Opción A

Ejercicio nº 1 de la Opción A del modelo 1, Junio de 2005

[2'5 puntos] De la función f : R → R definida por f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo en x = -1, y que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa x = -2 y tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x = 0. Calcula a, b, c y d sabiendo, además, que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2 tiene pendiente 9.

Solución

f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene por dominio $\Re$, por tanto es continua y derivable las veces que nos haga falta en R.

x = - 1 es un máximo, por tanto f '(-1) = 0
La gráfica corta al eje OX en x = -2, por tanto f(-2) = 0
x = 0 es un punto de inflexión, por tanto f ''(0) = 0
La recta tangente en x = 2 tiene de pendiente 9, por tanto f '(2) = 9

f (x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$
f '(x) = $3ax^2 + 2bx + c$
f ''(x) = 6ax + 2b

De f ''(0) = 0, tenemos 0 = 0 + 2b, de donde b = 0

De f '(-1) = 9, tenemos $0 = 3a(-1)^2 + c$, de donde 3a + c = 0
De f '(2) = 9, tenemos $9 = 3a(2)^2 + c$, de donde 12a + c = 9

Restando estas dos últimas ecuaciones tenemos 9a = 9 de donde a = 1

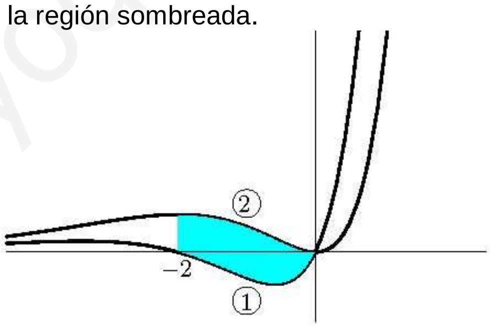
Entrando con a = 1 en 3a + c = 0, nos resulta c = -3

De f (-2) = 0, tenemos $0 = 1(-2)^3 + 0 + (-3)(-2) + d$, de donde d = 2

Por tanto los números pedidos son a = 1, b = 0, c = -3 y d = 2

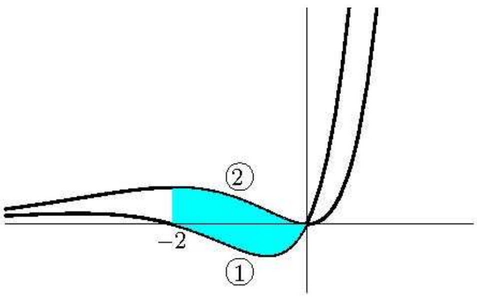
Ejercicio nº 2 de la Opción A del modelo 1, Junio de 2005

Se sabe que las dos gráficas del dibujo corresponden a la función f : R → R definida por f (x) = x^2e^x y a su función derivada f '.
(a) [1 punto] Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f'.
(b) [1'5 puntos] Calcula el área de la región sombreada.



Solución

(a)



f(x) = x^2e^x

Esta función tiene por dominio $\Re$, es continua y derivable las veces que nos haga falta en $\Re$. También vemos que esta función f(x) siempre es positiva (f(x) > 0), puesto que es el producto de x^2 que siempre es positiva con la exponencial e^x que siempre es positiva, por tanto la gráfica de la función f(x) es la señalada con el número 2, pues está dibujada siempre por encima del eje de abscisas OX y la de su derivada f '(x) = $2xe^x + x^2e^x$ es la señalada con el número 1 pues tiene partes por encima y partes por debajo del eje OX.

Vamos a ver algunos detalles mas de f(x) y de f '(x) para confirmarlo, aunque lo anterior creo que está suficientemente razonado.

$\lim_{x\to\infty} x^2e^x = \infty\cdot\infty = \infty$, efectivamente cuando x tiende a + ∞, f(x) tiene a + ∞, tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

$\lim_{x\to -\infty} x^2e^x = \lim_{x\to\infty} (-x)^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$

Aplicándole la Regla de L'Hôpital tenemos $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$

Volviéndole a aplicar la Regla de L'Hôpital $\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$, con lo cual la recta y = 0 es una asíntota horizontal (A.H.) en - ∞, tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

También se observa que f(0) = 0

Ahora nos fijamos en la gráfica de la figura 1, la de la derivada f '(x)

Vemos que f '(x) > 0 en (- ∞, -2), luego f(x) crece en (- ∞, -2) tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.
Vemos que f '(x) < 0 en (-2,,0), luego f(x) decrece en (-2, 0) tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.
Por definición x = -2 es un máximo relativo de f(x) tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.
Vemos que f '(x) > 0 en (0,+ ∞), luego f(x) crece en (0,+ ∞) tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.
Por definición x = 0 es un mínimo relativo de f(x) tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.

