Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2006.

(a) [1'5 puntos] Sea f : R $\to$ R la función dada por f (x) = ax^2 + b. Halla los valores de a y b sabiendo $\int_0^6 f(x)dx = 6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale −12.

(b) [1 punto] Sea f : R $\to$ R la función dada por f (x) = x^2 + p x + q. Calcula los valores de p y q sabiendo que la función f tiene un extremo en x = −6 y su valor en él es −2.

Solución

(a)

f (x) = ax^2 + b ; $\int_0^6 f(x)dx = 6$

Si la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa 3 vale −12, sabemos que f '(3) = -12

f '(x) = 2ax;

f '(3) = –12; –12 = 6a, de donde a = - 2 por tanto f(x) = – $2x^2$ + b

$$\int_0^6 f(x)dx = 6 = \int_0^6 (-2x^2+b)dx = \left[\frac{-2x^3}{3}+bx\right]_0^6 = -2(6^3)/3 + 6b$$

Resolviendo – $2(6^3)/3$ + 6b = 6, obtenemos b = 25 y la función pedida es f(x) = – $2x^2$ + 25

(b)

f (x) = x^2 + p x + q.

Extremo en x = -6 nos dice que f '(-6) = 0

Su valor es -2 nos dice que f(-6) = -2

f '(x) = 2x + p.

De f '(-6) = 0 tenemos 0 = -12 + p, de donde p = 12. La función es f (x) = x^2 + 12 x + q

De f(-6) = -2 tenemos -2 = 36 – 72 + q, de donde q = 34

La función pedida es f (x) = x^2 + 12 x + 34

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2006.

[2'5 puntos] Calcula $\int (x^2-1)e^{-x}dx$

Solución

I = $\int (x^2-1)e^{-x}dx$ es una integral por partes. Aplicaremos $\int udv = uv - \int vdu$, siendo u y v funciones con derivada continua.

u = x^2 -1., de donde du = 2xdx; dv = e^{-x}dx, de donde $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$

I = $\int (x^2-1)e^{-x}dx$ = $(-e^{-x})(x^2-1)$ - $\int -2xe^{-x}dx$ = $(-e^{-x})(x^2-1)$ + $2\int xe^{-x}dx$ = $(-e^{-x})(x^2-1) + 2I_1$

$I_1 = \int xe^{-x}dx$; u = x, de donde du = dx; dv = e^{-x}dx, de donde $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$

$I_1 = \int xe^{-x}dx$ = $x(-e^{-x})$ - $\int -e^{-x}dx = x(e^{-x})$ - e^{-x}

Por tanto I = $\int (x^2-1)e^{-x}dx$ = $(-e^{-x})(x^2-1) + 2I_1$ = $(-e^{-x})(x^2-1) + 2[x(e^{-x}) - e^{-x}] = (-e^{-x})(x^2+2x+1) + K$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2006.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Determina los valores de m $\in \Re$ para los que la matriz A tiene inversa.

(b) [1'5 puntos] Para m = 0 y siendo X = (x y z) , resuelve X·A = (3 1 1) .

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Existe A^{-1} si y solo si det(A) =|A| $\neq$ 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a C + 3^a C = \\ 1^a C + 3^a C \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & m & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(6 - m^2 - m) = 0$$

Las soluciones de 6 - m^2 – m = 0 son m = 2 y m = -3.
Para m $\neq$ 2 y m $\neq$ -3 existe A^{-1}
(b)

Para m = 0, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y tiene matriz inversa A^{-1}

XA = (3 1 1). Multiplicando por la derecha por A^{-1} tenemos X = (3 1 1)A^{-1}
A^{-1} = (1/|A|)Adj(A^t)

|A| = (-1)(6 - 0 – 0) = -6; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Luego A^{-1} = (1/|A|)Adj(A^t) = $\left(\frac{1}{-6}\right)\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Por tanto X = (3 1 1)A^{-1} = X = (3 1 1) $\left(\frac{1}{-6}\right)\begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ = (-1/6)(-12 -6 -6) = (2 1 1)

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2006.

