Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 3 de año 2010

[2'5 puntos] Sea la función f : R → R dada por f(x) = $\begin{cases} e^x(x^2+ax) & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Calcula las constantes a, b y c sabiendo que f es derivable y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1 tiene pendiente 3.

Solución

f(x) = $\begin{cases} e^x(x^2+ax) & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{bx^2+c}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Me dicen que f es derivable e R y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1 tiene pendiente 3.

Como me dicen que f es derivable en R, y sabemos que si es derivable también es continua, por tanto f es continua y derivable en R en especial en x = 0.

Como f es continua en x = 0 tenemos que:

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} [f(x)] = \lim_{x\to 0^+} [f(x)]$$

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} [f(x)] = \lim_{x\to 0^-} [\ e^x.(\ x^2+ax)\ ] = \ e^0.(\ 0+0) = 1.0 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} [f(x)] = \lim_{x\to 0^+} [\ (bx^2 + c)/(x + 1)\ ] = (0 + c)/(0 + 1) = c$

Igualando tenemos **c = 0**.

f'(x) = $\begin{cases} e^x.(x^2+ax) + e^x.(2x+a) & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{2bx.(x+1) - 1.(bx^2)}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Como f es derivable en x = 0 tenemos que:

$$f'(0^-) = f'(0^+)$$

Vamos a utilizar la continuidad de la derivada que es más rápido

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} [f'(x)] = \lim_{x\to 0^-} [e^x.(\ x^2+ax) + e^x.(2x^2+a)] = e^0.(\ 0) + e^0.(0+a) = a$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} [f'(x)] = \lim_{x\to 0^+} [\ (\ 2bx(x+1) - bx^2\ ) / (x+1)^2\ ] = \ (\ 0(1) - 0\ ) / (1)^2 = 0$

Igualando tenemos **a = 0**.

Sabemos que la pendiente de la recta tangente en x = 1 es f'(1), y me dicen que vale 3.

Como x=1 es mayor que 0 utilizamos la expresión $f'(x) = (\ 2bx(x+1) - bx^2\ ) / (x+1)^2$, por tanto tenemos que $f'(1) = 3 = (\ 2b(1+1) - b.1\ )/(1+1)^2 = 3b/4$. De 3b/4 = 3 tenemos **b = 4**.

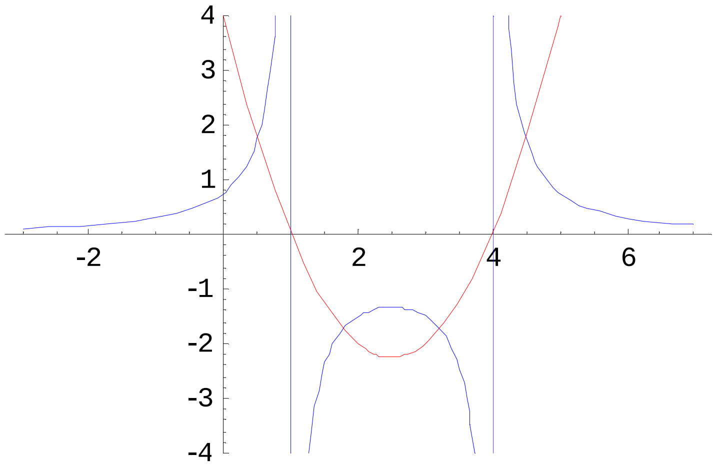
Ejercicio 2 opción A, modelo 3 de año 2010

[2'5 puntos] Dada la función f definida por $f(x) = 3/(x^2 -5x+4)$ para x ≠ 1y x ≠ 4. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas, y las rectas x =2, x = 3.