Vemos que f '(x) decrece aproximadamente en (- ∞, -0'5), luego f ''(x) < 0 en (- ∞, -0'5), y por tanto la función f(x) es cóncava (∩) en (- ∞, -0'5), tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.
Vemos que f '(x) crece aproximadamente en (-0'5, +∞), luego f ''(x) > 0 en (-0'5, +∞), y por tanto la función f(x) es convexa (∪) en (-0'5, +∞), tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.
Por definición, aproximadamente x = -0'5 es un punto de inflexión de f(x), tal y como se ve en la gráfica de la figura 2.
(b)
El área pedida es $\int_{-2}^{0}(f(x) - f'(x))\,dx = \int_{-2}^{0}[x^2e^x-(x^2e^x+2xe^x)]\,dx = -2\cdot\int_{-2}^{0}xe^x\,dx = (*)$

Calculamos primero la integral indefinida, que es una integral por partes, y por tanto le aplicaremos la fórmula de $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$

$$\int x\cdot e^x dx = \left\{\begin{array}{ccc} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^x dx & \rightarrow & v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right\} = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x$$

Volvemos ya a la integral definida

$$(*) = -2\int_{-2}^{0} x\cdot e^x dx = -2\left[x\cdot e^x - e^x\right]_{-2}^{0} = -2[(0 - e^0) - (-2e^{-2} - e^{-2})] = 2 - 6e^{-2} \cong 1'1879\ u^2$$

Ejercicio nº 3 de la Opción A del modelo 1, Junio de 2005

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, y C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] ¿Tiene A inversa? En caso afirmativo, calcúlala
(b) [1'5 puntos] Determina la matriz X que cumple que $A.X + C.B^t = B.B^t$, siendo B^t la matriz transpuesta de B.

Solución

(a)
A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ tiene inversa si |A| ≠ 0

|A| = $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ = -4 –3 = -7 ≠ 0, luego A tiene inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}Adj(A^t)$

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, luego $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}Adj(A^t) = \dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}$

(b)

$AX + CB^t = BB^t$, de donde $AX = BB^t – CB^t$

$CB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $BB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$

$AX = BB^t – CB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

Como A tiene inversa multiplicamos por la izquierda por la inversa de A la expresión $AX = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

$A^{-1}\,AX = X = A^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/7 & 6/7 \\ 1/7 & -26/7 \end{pmatrix}$

Ejercicio nº 4 de la Opción A del modelo 1, Junio de 2005

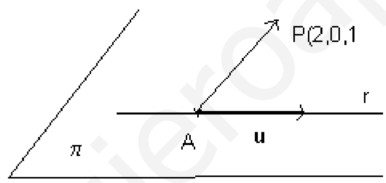
Considera el punto P(2, 0,1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a P y a r.

(b) [1'5 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

Solución

(a)



Normalmente para obtener un plano a partir de una recta y un punto exterior a la recta, se toma como punto del plano un punto de la recta, el A y como vectores el director de la recta **u** y el **AP**, y el plano tiene de ecuación det(**x** – **a**, **u**, **AP**) = 0. Para ello se pone la recta en su ecuación paramétrica

Para poner la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$ en su ecuación paramétrica, tomamos y = a ∈ R, con lo cual tenemos x = 6 – 2a, y la recta en ecuación paramétrica es $r \equiv \begin{cases} x = 6 - 2a \\ y = a \\ z = 2 \end{cases}$.

Un punto de la recta sería A(6, 0, 2) y un vector director es **u** = (-2, 1 , 0)

El otro vector para el plano seria el vector **AP** = (-4, 0, -1)

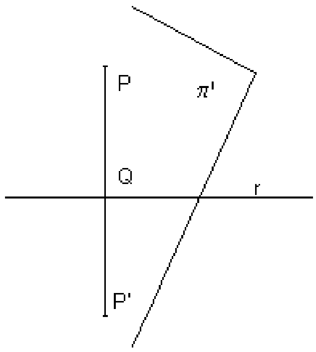
El plano pedido es π ≡ det(**x** – **a**, **u**, **AP**) = 0 = $\begin{vmatrix} x-6 & y & z-2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ = (x – 6)(-1) – y(2 – 0) + (z – 2)(4) =

= -x – 2y + 4z – 2 = 0

Otra forma de hacerlo

Formamos el haz de planos que determinan la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$, que es (x + 2y – 6) + λ(z – 2) = 0, y le imponemos la condición de que pase por el punto P(2, 0, 1), y nos queda (2+0-6) + λ(1 – 2) = 0, de donde λ = - 4, y el plano pedido es (x + 2y – 6) + (-4)(z – 2) = 0. Operando queda x+2y-4z+2=0, y como vemos nos da el mismo plano.

