}{2\sqrt{x^4-9x^2+25}}$

Resolvemos f '(x) = 0, con lo cual $4x^3 - 18x = 0 = x(4x^2 - 18) = 0$, de donde x = 0 y $4x^2 - 18 = 0$, cuyas soluciones son x = $\pm\sqrt{\dfrac{9}{2}} = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Los posibles máximos o mínimos son x = 0 y x = $\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Sabemos que si f '(a) =0 y f ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo de f(x)
Sabemos que si f '(a) =0 y f ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo de f(x)
En nuestro caso

f ''(x) = $\dfrac{(12x^2-18)\left[2\sqrt{x^4-9x^2+25}\right]-(4x^3-18x)2\left[\dfrac{4x^3-18x}{2\sqrt{x^4-9x^2+25}}\right]}{\left(2\sqrt{x^4-9x^2+25}\right)^2}$

Como f ''(0) = -180 < 0, x = 0 es un máximo relativo

Como f ''($\dfrac{3}{\sqrt{2}}$) = $36\sqrt{19}$ > 0, x = $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ es un mínimo relativo

Como f ''($-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$) = $36\sqrt{19}$ > 0, x = $\dfrac{-3}{\sqrt{2}}$ es un mínimo relativo

Luego los puntos más próximos a la parábola y = 5 – x^2 son $A\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, f\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = A\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right)$ y

$B\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}}, f\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = B\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right)$

La distancia de dichos puntos A y B al origen O es la misma y es

||OA|| = **||OB||** = $\sqrt{\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$ u. l.

Ejercicio n° 2 de la opción B del modelo 2 de 2005

Se sabe que la función f : [0,+ ∞) → R definida por f(x) = $\begin{cases} \sqrt{ax} & si \quad 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & si \quad x > 8 \end{cases}$ es continua en [0,+ ∞).

(a) [0'5 puntos] Halla el valor de a.

(b) [2 puntos] Calcula $\int_0^{10} f(x)dx$.

Solución

(a)

f(x) = $\begin{cases} \sqrt{ax} & si \quad 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & si \quad x > 8 \end{cases}$ es continua en [0,+ ∞), en particular en x = 8 luego

$f(8) = \lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^+} f(x)$

$f(8) = \lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 8\\ x<8}} f(x) = \lim_{x\to 8} \sqrt{ax} = \sqrt{8a}$

$\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 8\\ x>8}} f(x) = \lim_{x\to 8} \dfrac{x^2-32}{x-4} = \dfrac{64-32}{8-4} = 8$

Igualando $\sqrt{8a} = 8$, de donde 8a = 64 y a = 8.

(b)

I = $\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{8} f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{8} \sqrt{8x}dx + \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}dx$ = $I_1 + I_2$

$\int \sqrt{8x}dx = \int (8x)^{1/2}dx = \frac{(8x)^{1/2+1}}{8\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{(8x)^3}}{12}$; $I_1 = \int_0^8 \sqrt{8x}dx = \left[\frac{\sqrt{(8x)^3}}{12}\right]_0^8 = \frac{8^3}{12} = \frac{128}{3}$

La integral $\int \frac{x^2-32}{x-4}dx$ es racional por tanto antes de calcularla hemos de dividir el numerador entre el denominador para que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador.

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 32 & x - 4 \\ \hline -x^2 + 4x & x + 4 \\ \hline 4x - 32 & \\ -4x + 16 & \\ \hline -16 & \end{array}$$

$\int \frac{x^2-32}{x-4}dx = \int \left(x+4+\frac{-16}{x-4}\right)dx = \frac{x^2}{2} + 4x - 16Ln|x-4|$

$I_2 = \int_8^{10} \frac{x^2-32}{x-4}dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x - 16Ln|x-4|\right]_8^{10}$ = (50 + 400 – 16Ln(6)) – (32 + 32 – 16Ln(4)) =

= 386 + 16Ln(4) – 16Ln(6) = 386 + 16Ln(4/6) = 386 + 16Ln(2/3)

I = $I_1 + I_2$ = (128/3) + 386 + 16Ln(2/3) = (2182/3) + 16Ln(2/3).

Ejercicio n° 3 de la opción B del modelo 2 de 2005

[2'5 puntos] Halla la matriz X que cumple que A.X.A – B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

A.X.A – B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ = O, siendo A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

A.X.A – B = O, de donde A.X.A = B

Existe la inversa de A si det(A) = |A| ≠ 0

|A| = $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$ = -3 + 2 = - 1 ≠ 0

Como existe la inversa A^{-1}, multiplicamos por la derecha y la izquierda A.X.A = B

A^{-1}. A.X.A.A^{-1} = A^{-1}. B. A^{-1}

I.X.I = A^{-1}. B. A^{-1}

X = A^{-1}. B. A^{-1}

A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; Adj($A^t$) = $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) = (-1). $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

X = A^{-1}. B. A^{-1} = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio n° 4 de la opción B del modelo 2 de 2005

Se sabe que los puntos A(m, 0, 1), B(0, 1, 2), C (1, 2, 3) y D(7, 2, 1) están en un mismo plano.

(a) [1'5 puntos] Halla m y calcula la ecuación de dicho plano.

(b) [1 punto] ¿Están los puntos B, C y D alineados?

Solución

Es mas corto resolver primero el apartado (b) y después, utilizándolo, el (a).

(b)

Los puntos B(0, 1, 2), C (1, 2, 3) y D(7, 2, 1) están alineados si las coordenadas de los vectores **BC** y **BD** son proporcionales.
BC = (1, 1, 1)
BD = (7, 1, -1)
Evidentemente las coordenadas de los vectores **BC** y **BD** no son proporcionales, por tanto no están alineados y con dichos puntos podemos formar un plano.
(a)
Formamos el plano determinado por los puntos B(0, 1, 2), C (1, 2, 3) y D(7, 2, 1). Tomo como punto el B(0,1,2) y como vectores independientes **BC** = (1, 1, 1) y **BD** = (7, 1, -1)

Plano $\pi \equiv$ det(**BX, BC, BD**) = $\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = (x)(-2) – (y-1)(-8) + (z-2)(-6) = -2x +8y – 6z +4 = 0.

Si los puntos A(m, 0, 1), B(0, 1, 2), C (1, 2, 3) y D(7, 2, 1) están en un mismo plano, están en el plano determinado por los puntos A, B y C, es decir en el plano $\pi \equiv$ -2x +8y – 6z +4 = 0, por tanto el punto A debe de verificar la ecuación de dicho plano
-2(m) + 8(0) – 6(1) + 4= 0
-2m -2 = 0, de donde m = -1, para que A, B, C y D estén en el mismo plano.