Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Sea f : $(0,+\infty) \to R$ la función definida por $f(x)= x^2 \,Ln(x)$ (Ln denota la función logaritmo neperiano).
(a) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).
(b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\sqrt{e}$.

Solución

(a)
Estudiamos f '(x)
$f'(x) = 2xLn(x) + x^2(1/x) = 2xLn(x) + x = x(2Ln(x) +1)$
$f'(x) = 0$, $x(2Ln(x) +1) = 0$, de donde x = 0 y Ln(x) = -1/2, de donde $x = e^{(-1/2)} \approx 0'6$, que será el posible extremo relativo.
x = 0 no vale porque no está en el dominio.
Si $x < e^{(-1/2)}$, $f'(-0'5) = -0'19 < 0$, luego $f'(x) < 0$ por tanto f(x) decrece en $x < e^{(-1/2)}$
Si $x > e^{(-1/2)}$, $f'(1) = 1 > 0$, luego $f'(x) > 0$ por tanto f(x) crece en $x > e^{(-1/2)}$
Por definición $x = e^{(-1/2)}$ es un mínimo relativo que vale $f(e^{(-1/2)}) = e^{-1}.Ln(e^{(-1/2)}) = -1/2e$
(b)
La recta tangente en $x=\sqrt{e}=e^{1/2}$, es $y - f(e^{1/2}) = f'(e^{1/2})(x - e^{1/2})$
$f(x)= x^2 \,Ln(x)$, $f(e^{1/2}) = e.Ln(e^{1/2}) = (1/2)e$
$f'(x) = x(2Ln(x) +1)$, $f'(-1) = e^{1/2}.(2Ln(e^{1/2}) +1) = 2.\, e^{1/2}$
La recta tangente pedida es $y - (1/2)e = 2.\, e^{1/2}(x - e^{1/2})$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 3 de sobrantes de 2007.

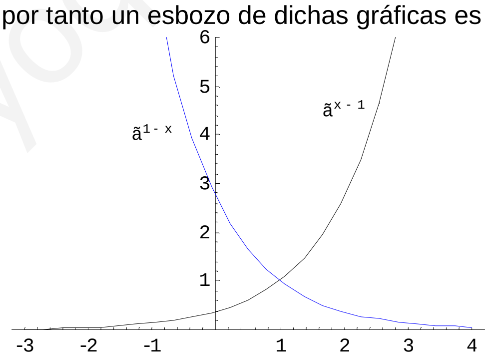
Considera las funciones f : R $\to$ R y g : R $\to$ R definidas por

$$f(x) = e^{x-1} \quad y \quad g(x) = e^{1-x}$$

(a) [1'25 puntos] Esboza las gráficas de f y de g y determina su punto de corte.
(b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de f y g.

Solución

(a)
La gráfica de $f(x) = e^{x-1}$, es exactamente igual que la de e^x pero desplazada una unidad a la derecha en abscisas OX (en negro).
Como $g(x) = e^{1-x} = e^1.e^{-x}$ (en azul) , sabemos que la gráfica de e^{-x} es exactamente igual que la de e^x pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY, y al estar multiplicada por e, está dilatada a lo largo de dicho eje OY. En concreto si x = 0, g(0) = e, por tanto un esbozo de dichas gráficas es



Para encontrar el punto de corte igualamos las funciones $e^{x-1} = e^{1-x}$, de donde x – 1 = 1 – x, con lo cual el punto de corte es x = 1.
(b)
Área = $\int_0^1 \left(e^{1-x} - e^{x-1}\right).dx = \left[-e^{1-x} - e^{x-1}\right]_0^1 = (-e^0 - e^0) - (-e^1 - e^{-1}) = -2 + e + (1/e)\ u^2$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

(a) [0'75 puntos] Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.

(b) [1'75 puntos] Para α =1, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial AX = B.

Solución

(a)

$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Existe A^{-1} si su determinante es ≠ 0

det(A) = |A| = $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ = 3α - 2 = 0, de donde α = 2/3.

Para α ≠ 2/3, existe A^{-1}.