Solución

De $f(x) = 3/(x^2 -5x+4)$ para x ≠ 1y x ≠ 4, estamos viendo que x = 1 y x = 4, son asíntotas verticales de f(x). (Si se calcula el límite cuando x tiende a 1 ó a 4 nos sale infinito). La gráfica entre las asíntotas se parece a la de una parábola con las ramas hacia abajo (gráfica de la función 1/g(x) a partir de la gráfica de g(x) en el caso de que g(x) sea una parábola), a izquierda y derecha de las asíntotas verticales x = 1 y x = 4, sabiendo que también tiene como asíntota horizontal y = 0, la gráfica se parece a trozos de hipérbola (me acerco a las asíntotas).

Aunque no es necesario pongo un esbozo de la gráfica de "$x^2 - 5x + 4$" (en rojo) y de "$3/(\ x^2 - 5x + 4\ )$" (en azul)



Como en principio no sé la gráfica pongo valores absolutos (| |)
Área = | $(\int_2^3 [\,3/(x^2 - 5x+4)\,].dx$ | = | $(\int_2^3 [\,3/((x-1)(x-4))\,].dx$ | = **

La descomposición en suma de fracciones simples es $3/((x-1)(x-4)) = A/(x-1) + B/(x-4) =$
$= [\,(A(x-4) + B(x-1))\,] / ((x-1)(x-4))$. Igualando numeradores tenemos $3 = A(x-4) + B(x-1)$

Tomando x = 1, nos sale 3 = A(-3), de donde A = -1
Tomando x = 4, nos sale 3 = B(3), de donde B = 1

Seguimos ya con la integral
** = | $(\int_2^3 [\,A/(x-1) + B/(x-4)\,)\,].dx$ | = | $(\int_2^3 [\,-1/(x-1) + 1/(x-4)\,)\,].dx$ | =
$= |\,[\,-\ln|x-1| + \ln|x-4|\,]_2^3\,| = |\,(\,(-\ln(2) + \ln(1)\,) - (\,-\ln(1) + \ln(2)\,)\,)\,| = |\,-2\ln(2)\,| = 2.\ln(2)$ u.a.

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 de año 2010

Considera las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(a) [0'75 puntos] Calcula A^{-1}.
(b) [1'75 puntos] Resuelve la ecuación matricial $AXA^t - B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 2 y A^t es la matriz traspuesta de A.

Solución

(a)
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que A tenga inversa $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$, su determinante (| |) tiene que ser distinto de cero.

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b)
Antes de realizar este apartado tenemos que recordar que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, por tanto la inversa de la traspuesta es la traspuesta de la inversa.

$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

De $AXA^t - B = 2I$, tenemos $AXA^t = B + 2I$. Multiplicando esta expresión por la izquierda por A^{-1} y por la derecha por $(A^t)^{-1}$ tenemos:
$A^{-1}.AXA^t.(A^t)^{-1} = A^{-1}.(B + 2I).(A^t)^{-1}$. Por definición de matriz inversa tenemos

$I.X.I = X = A^{-1}.(B + 2I).(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.[\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}].\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 de año 2010

Considera los puntos A(1, 2, 1) y B(−1, 0, 3).
(a) [1’25 puntos] Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en tres partes iguales.
(b) [1’25 puntos] Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento AB y que pasa por A.

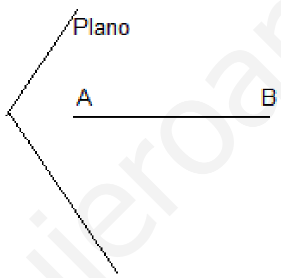
Solución

(a)

A(1, 2, 1) y B(−1, 0, 3).
Vectorialmente vemos que 3**AM** = **AB**, es decir 3(x-1,y-2,z-1) = (-2,-2,2); (3x-3,3y-6,3z-3) = (-2,-2,2). Igualando:
3x-3 = -2, de donde 3x = 1 y por tanto x = 1/3
3y-6 = -2, de donde 3y = 4 y por tanto x = 4/3
3z-3 = 2, de donde 3z = 5 y por tanto x = 5/3

