Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2006.

[2'5 puntos] Sea f : (1, + ∞) → R la función dada por $f(x)=\dfrac{x(Lnx)^2}{(x-1)^2}$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.

Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función.
En caso de que exista, hállala.

Solución

$f(x)=\dfrac{x(Lnx)^2}{(x-1)^2}$

Veamos si existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

[La regla de L'Hôpital (L'H) nos dice que si las funciones f(x) y g(x) son continuas y derivables en un entorno de "a", f(a) = g(a) = 0 y existe $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. La regla se puede reiterar, y se puede aplicar si sale 0/0, ∞/∞, y si el límite tiende a ∞]

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(Lnx)^2}{(x-1)^2}=\dfrac{\infty}{\infty}$, Le aplicamos L'H

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(Lnx)^2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(Lnx)^2+x.2Lnx.\frac{1}{x}}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(Lnx)^2+2Lnx}{2(x-1)}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Le aplicamos L'H

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(Lnx)^2+2Lnx}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(Lnx)\frac{1}{x}+\frac{2}{x}}{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(Lnx)+1}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Le aplicamos L'H

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(Lnx)+1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\infty}=0$, por tanto la recta y = 0 es una asíntota horizontal de f(x) en + ∞

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2006.

Sea f : [0, 4] → R una función tal que su función derivada viene dada por $f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x & si \quad 0<x<3\\ -2x+8 & si \quad 3\le x<4\end{cases}$

(a) [1'75 puntos] Determina la expresión de f sabiendo que f (1) = 16/3.
(b) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1.

Solución

(a)
Como es derivable en (0,4) es continua en [0,4] en particular es continua y derivable en x = 3
Por el teorema fundamental del cálculo integral: si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces la función $\int_a^x f(t)dt$ es derivable y su derivada es la función f(x). En nuestro caso $f(x)=\int f'(x)dx$

Si 0 < x < 3, $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2}{3}xdx=\dfrac{x^2}{3}+K$

Si 3 ≤ x < 4, $f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+8)dx=-x^2+8x+L$

De f(1) = 16/3 tenemos 16/3 = 1/3 + K, de donde K = 5
Como es continua en x =3, $f(3)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$f(3)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(-x^2+8x+L\right)=15+L$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{x^2}{3}+5\right)=8$

Igualando tenemos 8 = 15 + L de donde L = - 7 y la función pedida es

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+5x & si \quad 0\le x<3 \\ -x^2+8x-7 & si \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$$

(b)
La ecuación de la recta tangente en x = 1 es y – f(1) = f '(1)(x – 1)
f(1) = 1/3 + 5 = 16/5
f '(1) = 2/3
Luego la recta tangente en x = 1 es y – 16/3 = (2/3)(x – 1)

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2006.

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + \lambda y + z &= 8 \\ \lambda x + y + \lambda z &= 10 \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
(b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.

Solución

(a)

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ x + \lambda y + z &= 8 \\ \lambda x + y + \lambda z &= 10 \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 8 \\ \lambda & 1 & \lambda & 10 \end{pmatrix}$

det(A) = $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix}=0$, sea cual sea el λ porque tiene dos columnas iguales. Por tanto rango(A) < 3 siempre.

En A*, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 8 \\ \lambda & 1 & 10 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ 2^aC+1^aC \\ 3^aC+1^aC(-2) \end{matrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 6 \\ \lambda & \lambda+1 & 10-2\lambda \end{vmatrix}=$ (λ+1)(10-2λ) – 6(λ+1) = (λ+1)(-2λ+4)

(λ+1)(-2λ+4) = 0 nos da λ = -1 y λ = 2

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$ rango(A*) = 3 $\neq$ rango(A) por tanto por el Teorema de Rouche el sistema es incompatible.

