Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Determina la función f : R → R sabiendo que f ''(x) = x^2 − 1 y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0 es la recta y = 1.

Solución

f ''(x) = x^2 − 1 y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0 es la recta y = 1.

La recta tangente de f(x) en x = 0 es "y – f(0) = f '(0)(x – 1)". Como me dicen que es y = 0, me están dando las condiciones f '(0) = 0 y f(0) = 1

Por el teorema fundamental del cálculo integral: si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces la función $\int_a^x f(t)dt$ es derivable y su derivada es la función f(x). En nuestro caso $f(x)=\int f'(x)dx$ y $f'(x)=\int f''(x)dx$

$f'(x)=\int f''(x)dx=\int (x^2-1)dx$ = $x^3/3$ – x + K

f '(x) = $x^3/3$ – x + K. Como f '(0) = 0, tenemos 0 = 0 – 0 + K, de donde K = 0, por tanto f '(x) = $x^3/3$ – x

$f(x)=\int (\frac{x^3}{3}-x)dx$ = $x^4/(12)$ – $x^2/2$ + M.

Como f(0) = 1, tenemos 1 = 0 – 0 + M, de donde M = 1, por tanto la función pedida es f(x) = $x^4/(12)$ – $x^2/2$ + 1.

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2007.

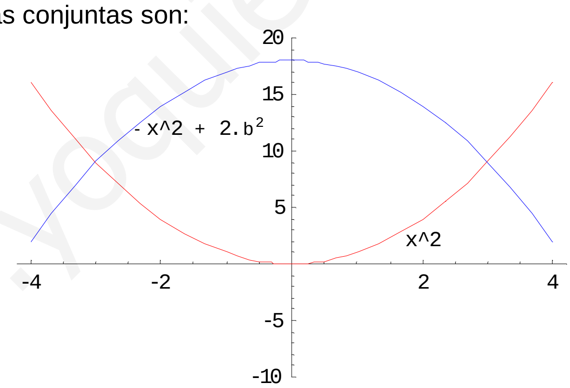
[2'5 puntos] Calcula β>0 para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f : R → R y g:R→ R definidas por f(x) = x^2 y g(x) = $-x^2 + 2\beta^2$ sea 72 (unidades de área).

Solución

La gráfica de f(x) = x^2 es una parábola que tiene su vértice en (0,0) y las ramas hacia arriba

Como β > 0, la gráfica de g(x) = $-x^2 + 2\beta^2$ es igual que la de – x^2 (como la de x^2 pero simétrica respecto el ej OX) pero desplazada hacia arriba $2\beta^2$ en OY

Aunque no lo piden, las gráficas conjuntas son:



Área = 72 u^2 = $\int_a^b [-x^2+2\beta^2-(x^2)]dx$

"a" y "b" son las soluciones de f(x) = g(x), es decir $x^2 = -x^2 + 2.\beta^2$. Operando $x^2 = \beta^2$, de donde x = ± β

72 = $\int_{-\beta}^{+\beta}[-x^2+2\beta^2-(x^2)]dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+2\beta x\right]_{-\beta}^{+\beta}$ = ((-2/3)β^3 + 2β^3) - ((2/3)β^3 - 2β^3) = (8/3) β^3

De (8/3) β^3= 72, resulta β^3 = 27 y calculando la raíz cúbica obtenemos β = 3.

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2007.

Sea A la matriz A= $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de λ para los que el determinante de A− 2I es cero.

(b) [1'25 puntos] Calcula la matriz inversa de A − 2I para λ = −2.

Solución

(a)

$$B = A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2) = (\lambda - 2)(1 - \lambda)(1 + \lambda)$$

El determinante de la matriz B = A – 2I es cero para $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$

(b)

$$\text{Para } \lambda = -2,\ B = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

det(B) = |B| = (- 2 - 2)(1 + 2)(1 - 2) = (- 4)(3)(- 1) = 12 $\neq$ 0, luego existe B^{-1}

$B^{-1} = (1/|B|)Adj(B^t)$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix};\quad Adj(B^t) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } B^{-1} = (1/|B|)Adj(B^t) = \left(\frac{1}{12}\right)\cdot\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -2/3 \\ 5/4 & -1/4 & 5/4 \\ -2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 6 de sobrantes de 2007.