El punto M es **M(1/3, 4/3, 5/3)**

El punto N lo podemos calcular viendo que es el punto medio de los puntos M y B, es decir:
N((1/3-1)/2, (4/3+0)/2, (5/3+3)/2) = **N(-2/6, 4/6, 14/6)**
(b)



El plano perpendicular al segmento AB por el punto A tiene como punto el A(1, 2, 1) y como vector normal el **n** = **AB** = (-2,-2, 2)
Un plano paralelo es -2x-2y+2z + K = 0, como pasa por A, tenemos -2(1)-2(2)+2(1) + K = 0, de donde K = 4 y el plano pedido es -2x-2y+2z + 4 = 0, o bien x + y – z – 2 = 0.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 3 de año 2010

[2’5 puntos] Sea f : R → R la función definida como $f(x) = (x + 1).\sqrt[3]{3 - x}$. Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = −5 y en el punto de abscisa x = 2.

Solución

Recta tangente y recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = −5 y en x = 2.

Recta tangente de f(x) en x = a es “ y – f(a) = f’(a).(x – a)”
Recta normal (perpendicular) de f(x) en x = a es “ y – f(a) = (-1/f’(a)).(x – a)”
$f(x) = (x + 1).\sqrt[3]{3 - x}$, con lo cual:
$f(-5) = (-5 + 1).\sqrt[3]{3 + 5} = -4.\sqrt[3]{2^3} = (-4)(2) = -8$
$f(2) = (2 + 1).\sqrt[3]{3 - 2} = (3).\sqrt[3]{1} = (3)(1) = 3$

$f'(x) = \sqrt[3]{3 - x} - (x + 1)/[\,3.\sqrt[3]{(3 - x)^2}\,)$, con lo cual:
$f'(-5) = \sqrt[3]{3 + 5} - (-5 + 1)/[\,3.\sqrt[3]{(3 + 5)^2}\,) = \sqrt[3]{2^3} - (-4)/[\,3.\sqrt[3]{(2^3)^2}\,) = 2 + 4/(3.2^2) = 2 + 1/3 = 7/3.$
$f'(2) = \sqrt[3]{3 - 1} - (2 + 1)./[\,3.\sqrt[3]{(3 - 2)^2}\,) = 1 - (3)./[\,3.(1)^2\,) = 1 - 1 = 0.$

La recta tangente de f(x) en x = -5 es “ y – f(-5) = f’(-5).(x + 5)”, es decir “ y – (-8) = (7/3)(x+5)
La recta normal de f(x) en x = -5 es “ y – f(-5) = (-1/f’(-5)).(x + 5)”, es decir “ y – (-8) = (-3/7)(x+5)

La recta tangente de f(x) en x = 2 es " y – f(2) = f'(2).(x – 2)", es decir " y – (3) = 0.(x–2) = 0, la recta y = 3
La recta normal de f(x) en x = 2, podemos pensar que es la recta vertical x = 2, al ser la recta tangente la recta horizontal y = 3.

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 de año 2010

Considera la función f : R → R definida por f(x) = x|2 − x|.
(a) [1 punto] Esboza su gráfica.
(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y la recta de ecuación x=3.

Solución

(a)

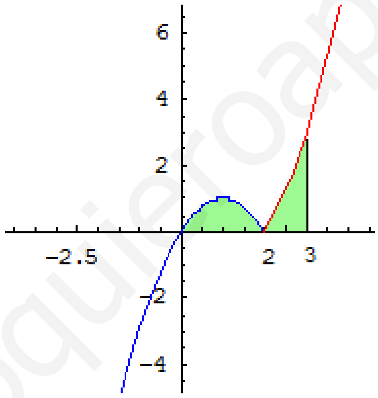
Sabemos que $|2 - x| = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, por tanto $f(x) = x|2 - x| = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

Esta función es continua en todo R porque el valor absoluto es una función continua en todo R, y el producto de funciones continua y compuesta de funciones continuas es continua