Sea r la recta de ecuación (x – 5)/2 = (y+2)/(-1) = z/4 y s la recta dada por $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Determina la posición relativa de ambas rectas.
(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Solución

(a)
De la recta r (x – 5)/2 = (y+2)/(-1) = z/4 tomamos un punto A(5, -2 0) y un vector director **u** = (2, -1, 4)

De la recta s $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$ tomamos un punto B y un vector director **v**

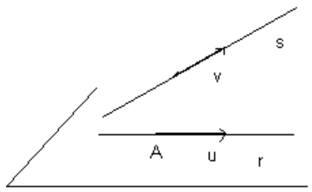
Para el punto hacemos z = 0 y nos queda el sistema
3x – 2y = 2
-x + 2y = 2, que al resolverlo nos da x = 2 e y = 2, por tanto el punto es B(x,y,z) = B(2, 2, 0)

v = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ = **i**(6-2) – **j**(-9+1) + **k**(6 – 2)= (4, 8, 4)

Como los vectores **u** y **v** no son proporcionales las rectas se cortan o se cruzan. Para ver en que caso estamos tenemos que ver si es 0 o nó el determinante det(**AB**, **u**, **v**)
AB =(-3, 4, 0)

det(**AB**, **u**, **v**) = $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 140 \neq 0$, por tanto las rectas se cruzan

(b)



Como el plano contiene a la recta r un punto del plano es A y un vector del plano es **u.** Como el plano es paralelo a la recta s el otro vector paralelo del plano es el **v**.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x-5 & y+2 & z \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = (x-5)(-4-32) - (y+2)(8-16) + z(16+4) = -36x + 8y + 20z + 196 = 0$$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2006.

Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + x + 1)$

(a) [0'75 puntos] Estudia si existen y calcula, cuando sea posible, las asíntotas de la grafica de f .

(b) [1'25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los valores que alcanza en ellos la función f .

(c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

Solución

(a)

$f(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + x + 1)$

Como $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales la función f(x) no tiene asíntotas verticales.

Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, la recta y = 1 es una asíntota horizontal (A.H.) en ∞ y en - ∞.

Como $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-1\right) = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.H. y = 1 en + ∞

Como $\lim_{x\to-\infty} \left(f(x)-1\right) = 0^{+-}$, f(x) está por encima de la A.H. y = 1 en - ∞

(b)

Estudio de f'(x)

$f(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + x + 1)$; $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-2+2x^2}{(x^2+x+1)^2}$

f '(x) = 0, nos da $-2 + 2x^2 = 0$, de donde x = 1 y x = -1, que serán los posibles extremos relativos

Si x < -1, f '(-2) = (+)/(+) > 0, f '(x) > 0 y por tanto f(x) crece en x < -1

Si -1< x < 1, f '(0) = (-2)/(+) < 0, f '(x) < 0 y por tanto f(x) decrece en -1 < x < 1

Si x > 1, f '(2) = (+)/(+) > 0, f '(x) > 0 y por tanto f(x) crece en x > 1

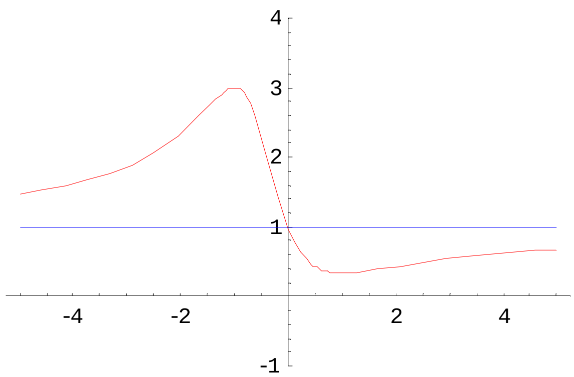
Por definición x = -1 es un máximo relativo que vale f(-1) = 3

Por definición x = 1 es un mínimo relativo que vale f(1) = 1/3

Además f(0) = 1

(c)

Un esbozo de la gráfica es



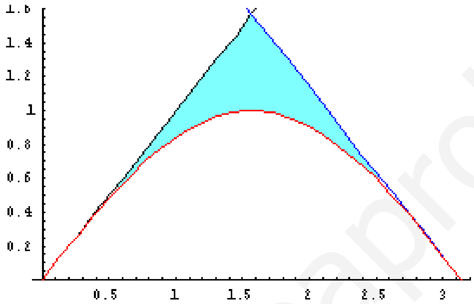
Ejercicio 2 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2006.

[2'5 puntos] Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función f (x) = sen x y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas x = 0 y x = π.