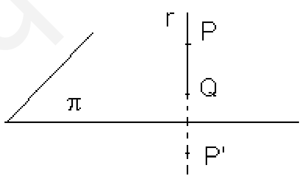
Considera el plano π de ecuación 2x + 2y− z− 6 = 0 y el punto P(1,0,−1).

(a) [1'25 puntos] Calcula la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π.

(b) [1'25 puntos] Encuentra el punto simétrico de P respecto del plano π.

Solución

(a)



La recta "r" perpendicular al plano π de ecuación 2x + 2y− z− 6 = 0, tiene como vector director **u** el vector normal del plano **n**, luego **u** = **n** = (2, 2, - 1)

La ecuación de la recta "r" perpendicular a "π" que pasa por el punto P, en forma paramétrica es:

x = 1 + 2m
y = 0 + 2m
z = - 1 - m

(b)

Para calcular el punto P' simétrico del punto P respecto a la recta "r", nos damos cuenta por el apartado (a) que el punto Q (intersección de la recta "r" con el plano "π") es el punto medio del segmento PP'

Para calcular Q = r $\cap$ π, sustituyo la recta en el plano y determino m.

2(1 + 2m) + 2(2m) − (- 1 - m)− 6 = 0. Operando 9m – 3 = 0, de donde m = 1/3.

El punto Q es Q(1 + 2(1/3), 2(1/3), - 1 – (1/3)) =Q(5/3, 2/3, -4/3)

Como Q es el punto medio del segmento PP'

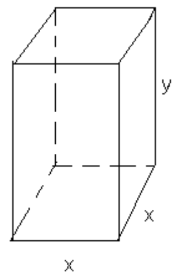
(5/3, 2/3, -4/3) = ((1+x)/2, y/2, (z-1)/2), de donde igualando miembro a miembro y despejando obtenemos que el punto simétrico P ' es P '(7/3, 4/3, -5/3)

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que su superficie sea mínima?

Solución



Función a Optimizar Superficie $S = x^2 + 4xy$ (No tiene tapa superior)
Relación entre las variables Capacidad = Volumen = $500 = x^2.y$, de donde $y = (500)/x^2$

Sabemos que si g '(a) = 0 y g ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo de g(x)
Sabemos que si g '(a) = 0 y g ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo de g(x)

$S(x) = x^2 + 4xy = x^2 + 4x(500)/x^2 = x^2 + 2000/x$
$S'(x) = 2x - 2000/x^2$
De $S'(x) = 0$, tenemos $2x - 2000/x^2 = 0$, es decir $x^3 = 1000$ y calculando la raíz cúbica sale $x = 10$.
$S''(x) = 2 + 4000/x^3$
Como $S''(10) = 2 + 4000/(10)^3 > 0$, $x = 10$ es un mínimo relativo.

De $x = 10$, tenemos $y = (500)/(10)^2 = 5$, luego las dimensiones del depósito son $x = 10$ e $y = 5$.

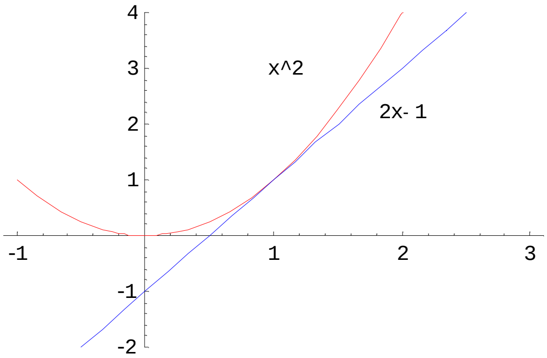
Ejercicio 2 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2007.

Sea $f : R \rightarrow R$ la función definida por $f(x) = x^2$.
(a) [0'75 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x =1.
(b) [1'75 puntos] Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área.

Solución

(a)
$f(x) = x^2$.
La recta tangente en x = 1 es " $y- f(1) = f'(1)(x – 1)$"
$f(x) = x^2$, de donde $f(1) = 1$
$f'(x) = 2x$, de donde $f'(1) = 1$
La recta tangente pedida es $y – 1 = 2(x – 1)$. Operando sale $y = 2x – 1$.
(b)
x^2 es una parábola con el vértice en (0, 0) y las ramas hacia arriba.
$y = 2x – 1$, es un recta y con dos puntos nos sobra, que pueden ser (0, - 1) y (1/2, 0). (He puesto los cortes con los ejes por que los necesitamos para el área, en concreto la abscisa del punto (1/2, 0))

Un esbozo de la gráfica de ambas funciones es



Las funciones se cortan en el punto (1, 1)

El área pedida es Área = $\int_0^1 [x^2]dx - \int_{1/2}^1 [2x-1]dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[x^2 - x\right]_{1/2}^1$ = 1/3 – [(1 – 1) – (1/4 – 1/2)] = 1/12 u^2.