(b)

Si α = 1, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y det(A) = 1 con lo cual existe A^{-1}

Multiplicando por la izquierda la ecuación AX = B por la matriz inversa de A, A^{-1}, tenemos A^{-1}. AX = A^{-1}.B, es decir X = A^{-1}.B

Recordamos que A^{-1} = (1/|A|). Adj(A^t)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, Adj($A^t$) = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, A^{-1} = (1/|A|). Adj(A^t) = (1/1). $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Sea "r" la recta definida por $\frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5}$ y "s" la recta definida por $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$

(a) [1'25 puntos] Halla k sabiendo que las rectas r y s se cortan en un punto.

(b) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Solución

(a)

De r ≡ $\frac{x-2}{3} = \frac{y-k}{4} = \frac{z}{5}$ tomamos un punto A(2,k,0) y un vector director **u** = (3,4,5)

De s ≡ $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ tomamos un punto B(-2,1,3) y un vector director **v** = (-1,2,3)

Evidentemente las rectas se cortan o se cruzan porque los vectores **u** y **v** no son proporcionales.

Las rectas se cortan si y solo si det(**AB**,**u**,**v**) = 0

AB = (-4, 1-k, 3)

det(**AB**,**u**,**v**) = 0 = $\begin{vmatrix} -4 & 1-k & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ = (- 4)(12 - 10) – (1 - k)(9+5) + (3)(6+4) = 14k + 8 = 0, de donde k = -4/7 para que las rectas se corten.

(b)

Para calcular el punto de corte C, ponemos ambas rectas en paramétricas con parámetros distintos e igualamos x = x, y = y y z = z

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 4/7+4t \\ z = 5t \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -2-m \\ y = 2+2m \\ z = 3+3m \end{cases}$$

Igualamos, en nuestro caso

x = x

z = z

2 + 3t = -2 - m

5t = 3 + 3m

Resolviendo este sistema obtenemos t = -9/14 y m = -29/14, lo cual verifica z = z, por tanto el punto de corte es
C(2 - (-29/11), 1 + 2(-29/11), 3 + 3(-29/11)) = C(1/14, -44/14, -45/14)

El Plano pedido es, es el que pasa por el punto de corte de las rectas y tiene como vectores paralelos independientes **u** y **v**, es decir det(**x - c**,**u**,**v**) = 0

det(**x - c**,**u**,**v**) = 0 = $\begin{vmatrix} x-1/14 & y+44/14 & z+45/14 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ =

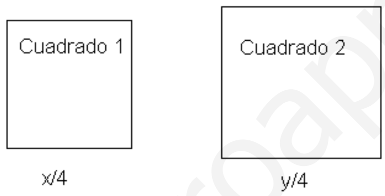
= (x - 1/14)(12 - 10) – (y + 44/14)(9+5) + (z + 45/14)(6+4) = 2x – 14y + 10z – 12 = 0. Simplificando nos quedaría el plano x – 7y + 5z – 6 = 0

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 3 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos. El precio de cada uno de estos materiales es 2 y 3 euros por centímetro cuadrado, respectivamente. Por otra parte, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 metro. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo?

Solución



Cuadrado 1: Lado x/4, perímetro x y área = $(x/4)^2 = x^2/16$
Cuadrado 2: Lado y/4, perímetro y e área = $(y/4)^2 = y^2/16$
Relación entre las variables x + y = 1 m = 100 cm. *Pasamos todo a cm.*
Función a optimizar A = $2\cdot(x^2/16) + 3\cdot(y^2/16)$. Sustituyendo y = 100 – x
A(x) = $x^2/8 + (3/16)\cdot(100 - x)^2$
Recuerdo que:
Si f '(a) = 0 y f ''(a) < 0, x = a es un máximo relativo
Si f '(a) = 0 y f ''(a) > 0, x = a es un mínimo relativo

A(x) = $x^2/8 + (3/16)\cdot(100 - x)^2$
A ´(x) = 2x/8 - (6/16).(100 - x) = 2x/8 - (3/8).(100 - x) = (1/8)(2x - 300 + 3x) = (1/8)(5x - 300)
A '(x) = 0, 5x - 300 = 0, de donde x = 300/5 = 60 cm
A''(x) = 5/8
Como A ''(2/5) = 5/8 > 0, x = 60 cm es un mínimo
Si x = 60, y = 100 – x = 100 – 60 = 40 cm.
Los lados de los cuadrados son lado 1 = 60/4 = 15 cm. y lado 2 = y/4 = 40/4 = 10 cm.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Sea f : R $\rightarrow$ R la función definida por f(x)= $x(x – 3)^2$.
(a) [1 punto] Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
(b) [0'5 puntos] Haz un esbozo de la gráfica de f.
(c) [1 punto] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución

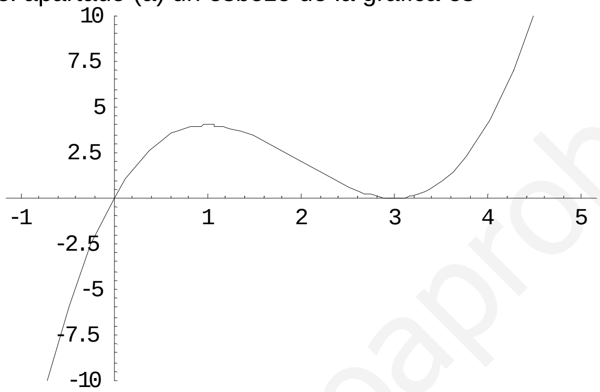
(a)
Estudiamos f '(x), der donde nos saldrá el crecimiento y el decrecimiento
f '(x) = $(x – 3)^2$ + x.2.(x-3) = $3x^2 – 12x + 9$
f '(x) = 0, en nuestro caso $3x^2 – 12x + 9 = 0$, de donde x = 1 y x = 3, que serán los posibles extremos relativos.

Si x < 1, f '(0) = 9 >< 0, luego f '(x) < 0 y por tanto f(x) crece en x < 1
Si x 1 < x < 3, f '(2) = - 3 < 0, luego f '(x) < 0 y por tanto f(x) decrece en 1 < x < 3
Si x > 3, f '(4) = 9 > 0, luego f '(x) > 0 y por tanto f(x) crece en x > 3
Resumiendo f(x) crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en (1,3)
Por definición x = 1 es un máximo relativo que vale f(1) = 4
Por definición x = 3 es un máximo relativo que vale f(3) = 0
(b)
Para hacer un esbozo de la gráfica veamos los cortes con los ejes y el comportamiento en $\pm\infty$
Como f(0)= 0, punto (0,0)
Si f(x) = 0, obtenemos x = 0 y x = 3. Puntos de corte (0, 0) y (3, 0)

$$\lim_{x\to\infty} x(x-3)^2 = \lim_{x\to\infty}(x^3-6x^2+9x) = \lim_{x\to\infty}(x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} x(x-3)^2 = \lim_{x\to -\infty}(x^3-6x^2+9x) = \lim_{x\to -\infty}(x^3) = -\infty$$

Por tanto teniendo en cuenta el apartado (a) un esbozo de la gráfica es



(c)
Área = $\int_0^3 [x^3 - 6x^2 + 9x].dx = [x^4/4 - 2x^3 + (9/2)x^2]_0^3 = (3^4)/4 - 6.(27/3) + 81/2 = 27/4\ u^2$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 3 de sobrantes de 2007.

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + \lambda y + z &= 2\ . \\ x + y + \lambda z &= \lambda - 1 \end{aligned}$$

(a) [1'5 puntos] Determina el valor de λ para que el sistema sea incompatible.
(b) [1 punto] Resuelve el sistema para λ=1.

Solución

(a)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + \lambda y + z &= 2\ . \\ x + y + \lambda z &= \lambda - 1 \end{aligned}$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda-1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0$, el rango de (A) por lo menos es 2.

El sistema será incompatible si rango (A) = 2 ≠ rango (A^*) = 3
Para que rango (A) = 2, |A| = 0

det(A) = $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^aC - 1^aC \\ 3^aF - 1^aC \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$

De |A| = 0, obtenemos (λ - 2)(λ – 1) = 0 de donde λ = 2 y λ = 1. Luego rango(A) = 2

Para que rango (A*) = 3, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^aC-1^aC \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -3\lambda + 3$

Para que rango (A*) = 3, $-3\lambda + 3 \neq 0$, resulta que $\lambda \neq 1$.
Como tiene que ocurrir que $\lambda = 2$ y $\lambda = 1$ por un lado y por el otro $\lambda \neq 1$, la única posibilidad que nos queda es $\lambda = 2$.