(b)



Para calcular el punto simétrico del punto P respecto de la recta “r”, calculamos la proyección ortogonal de P sobre “r” que es el punto Q, y Q es el punto medio del segmento PP’, siendo P’ el punto simétrico buscado.

Para calcular el punto Q determinamos el plano π’ perpendicular a la recta “r” por el punto P.
El vector normal del plano **n** es el director de la recta **u** = (-2,1, 0). Del apartado (a)
El plano π’ es el producto escalar (•) del vector **n** con el vector **x** – **p** = (x – 2, y - 0, z – 1) igualado a 0
π’≡ **n•** (**x** – **p**) = 0 = -2(x – 2) + 1(y - 0) + 0(z - 1) = -2x +y + 4 = 0

Q es la intersección del plano π’ con la recta “r”

La recta en su forma paramétrica es $r \equiv \begin{cases} x = 6-2a \\ y = a \\ z = 2 \end{cases}$, luego sustituyendo tenemos –2(6 – 2a) + (a) + 4 = 0, de donde a = 8/5 y el punto Q es Q(x,y,z) = Q(6 –2(8/5), 8/5, 2) = Q(14/5, 8/5,2)

Q es el punto medio del segmento PP’

(14/5, 8/5,2) = ((x+2)/2, (y+0)/2, (z+1)/2)
De (x+2)/2 = 14/5, obtenemos x = 18/5
De (y+0)/2 = 8/5, obtenemos y = 16/5
De (z+1)/2 = 2, obtenemos z = 3

El simétrico buscado es el punto P’(18/5, 16/5, 3)

Opción B

Ejercicio nº 1 de la Opción B del modelo 1, Junio de 2005

Sea f la función definida para x ≠ 0 por f(x) = $\dfrac{x^2+1}{x}$
(a) [1 punto] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f.*
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).
(c) [0’5 puntos] Esboza la gráfica de f

Solución

(a)
f(x) = $\dfrac{x^2+1}{x}$

Como $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, x = 0 es una asíntota vertical de f(x) (A.V.); $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Como tenemos un cociente en el cual el grado del numerador es uno mas que el del denominador, tenemos una asíntota oblicua (A.O.) y = mx + n de f(x), y es la misma en +∞ y en - ∞, donde

$m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ y

$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Luego la asíntota oblicua es y = x

Veamos la posición relativa de f(x) respecto a la A.O.

Como $\lim_{x\to +\infty}(f(x)-A.O.) = \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right) = \lim_{x\to \infty}\frac{1}{x} = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en + ∞

Como $\lim_{x\to -\infty}(f(x)-A.O.) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x} = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.O. en - ∞

(b)
Para estudiar la monotonía veamos la 1ª derivada

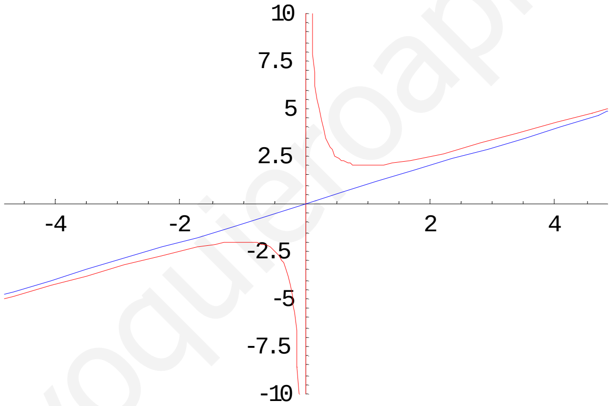
f(x) = $\frac{x^2+1}{x}$; $f'(x) = \frac{2x(x)-(x^2+1)(1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

Resolvemos f '(x) = 0, luego $x^2 - 1 = 0$ y las soluciones son x = +1 y x = -1 que pueden ser los posibles máximos y mínimos

Como f '(-2) =3/4 > 0, f(x) es creciente en (-∞, -1)
No podemos sustituir en la 1ª derivada x = 0 porque x = 0 es una A.V.
Como f '(-0'5) = -0'75/0'25 < 0, f(x) es decreciente en (-1,0) unión (0, +1)
Por definición x = -1 es un máximo relativo de f(x) que vale f(-1) = 2/(-1) = -2

Como f '(2) = 3/4 > 0, f(x) es creciente en (1, + ∞)
Por definición x = 1 es un mínimo relativo de f(x) que vale f(1) = 2/(1) = 2

(c)
Un esbozo de la gráfica es



Ejercicio nº 2 de la Opción B del modelo 1, Junio de 2005

Considera la función f : ℜ → ℜ definida por f (x) = $e^{-x/2}$.
(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.
(b) [1'75 puntos] Calcula el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f, la recta de ecuación x = 2 y la recta tangente obtenida en (a).