Si λ = -1

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$

En A como las tres filas son proporcionales, tenemos que rango(A) = 1, luego todos los menores de orden dos son cero.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=6\neq$ 0, rango(A*) = 2

Como rango(A) = 1 $\neq$ rango(A*) = 2, el sistema es incompatible

(b)
Si λ = 2

Ya sabemos que rango(A*) = 2, del apartado "si λ = -1"

En $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq$ 0, rango(A) = 2

Como rango(A) = rango(A*) = 2, el sistema es compatible e indeterminado. Tomaremos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Tomo las dos primeras.

x − y + z = 2
x + 2y + z = 8, 2ª + 1ª (-1)

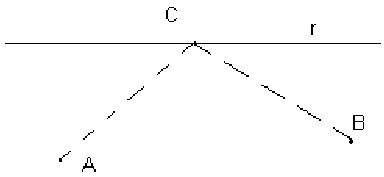
x − y + z = 2
3y = 6, de donde y = 2. Haciendo z = m ∈ R, tenemos x = 4 – m, y la solución del sistema es (x,y,z) = (4-m,2,m)

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 5 de sobrantes de 2006.

Considera los puntos A(2, 1, 2) y B(0, 4, 1) y la recta r de ecuación x = y − 2 = (z – 3)/2
(a) [1’5 puntos] Determina un punto C de la recta r que equidiste de los puntos A y B.
(b) [1 punto] Calcula el área del triangulo de vértices ABC.

Solución

(a)
A(2, 1, 2) y B(0, 4, 1) , r ≡ x = y − 2 = (z – 3)/2 = a, con a ∈ $\Re$.



Tomamos un punto genérico de r, C(a, 2+a, 3+2a)
Le imponemos la condición d(A,C) = d(B, C)
AC = (a-2, a+1, 2a+1)
BC = (a, a-2, 2a+2)
d(A,C) =|| **AC**|| = $\sqrt{(a-2)^2+(a+1)^2+(2a+1)^2}$
d(A,C) =|| **AC**|| = $\sqrt{(a)^2+(a-2)^2+(2a+2)^2}$
Igualando y desarrollando tenemos
$(a - 2)^2 + a^2 + 1 + 4a^2 + 4a + 1 = (a - 2)^2 + a^2 + 4a^2 + 8a + 4$, de donde a = -1 y el punto es C(-1,1,1)
(b)
El área del triángulo ABC es 1/2 del área del paralelogramo que determinan los vectores **AB** y **AC**
AB = (-2,3,-1); **AC** = (-3,0,-1).

ABxAC = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ = **i**(-3) – **j**(-1) + **k**(9)= (-3, 1, 9)

Área = (1/2)|| **ABxAC** || = $\frac{1}{2}\sqrt{9+1+81}=\frac{1}{2}\sqrt{91}\ u^2$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2006.

Se sabe que la función f : [0, 5] → $\Re$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si \quad 0\le x<2 \\ -4+\sqrt{x-1} & si \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0, 5).
(a) [1’75 puntos] Calcula las constantes a y b.
(b) [0’75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Solución

(a)
$f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si \quad 0\le x<2 \\ -4+\sqrt{x-1} & si \quad 2\le x\le 5 \end{cases}$ es derivable en el intervalo (0, 5) por tanto también es continua en [0,5]. En particular es continua y derivable en x = 2.

Como es continua en x = 2 , $f(2)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$

$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(-4+\sqrt{x-1}\right) = -3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(ax+bx^2\right) = 2a+4b$

Igualando tenemos 2a + 4b = -3

$$f'(x) = \begin{cases} a+2bx & si \quad 0<x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & si \quad 2\le x<5 \end{cases}$$

Como es derivable en x = 2, tenemos f '(2^+) = f'(2^-)

$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = \dfrac{1}{2}$

$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(a+2bx\right) = a+4b$

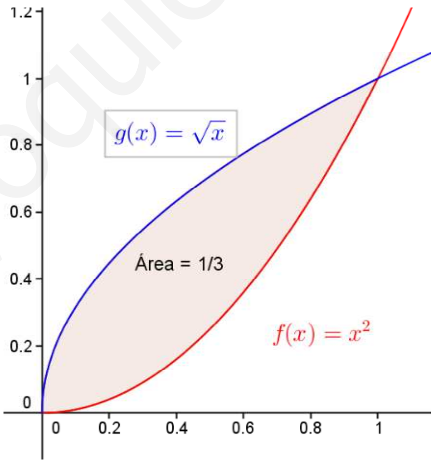
Igualando tenemos a + 4b = 1/2
Resolviendo el sistema
2a + 4b = -3
a + 4b = 1/2, obtenemos a = -7/2 y b = 1
(b)
La ecuación de la recta tangente en x = 2 es y – f(2) = f '(2)(x – 2)
f(2) = -3
f '(2) = 1/2
Luego la recta tangente en x = 2 es y + 3 = (1/2)(x – 2)

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2006.

