Opción A

Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

Sea f : $[0, 2\pi] \to R$ la función definida por $f(x)= e^x(\text{sen } x + \cos x)$.
(a) [1'25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
(b) [1'25 puntos] Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución

(a)
$f(x)= e^x(\text{sen } x + \cos x)$.
Estudiamos el signo de f '(x) es el intervalo $[0, 2\pi]$
$f'(x)= e^x(\text{sen } x + \cos x) + e^x(\cos x - \text{sen } x) = e^x(2\cos(x)) = 2e^x(\cos(x))$
De f '(x) = 0, obtenemos cos(x) = 0, porque la exponencial no se anula nunca.
Las soluciones de cos(x) = 0 en $[0, 2\pi]$ son $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$.
Como $f'(\pi/4) = 2e^{\pi/4}\cos(\pi/4) \approx 3'1 > 0$, f(x) estrictamente creciente en $(0, \pi/2)$
Como $f'(\pi) = 2e^{\pi}\cos(\pi) \approx -46'28 < 0$, f(x) estrictamente decreciente en $(\pi/2, 3\pi/2)$
Como $f'(2\pi - \pi/6) = f'(11\pi/6) = 2e^{11\pi/6}\cos(11\pi/6) \approx 549'43 > 0$, f(x) estrictamente creciente en $(3\pi/2, 2\pi)$
Por definición $x = \pi/2$ es un máximo relativo y $x = 3\pi/2$ es un mínimo relativo
(b)
Para ver los puntos de inflexión calculamos las soluciones de f ''(x) = 0, y vemos que f ''(x) cambia de signo a izquierda y derecha de ellos.
$f(x)= e^x(\text{sen } x + \cos x)$.
$f'(x)= 2e^x(\cos(x))$
$f''(x)= 2e^x(\cos(x)) + 2e^x(-\text{sen}(x)) = 2e^x(\cos(x) - \text{sen}(x))$
De f ''(x) = 0, tenemos cos(x) – sen(x) = 0, es decir sen(x) = cos(x). En el intervalo $[0, 2\pi]$ esto es cierto en $x = \pi/4$ y $x = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$, que serán los posibles puntos de inflexión.
Como $f''(\pi/6) > 0$ y $f''(\pi/2) < 0$, $x = \pi/4$ es punto de inflexión.
Como $f''(\pi/2) < 0$ y $f''(\pi + \pi/3) > 0$, $x = \pi + \pi/4$ es punto de inflexión.

Ejercicio 2 de la Opción A del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

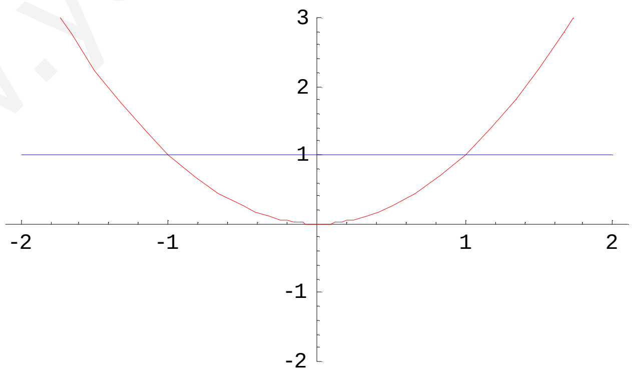
[2'5 puntos] Sean $f : R \to R$ y $g : R \to R$ las funciones dadas por

$$f(x) = x^2 \quad y \quad g(x) = a \quad (\text{con } a> 0)$$

Se sabe que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f y g es 4/3. Calcula el valor de la constante a.

Solución

Como a > 0, la gráfica de g(x) = a es un recta paralela al eje OX y por encima de él.
La gráfica de f(x) es una parábola con vértice en (0,0) y ramas hacia arriba.
Un esbozo es



Como el área encerrada por el recinto es 4/3, y sabemos que la recta y = a es mayor que cero, tenemos que

$$Área = \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \frac{4}{3}$$, siendo a y b las soluciones de f(x) = g(x)

De f(x) = g(x) tenemos $x^2 = a$, de donde $x = +\sqrt{a}$ y $x = -\sqrt{a}$

$$\frac{4}{3}=\int_a^b (g(x)-f(x))dx=\int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}}(a-x^2)dx=\left\{\begin{matrix}\text{Al ser el recinto}\\ \text{simétrico}\end{matrix}\right\}=$$

$$=2\int_{-\sqrt{a}}^{+\sqrt{a}}(a-x^2)dx=2\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}}=2\left[a\sqrt{a}-\frac{(\sqrt{a})^3}{3}\right]$$

Resolviendo la ecuación $2\left[a\sqrt{a}-\frac{(\sqrt{a})^3}{3}\right]=\frac{4}{3}$, tenemos $2a\sqrt{a=2}$, es decir $a^3 = 1$, de donde **a = 1**

Ejercicio 3 de la Opción A del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Sea I la matriz identidad de orden 3 y $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Calcula, si existe, el valor de k para el cual $(A-kI)^2$ es la matriz nula.