Solución

La recta tangente en x = 0 es y – f(0) = f '(0)(x-0)
f (x) = sen x ; f(0) = 0
f ´(x) = cos x ; f ´(0) = 1
La recta tangente en x = 0 es y = x, que es la bisectriz del I y III cuadrante

La recta tangente en x = π es y – f(π) = f '(π)(x-π)
f (x) = sen x ; f(π) = 0
f ´(x) = cos x ; f ´(π) = -1
La recta tangente en x = 0 es y = - x + π, que es la bisectriz del II y IV cuadrante, pero desplazada π unidades hacia arriba en el eje OY
Un esbozo de la gráfica es



Para determinar el área tenemos que ver donde se cortan las rectas es decir la solución de x = -x + π, que evidentemente es el punto x = π/2.

El área pedida es $\int_0^{\pi/2}(x-senx)dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-x+\pi-senx)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\cos x\right]_0^{\pi/2}+\left[\frac{-x^2}{2}+\pi x+\cos x\right]_{\pi/2}^{\pi}=$

= (π^2/8 + cos(π/2)) – (0 + cos(0)) + (-π^2/2 + π^2 + cos(π)) - (-π^2/8 + π^2/2 + cos(π/2))) = π^2 /4 - 2 u^2

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2006.

Sea $A=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden dos.

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores $\lambda \in \Re$ tales que |A − λ I | = 0.
(b) [1'25 puntos] Calcula A^2 − 7A + 10 I .

Solución

(a)

$A=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}$; $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; A − λ I= $\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{pmatrix}$

|A − λ I | = $\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{vmatrix}$ = (4- λ)(3- λ) – 2 = λ^2 - 7 λ +10

Resolviendo λ^2 - 7 λ +10 = 0, obtenemos λ = 2 y λ = 5

(b)

A^2 − 7A + 10 I

$A^2=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&14\\7&11\end{pmatrix}$

A^2 − 7A + 10 I = $\begin{pmatrix}18&14\\7&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}28&14\\7&21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$, la matriz nula de orden 2.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2006.

Considera la recta r de ecuaciones $\begin{cases}x+y+z=1\\x-2y+3z=0\end{cases}$

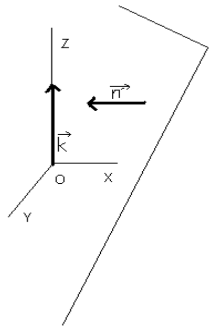
(a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y no corta al eje OZ .
(b) [1'25 puntos] Calcula la proyección ortogonal del punto A(1, 2, 1) sobre la recta r.

Solución

(a)

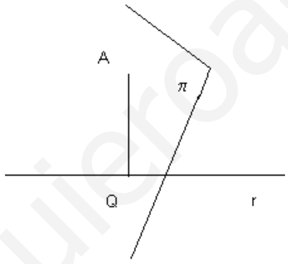
Formamos el haz de plano de terminado por la recta $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$ que es (x+y+z-1) + m(x-2y+3z)= 0

Ordenándolo (1+m)x + (1-2m)y + (1+3m)z + (-1) = 0. Un vector normal genérico sería **n'** = (1+m, 1-2m, 1+3m)
Como el plano pedido no puede cortar al eje OZ el vector normal del plano **n'** y el director del eje **k** = (0,0,1) han de ser perpendiculares, es decir su producto escalar ha de ser cero, es decir **k • n'** = 0



k • n' = 0 = 1 + 3m = 0, de m = -1/3 y el plano pedido es (x+y+z-1) + (-1/3)(x-2y+3z)= 0

(b)



Calculamos el plano π que pasa por A(1, 2, 1) y es perpendicular a r. Su vector normal **n** será el director de r, **u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ = **i**(5) – **j**(2) + **k**(-3)= (5, -2, -3).

El plano π es 5(x – 1) – 2(y – 2) – 3(z – 1) = 5x – 2y - 3z + 2 = 0
El punto Q proyección ortogonal del punto A sobre la recta r es la intersección de la recta r con el plano π
Ponemos la recta r $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$ en vectorial. Ya hemos visto que un vector director es **u** = (5, -2, -3).
Calculamos ahora un punto suyo M, para lo cual hacemos z = 0 y nos queda y = 1/3 y x = 2/3, es decir M(2/3,1/3,0)
La recta r en vectorial sería (x, y, z) = (2/3 + 5m, 1/3 – 2m, -3m) con m ∈ $\Re$. Sustituimos r en π y obtenemos el valor del parámetro m.
5(2/3 + 5m) – 2(1/3 – 2m) – 3(-3m) + 2 = 0. Operando nos queda 38 m + 14/3 = 0, de donde m = -7/57 , y el punto buscado es Q(2/3 + 5(-7/57), 1/3 – 2(-7/57), -3(-7/57)) = Q(1/19, 11/19, 7/19)