Si x < 2 tenemos la parábola $-x^2 + 2x$ que como sabemos tiene las ramas hacia abajo, corta al eje OX en x = 0 y x = 2, y el vértice en (-b/2a, f(-b/2a)) = (1, 1). (Sólo la dibujamos para x < 2, en azul)

Si x ≥ 2 tenemos la parábola $x^2 - 2x$ que como sabemos tiene las ramas hacia arriba, corta al eje OX en x = 0 y x=2, y el vértice en (-b/2a, f(-b/2a)) = (1, -1). (Sólo la dibujamos para x ≥ 2, en rojo)

Un esbozo de la gráfica es



(b)
El área del recinto limitado por f, el eje OX y la recta x=3, según vemos en la figura es
Área = $= \int_0^2 (-x^2+2x)dx + \int_2^3 (x^2-2x)dx = [-x^3/3+x^2]_0^2 + [x^3/3-x^2]_2^3 = ((-8/3+4)-0) + ((9-9) - (8/3 - 4)) = 8/3$ u.a.

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 de año 2010

[2'5 puntos] Obtén un vector no nulo **v** =(a, b, c), de manera que las matrices siguientes tengan simultáneamente rango 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Solución

v =(a, b, c), $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ el rango de A ya es 2.

En B como $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ el rango de B ya es 2.

Para que rango(A) = rango(2) = 2, sus determinantes (| |) han de ser 0.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}$ ={Adjuntos 2ª fila} = 1(-1)(c-a) +0 + b(-1)(0) = a – c = 0, de donde **a = c**.

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix}$ ={Adjuntos 1ª fila} = 2(1)(-c-b) +0 + a(3) = 3a – 2b – 2c = 0. Como a = c tenemos 3c-2b-2c = 0, de donde **b = c/2**.

El vector pedido es **v** =(c, c/2, c), con "c" cualquier nº distinto de cero porque no puede ser nulo el vector **v**.

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 de año 2010

Considera el plano π definido por 2x − y + nz = 0 y la recta r dada por

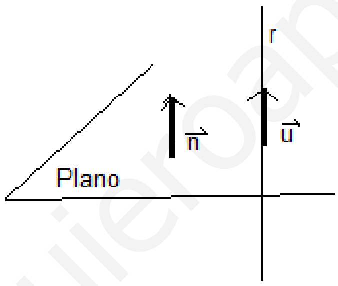
$$(x – 1)/m = y/4 = (z – 1)/2$$

con m ≠ 0.

(a) [1'25 puntos] Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π.
(b) [1'25 puntos] Calcula m y n para que la recta r esté contenida en el plano π.

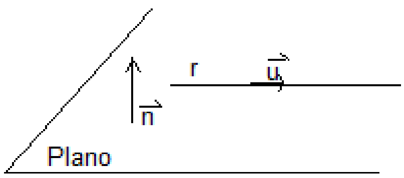
Solución

(a)
π : 2x − y + nz = 0. Un vector normal es **n** = (2,-1,n)
"r" : (x – 1)/m = y/4 = (z – 1)/2, con m ≠ 0. Un punto es A(1,0,1) y un vector director es **u** = (m,4,2)



Si la recta "r" es perpendicular al plano "π" los vectores **n** y **u** son paralelos y por tanto sus coordenadas proporcionales, es decir 2/m = -1/4 = n/2, de donde obtenemos dos ecuaciones:
2/m = -1/4, luego **m = -8**.
-1/4 = n/2, luego **n = -1/2.**

(b)



Si la recta "r" está contenida en el plano su punto A(1,0,1) pertenece la plano, es decir 2(1) − 0 + n(1) = 0, de donde **n = -2**.
Como la recta está contenida en el plano es paralela a él y por tanto los vectores **n** y **u** son perpendiculares y su producto escalar (**.**) es cero.
n.u = 0 = (2,-1,n)**.** (m,4,2) = (2,-1,-2)**.** (m,4,2) = 2m – 4 – 4 = 2m – 8 = 0, de donde **m = 4**.