Solución

$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$; $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $O=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$(A-kI)^2 = (A-kI).(A-kI) = 0$

$(A-kI)=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k & -1 & -2\\ -1 & -k & -2\\ 1 & 1 & 3-k\end{pmatrix}$

$(A-kI).(A-kI)=\begin{pmatrix}-k & -1 & -2\\ -1 & -k & -2\\ 1 & 1 & 3-k\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-k & -1 & -2\\ -1 & -k & -2\\ 1 & 1 & 3-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k^2-1 & 2k-2 & 4k-4\\ 2k-2 & k^2-1 & 4k-4\\ -2k+2 & -2k+2 & k^2-6k+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Igualando cada expresión a cero tenemos tendríamos nueve ecuaciones. Resolvemos la primera $k^2 - 1 = 0$. Sus soluciones son k = 1 y k = .1, y la única que verifica todas las expresiones es **k = 1**

Ejercicio 4 de la Opción A del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

Se sabe que los planos de ecuaciones x +2y + bz = 1, 2x + y + bz = 0, 3x +3y − 2z = 1 se cortan en una recta r.
(a) [1'25 puntos] Calcula el valor de b.
(b) [1'25 puntos] Halla unas ecuaciones paramétricas de r.

Solución

(a)
Si los planos se cortan en una recta nos piden que estudiemos el valor de b para que el sistema

x +2y + bz = 1,
2x + y + bz = 0,
3x +3y − 2z = 1

tenga infinitas soluciones con rango(A) = rango(A*) = 2, siendo A la matriz de los coeficientes y A* la matriz ampliada de dicho sistema.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & b\\ 2 & 1 & b\\ 3 & 3 & -2\end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & b & 1\\ 2 & 1 & b & 0\\ 3 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

En nuestro caso es suficiente con que det(A) = 0

$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & b\\ 2 & 1 & b\\ 3 & 3 & -2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ 2^a+1^a(-2)\\ 3^a+1^a(-3)\end{matrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & b\\ 0 & -3 & -b\\ 0 & -3 & -2-3b\end{vmatrix}$ = 1(6 + 9b – 3b) = 6 + 6b = 0, de donde **b = -1**.

(b)
Para la ecuación de la recta tomo las dos últimas ecuaciones

2x + y + bz = 0,
3x +3y − 2z = 1

con b = -1, es decir la recta es

$$2x + y - z = 0,$$
$$3x + 3y - 2z = 1$$

Como me piden las ecuaciones paramétrica tomo $z = \lambda \in \Re$, con lo cual

$2x + y = \lambda$,

$3x + 3y = 1 + 2\lambda$. Sumándole la 1ª multiplicada por (- 3) tenemos $-3x = 1 - \lambda$, de donde $x = (-1/3) + (1/3)\lambda$.

Sustituyendo este valor de x en la 1ª ecuación nos resulta $y = (2/3) + (1/3)\lambda$.

La recta en paramétricas es:

$x = (-1/3) + (1/3)\lambda$.

$y = (2/3) + (1/3)\lambda$.

$z = \lambda$, con $\lambda \in \Re$,

Opción B

Ejercicio 1 de la Opción B del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si} \quad x \le 2 \\ 6 - x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

(a) [0'75 puntos] Esboza la gráfica de f.

(b) [1 punto] Estudia la derivabilidad de f.

(c) [0'75 puntos] Calcula el área comprendida entre la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución

(a)

$f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si} \quad x \le 2 \\ 6 - x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Como $|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ +x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$, tenemos $f(x) = \begin{cases} x|x| & \text{si} \quad x \le 2 \\ 6 - x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 6 - x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

La gráfica de x^2 es la de una parábola con vértice en (0,0) y las ramas hacia arriba. Sólo se dibuja en [0,2].

La gráfica de $-x^2$ es la igual que la de x^2 pero simétrica respecto al eje OX. Sólo se dibuja en $(-\infty,0)$.

La gráfica de 6 – x es la de una recta, con dos puntos es suficiente para caberlo. Sólo se dibuja en $(0, \infty)$.

La función x|x| es continua en $\Re$, en particular en x < 2

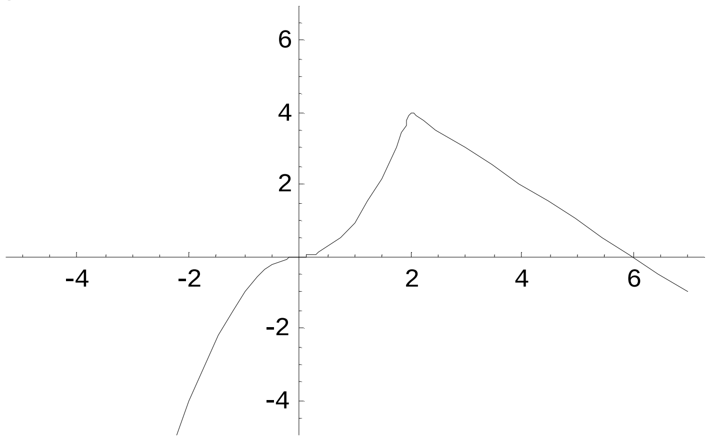
La función 6 – x es continua en $\Re$, en particular en x > 2.