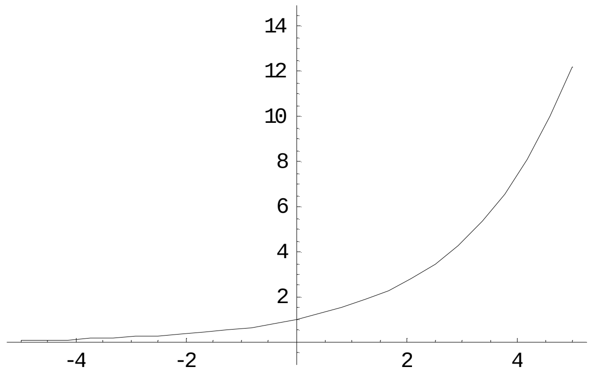
Solución

(a)
f (x) = $e^{-x/2}$.
La recta tangente en x = 0 es y – f(0) = f '(0)(x – 0)
f '(x) = $e^{-x/2}$.(-1/2)

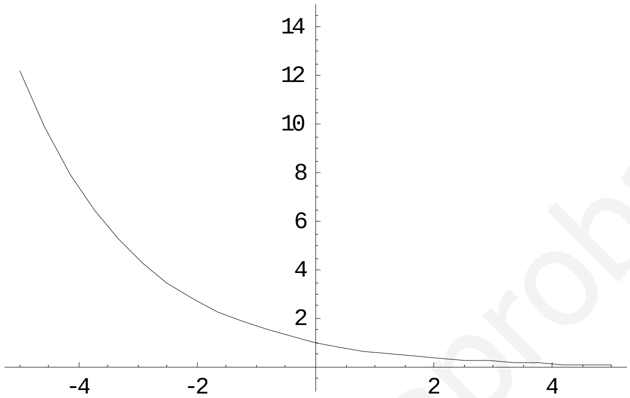
f (0) = e^0 = 1
f '(0) = e^0·(-1/2) = (-1/2)

La recta tangente en x = 0 es y – 1 = (-1/2)(x – 0), de donde y = (-1/2)x + 1

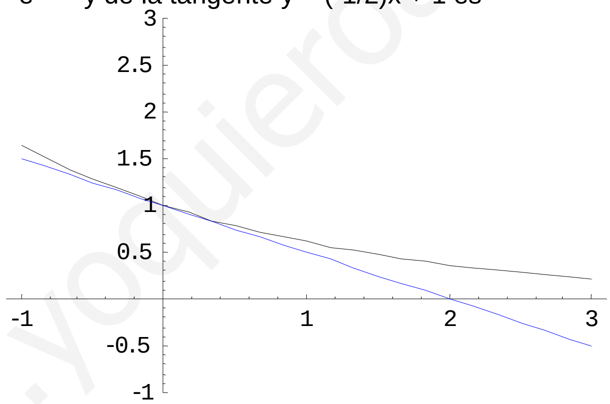
La recta tangente corta al eje OX en y = 0, de donde x = 2
(b)
Aunque no la piden, la gráfica de $e^{x/2}$ es muy parecida a la de e^x pero un poco mas abierta



Como sabemos la grafica de f(x) = e $^{-x/2}$ es exactamente igual que la de e $^{x/2}$ pero simétrica respecto del eje OY



Y la gráfica conjunta de f(x) = e $^{-x/2}$ y de la tangente y = (-1/2)x + 1 es



Por tanto el área pedida es

$$\int_0^2 [e^{-x/2} - (-x/2+1)]dx = \int_0^2 (e^{-x/2} + x/2 - 1)dx = \left[-2e^{-x/2} + x^2/4 - x\right]_0^2 =$$

$$= (-2e^{-1} + 1 - 2) - (-2e^{0} + 0 - 0) = (1 - 2/e) \cong 0'2642 \text{ u}^2$$

Ejercicio nº 3 de la Opción B del modelo 1, Junio de 2005

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y+z &= -2 \\ -\lambda x+3y+z &= -7 \\ x+2y+(\lambda+2)z &= -5 \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ

(b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

(a)

$$\begin{aligned} x+y+z &= -2 \\ -\lambda x+3y+z &= -7 \\ x+2y+(\lambda+2)z &= -5 \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{pmatrix}$ y la ampliada A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -\lambda & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & \lambda+2 & -5 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 – 3 = -2 $\neq$ 0, por lo menos A tiene rango 2

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda+2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC(-1) \\ 3^aC+1^aC(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 3+\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1) \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1+\lambda \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF+1^aF(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1+\lambda \\ -\lambda-2 & 0 \end{vmatrix} =$$

= -(1 + λ)(-2 - λ)

Si |A| = 0 tenemos 1 + λ = 0 y -2 - λ = 0 de donde λ = -1 y λ = -2

Si **λ ≠ -1 y λ ≠ -2**, rango(A) = rango(A^*) = 3 luego el sistema es compatible y determinado, y tiene solución única.

Si **λ = -1** la matriz de los coeficientes y a matriz ampliada son

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

En A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF+1^aF(-1) \\ 3^aF+1^aF(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (1)(-1)\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$

= -(-6 + 5) = 1 $\neq$ 0, rango de A^* = 3

Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3, el sistema es incompatible y no tiene solución.

(b)

Si **λ = -2** la matriz de los coeficientes y a matriz ampliada son

A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

En A^* = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aF+1^aF(-1) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales; luego tenemos que rango de A^* = 2

Como rango(A) = 2 = rango(A^*) , el sistema es compatible e indeterminado.

Como el rango es dos tomamos solo dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

Elijo las dos primeras.

x+y+z = - 2

2x+3y+z = -7, tomamos z = a $\in$ R, de donde

x+y = - 2 – a

2x+3y = -7- a. Haciendo 2ª ecuación + 1ª ecuación por (-2) tenemos

x+y = - 2 – a

y = -3 + a, de donde x = 1 – 2a

La solución del sistema es (x, y, z) = (1 – 2a, -3 + a, a) con a $\in$ R.

Ejercicio nº 4 de la Opción B del modelo 1, Junio de 2005

Sean los vectores $\overline{v_1}$ = (0,1, 0), $\overline{v_2}$ = (2,1, -1) y $\overline{v_3}$ = (2, 3, -l).

(a) [0'75 puntos] ¿Son los vectores $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ y $\overline{v_3}$ linealmente dependientes?

(b) [0'75 puntos] ¿Para qué valores de a el vector (4, a + 3, -2) puede expresarse como combinación lineal de los vectores $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ y $\overline{v_3}$?

(c) [1 punto] Calcula un vector unitario y perpendicular a $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$.

Solución

(a)

$\overline{v_1}$ = (0,1, 0), $\overline{v_2}$ = (2,1, -1) y $\overline{v_3}$ = (2, 3, -1), son linealmente dependientes si det($\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, $\overline{v_3}$) = 0

$$\det(\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3}) = 0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ por tener dos filas iguales.

(b)

Como $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ y $\overline{v_3}$ son linealmente dependientes, si nos fijamos en los vectores $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ y $\overline{v_3}$, dos a dos al no tener sus coordenadas proporcionales vemos que son independientes dos a dos, y que cada uno de ellos depende de los otros dos.

Me piden ver para que valores de "a" el vector **u** = (4, a + 3, -2) depende linealmente de $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ y $\overline{v_3}$.

Como $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ y $\overline{v_3}$ son linealmente dependientes, lo único que ver que el vector **u** depende linealmente de $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$, puesto que $\overline{v_3}$ depende linealmente de $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$; es decir lo que tenemos que ver es que el determinante det($\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$, **u**) sea 0.

$$\det(\overline{v_1},\overline{v_2},\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & a+3 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$ por tener dos filas proporcionales, por tanto el vector **u** depende linealmente de los vectores $\overline{v_1}$, $\overline{v_2}$ y $\overline{v_3}$, sea cual sea el valor del parámetro "a".

(c)

Un vector perpendicular a los vectores $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$ es su vector producto vectorial **w** = $\overline{v_1}$ x $\overline{v_2}$

$$\mathbf{w} = \overline{v_1} \times \overline{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(-2) = (-1, 0, -2)$$

Un vector unitario y perpendicular a $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$ sería **w**/||**w**||, siendo ||**w**|| el módulo del vector **w**

$$||\mathbf{w}|| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

El vector pedido es $\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}})$. Otro vector sería el $\frac{-\vec{w}}{||\vec{w}||} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})$