Se puede comprobar y ver que es incompatible con $\lambda = 2$.
(b)
Si λ = 1, ya sabemos que es compatible e indeterminado por tanto nos quedamos ya con dos ecuaciones y dos incógnitas principales

x + y + z = 0
2x + y + z = 2 .
x + y + z = 0
Nos quedamos con la 1ª y la 2ª

x + y + z = 0
2x + y+ z = 2. Restando a la 2ª la 1ª , queda x = 2
Hacemos z = m
2 + y + m = 0
4 + y + 2m = 2, de donde y = - m – 2
Solución (x, y, z) = (2, - 2 – m, m) con $m \in R$.

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 3 de sobrantes de 2007.

[2'5 puntos] Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación x + 2y + 3z - 1 = 0 que corta perpendicularmente a la recta definida por $\begin{cases} x = 2z+4 \\ y = 2z+3 \end{cases}$ en el punto (2,1, - 1).

Solución (De Conchi Mérida)

Forma 1ª

Se pide calculemos una recta s contenida en el plano π y que corta a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ perpendicularmente en el punto P(2,1,-1)

$r \equiv \begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$. En forma paramétrica es $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 2m \\ y = 3 + 2m \\ z = m \end{cases}$

d_s = vector director de s n_π = vector normal del plano π = (1,2,3)
d_r = vector director de r = (2,2,1) y P_r = punto de r = (4,3,0)
Como la recta "s" está contenida en el plano "π", los vectores d_s y n_π son perpendiculares.
Como "s" y "r" se cortan perpendicularmente, los vectores d_s y d_r. son perpendiculares Tenemos que d_s es perpendicular a la vez a los vectores d_r y n_π, por tanto d_s es el producto vectorial de d_r y n_π, es decir

$d_s = d_r \times n_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (4, -5, 2)$

Como "s" pasa por el punto de intersección P(2,1,-1), su ecuación paramétrica es:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

Forma 2ª

La recta "s" pedida la vamos a dar como intersección de dos planos, uno el π y otro π' que será un plano

perpendicular a r pasando por P *(la intersección de estos planos es la recta pedida porque pasa por P (que está en ambos planos) y además es perpendicular a r porque todas las rectas del plano π' son perpendiculares a r)*
$\pi' \perp r \Rightarrow$ vector normal de $\pi' = n_{\pi'} = d_r = (2,2,1) \Rightarrow \pi' : 2x + 2y + z + D = 0$ pasa por P(2,1,-1)

$$2.2 + 2.1 + (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow \pi' : 2x + 2y + z - 5 = 0$$

La recta es $s \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z - 5 = 0 \\ x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

<u>Yo lo que he hecho ha sido calcular un plano perpendicular, y no tiene porque ser perpendicular.</u>
Plano π de ecuación x + 2y + 3z - 1 = 0, vector normal **n** = (1,2,3)
Recta "r" $\begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$
El punto (2, 1, -1) pertenece a la recta y al plano (se ve sustituyéndolo)

La recta "s" pedida la vamos a dar como intersección de dos planos, uno el π y para el otro formamos el haz de planos que determina la recta "r" y le imponemos la condición de que sea perpendicular al plano "π" (sus vectores normales han de ser perpendiculares es decir su producto escalar 0)
Haz de planos que determina "r"
(x – 2z – 4) + m(y – 2z – 3) = 0 = x + my + (-2 - 2m)z + (- 4 – 3m) = 0
Vector normal genérico del haz de planos **n'** = (1, m , - 2 – 2m)
n y **n'** perpendiculares luego **n • n'** = 0 = (1,2,3) • (1, m , - 2 – 2m) = 1 + 2m – 6 – 6m = 0, de donde m = -5/4.
El otro plano es (x – 2z – 4) + (-5/4)(y – 2z – 3) = 0 = x –(5/4)y + (1/2)z – 1/4 = 0. Multiplicando por 4 nos queda el plano 4x – 5y + 2z – 1 = 0
La recta "s" pedida es $\begin{cases} 4x-5y+2z1=0 \\ x+2y+3z-1=0 \end{cases}$