Veamos la continuidad en x = 2, es decir que $f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b$

Un esbozo de la gráfica es



(b)
De la gráfica se observa que la función no es derivable en x = 2, no obstante vamos a comprobarlo

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ 6 - x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

En principio f es derivable $\Re$ - {0,2}. Estudiamos la derivada en x = 0 y x = 2.
f(x) derivable en x = 0, se verifica que f '(0 $^+$) = f '(0 $^-$)

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0} (-2x) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0} (2x) = 0$$

Como f '(0 $^+$) = f '(0 $^-$) = 0, **f es derivable en x = 0**
f(x) derivable en x = 2, se verifica que f '(2 $^+$) = f '(2 $^-$)

$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2} (2x) = 4$$

$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2} (-1) = -1$$

Como f '(2 $^+$) $\neq$ f '(2 $^-$) = 0, **f no es derivable en x = 2**

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

(c)
Viendo la gráfica el área pedida es

$$\text{Área} = \int_0^2 x^2dx + \int_2^6 (6-x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_2^6 = (8/3) + (36 - 18) - (12 - 2) = 32/3 \text{ u}^2.$$

Ejercicio 2 de la Opción B del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Calcula $\int_1^e x^2\ln(x)dx$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución

Calculamos primero la integral indefinida, que es una integral por partes $\left(\int udv = uv - \int vdu\right)$

$$\int x^2\ln(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x) \to du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2dx \to v = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}.\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}.\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9}$$

Por tanto $\int_1^e x^2\ln(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9}\right]_1^e$ = [(e^3/3)ln(e) – (1/9)e^3] – [(1/3)ln(1) – 1/9] = (2/9)e^3 + (1/9)

Ejercicio 3 de la Opción B del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Calcula, si existen, la matriz inversa de A y la de B.
(b) [1'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial AX + B = A + I, donde I denota la matriz identidad de orden 3.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que existan las matrices inversas A^{-1} y B^{-1} los determinantes de las matrices tienen que ser distinto de cero.

Como |B| = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(4-4) = 0$, B no tiene matriza inversa B^{-1}.

Como |A| = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a+1^a(-1) \\ 3^a+1^a(-1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, A tiene matriza inversa A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T)

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Adj($A^T$) = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^T) = $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b)

AX + B = A + I

AX = A + I – B, como existe A^{-1}, multiplicamos ambos miembros por la izquierda por A^{-1}.

A^{-1}(AX) = A^{-1}(A + I – B)

IX = A^{-1}(A + I – B)

X = A^{-1}(A + I – B) =

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 de la Opción B del Modelo 5 de Sobrantes de 2008

[2’5 puntos] Dados los puntos A(2,1,−1) y B(−2,3,1) y la recta “r” definida por las ecuaciones $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$, halla las coordenadas de un punto de la recta “r” que equidiste de los puntos A y B.

Solución

A(2,1,−1) y B(−2,3,1)

Ponemos la recta $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$ en paramétricas, tomamos un punto genérico suyo, el X, y le imponemos la condición d(**AX**) = d(**BX**)

Para la recta $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3x-2z=-5 \end{cases}$ en paramétricas, tomamos z = λ de R. Entrando en la ecuación segunda 3x – 2z = - 5, obtenemos x = (-5/3) + (2/3)λ. Sustituyendo en la primera x – y – z = - 1, el valor de x y de z, obtenemos y = (-2/3) – (1/3)λ

La recta en paramétricas es

x = (-5/3) + (2/3) λ

y = (-2/3) – (1/3) λ

z = λ de R.

Un punto genérico suyo es X((-5/3) + (2/3) λ, (-2/3) – (1/3) λ, λ)

AX = ((2/3) λ – 11/3 , (–1/3) λ – 5/3, λ + 1)

BX = ((2/3) λ + 1/3 , (–1/3) λ – 11/3, λ – 1)

$$d(\overrightarrow{AX})=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\lambda-\frac{11}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\lambda-\frac{5}{3}\right)^2+(\lambda+1)^2}\ ;\ d(\overrightarrow{BX})=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\lambda+\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\lambda-\frac{11}{3}\right)^2+(\lambda-1)^2}$$

Igualando, elevando al cuadrado y desarrollando obtenemos

(14/9)λ^2 – (16/9)λ + (155/9) = (14/9)λ^2 + (8/9)λ + (131/9), de donde (24/9)λ = 24/9, y por tanto **λ = 1**, y el punto equidistante de la recta es X((-5/3) + (2/3)1, (-2/3) – (1/3)1, 1) = **X(-1, -1, 1)**