[2'5 puntos] Sean las funciones f y g : [0, +∞) → $\Re$, dadas por f (x) = x^2 y $g(x) = \lambda\sqrt{x}$, donde λ es un número real positivo fijo. Calcula el valor de λ sabiendo que área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones es 1/3.

Solución

Las gráficas de f(x) = x^2 y $g(x) = \lambda\sqrt{x}$ son sencillas pues ambas son parábolas y λ > 0. Un esbozo de sus gráficas es



Veamos antes los puntos de corte, es decir las soluciones de $x^2 = \lambda\sqrt{x}$, elevando al cuadrado tenemos $x^4 = \lambda^2(x)$.

$x^4 - \lambda^2(x) = x(x^3 - \lambda^2)$. De donde x = 0 y $x = \sqrt[3]{\lambda^2}$

El área es $\int_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}} (\lambda\sqrt{x} - x^2)dx = \dfrac{1}{3} = \left[\dfrac{2}{3}\lambda\sqrt{x^3} - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt[3]{\lambda^2}} = \dfrac{2}{3}\lambda\sqrt{\lambda^2} - \dfrac{1}{3}\lambda^2 = (\lambda^2)/3 = 1/3$, de donde $\lambda^2 = 1$ y obtenemos

λ = +1 y λ = - 1.
Como λ >0, λ = +1.

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2006.

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ m-4 & 1 & 1-m\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Halla el valor de m $\in$ R para el que la matriz A no tiene inversa.
(b) [1'5 puntos] Resuelve A X = O para m = 3.

Solución

(a)

La matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ m-4 & 1 & 1-m\end{pmatrix}$ no tiene inversa si |A| = 0

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ m-4 & 1 & 1-m\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1-m\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 1\\ m-4 & 1-m\end{vmatrix}=$ (1-m-1) – (2-2m-m+4) = 2m-6 = 0, de donde m = 3.

Para m = 3 no existe la inversa de A.

(b)

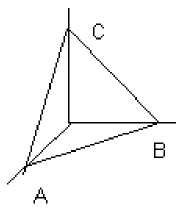
Para m = 3 es $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $AX=0=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

Efectuando el producto tenemos
x+y = 0
2x+y+z = 0
-4x+y+z = 0
Como rango(A) = 2, tenemos un sistema compatible indeterminado y para resolverlo solo necesitamos dos ecuaciones. Tomo las dos primeras
x+y = 0
2x+y+z = 0. Hacemos z = a $\in$ R, tenemos x = -a e y = a.
La solución del sistema para m = 3 es (x,y,z)= (-a,a,a) con a $\in$ R.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 5 de sobrantes de 2006.

[2'5 puntos] Halla la ecuación de un plano que sea paralelo al plano π de ecuación x+y+z=1 y forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $18\sqrt{3}$.

Solución



Un plano paralelo al plano x+y+z=1 es el x+y+z=m.
Si recordamos el plano x/m + y/m + z/m = 1 está dado en forma segmentaria y corta a los ejes coordenados en los puntos A(m,0,0), B(0,m,0) y C(0,0,m)
El área pedida es (1/2)||**ABxAC**|| = $18\sqrt{3}$

AB = (-m, m, 0); **AC** = (-m, 0, m). **ABxAC** = $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -m & m & 0\\ -m & 0 & m\end{vmatrix}=$ **i**(m^2) – **j**($-m^2$) + **k**(m^2) = (m^2, m^2, m^2)

Área = (1/2)|| **ABxAC** || = $\frac{1}{2}\sqrt{m^4+m^4+m^4}=\frac{1}{2}\sqrt{3m^4}=\frac{m^2}{2}\sqrt{3}$

Igualando tenemos $\frac{m^2}{2}\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$, simplificando nos da $m^2 = 36$, de donde $m = \pm 6$, y por tanto hay dos plano que cumplen la condición pedida que son: $x + y + z = 6$ y $x + y + z = -6$.