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2007.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + m z &= 1 \\ m y - z &= -1 \\ x + 2m y &= 0 \end{aligned}$$

(a) [1’5 puntos] Clasifica el sistema según los valores de m.
(b) [1 punto] Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

Solución

(a)

$$\begin{aligned} x + y + m z &= 1 \\ m y - z &= -1 \\ x + 2m y &= 0 \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & m & -1 & -1 \\ 1 & 2m & 0 & 0 \end{pmatrix}$

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix}_{3^aF - 1^aF} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 2m-1 & -m \end{vmatrix}$ = $-m^2 + 2m - 1$

|A| = 0, nos dice que $-m^2 + 2m - 1 = 0$ y las soluciones son m = 1 (doble)

Si m $\neq$ 1 , rango(A) = rango(A^*) = 3 por tanto el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

(b)

Si m = 1

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, rango(A) = 2

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{3^aF - 3^aF)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, luego rango(A^*) = 2

Como rango(A) = rango(A^*) = 2, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Este es el caso que nos piden resolver.

(b)

Hemos visto que para **m = 1**, rango(A) = rango(A^*) = 2 por tanto sólo tomamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Elijo 1ª y 2ª ecuación.

x + y + z = 1

+ y – z = - 1.

Tomando z = a $\in$ R obtenemos y = – 1 + a y x = 2 – 2a, luego la solución del sistema para **m = 1** es (x, y, z) = (2 – 2a, – 1 + a, a) con a $\in$ R

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 6 de sobrantes de 2007.

Considera el plano π de ecuación 2x + 2y − z − 6 = 0 y la recta "r" definida por $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$

(a) [1'25 puntos] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas.

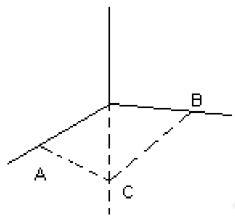
(b) [1'25 puntos] Calcula, razonadamente, la distancia de la recta r al plano π.

Solución

π de ecuación 2x + 2y − z − 6 = 0. Su vector normal es **n** = (2, 2, - 1)

recta "r" definida por $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$. Punto de la recta M(1, -1, 0) y vector director **u** = (2, -1, 2)

(a)



Para calcular los vértices de los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas, ponemos la ecuación del plano en su forma segmentaria, y los números que dividan a la "x", la "y" y la "z" serán la abscisa, ordenada y cota de la intersección.

2x + 2y − z − 6 = 0
2x + 2y − z = 6. Dividimos todo por 6
x/3 + y/3 + z/(-3) = 1, por tanto los puntos de corte son A(3, 0, 0), B(0, 3, 0) y C(0, 0, - 3)

(También se puede hacer como intersección de planos. Para el A se hace la intersección del plano dado con los planos y = 0 y z = 0)

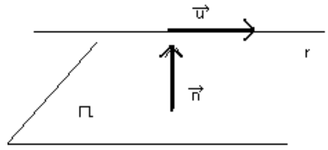
Recordamos que el área del triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan los vectores **AB** y **AC**, y que el área del paralelogramo era el módulo del producto vectorial de dichos vectores, es decir.

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**||
AB = (-3,3,0)
AC = (-3,0,-6)

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ = **i**(-18) – **j**(-18) + **k**(9) = (- 18, - 18, 9)

Área triángulo = (1/2).||**AB**x**AC**|| = $\frac{1}{2}\sqrt{18^2+18^2+9^2} = \frac{27}{2}$ u^2

(b)



Como la recta"r" y el plano "π" son paralelos porque el vector normal del plano **n** = (2, 2, - 1) y el vector director de la recta "r" **u** = (2, -1, 2) son perpendiculares al ser su producto escalar cero (veámoslo)

n•u = (2, 2, - 1)•(2, -1, 2) = 2 – 2 – 2 = 0

resulta que la distancia de la recta "r" al plano "π" es la distancia de un punto cualquiera de la recta, el M(1,-1,0) al plano “π”, es decir d(“r”, “π”) = d(M, “π”) = $\frac{|2(1)+2(-1)+0-6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2u.l.$