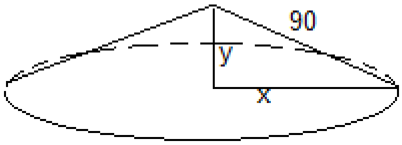
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 4 Junio Específico 2010

[2'5 puntos] La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 90 cm. Si se hace girar alrededor de uno de sus catetos, el triángulo engendra un cono. ¿Qué medidas han de tener los catetos del triángulo para que el volumen del cono engendrado sea máximo? (Recuerda que el volumen del cono es $V = (1/3)\pi r^2h$).

Solución



Función a maximizar $V = (1/3)\pi r^2h = (1/3)\pi x^2y$

Relación entre las variables $x^2 + y^2 = 90^2$, de donde $y = +\sqrt{(8100 - x^2)}$, tomamos sólo la solución positiva porque es una longitud.

Función a maximizar $V(x) = (\pi/3)\, x^2.\sqrt{(8100 - x^2)}$

Si $V'(a) = 0$ y $V''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo de $V(x)$

$V'(x) = (2\pi/3)x.\sqrt{(8100 - x^2)} + (\pi/3)x^2.[-x/\sqrt{(8100 - x^2)}]$

De $V'(x) = 0$, tenemos $(2\pi/3)x.\sqrt{(8100 - x^2)} = (\pi/3)\, x^3/[\sqrt{(8100 - x^2)}]$, es decir $(2\pi/3)x.(8100 - x^2) = (\pi/3)\, x^3$, por tanto $3x^3 - 16200x = x(3x^2 - 16200) = 0$. Las soluciones son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{(5400)}$. Como "x" es una longitud $x = +\sqrt{(5400)} = 30\sqrt{(6)}$

Las medidas de los catetos son $x = \sqrt{(5400)} = 30\sqrt{(6)}$ cm. e $y = \sqrt{(8100–5400)} =\sqrt{(2700)} = 30\sqrt{(3)}$ cm.

Veamos que $x = 30\sqrt{(6)}$ es un máximo, viendo que $V''(30\sqrt{(6)}) < 0$

$V'(x) = (2\pi/3)x.\sqrt{(8100 - x^2)} - (\pi/3)x^3/[\sqrt{(8100 - x^2)}]$

$V''(x) = (2\pi/3)\sqrt{(8100 - x^2)} - (2\pi/3)x^2/[\sqrt{(8100 - x^2)}] -$

$- \; (\pi/(3.(8100 - x^2)).[\, 3x^2.\sqrt{(8100 - x^2)} + x^4/\sqrt{(8100 - x^2)}\,]$

Sustituyendo "$30\sqrt{(6)}$" por "x" en $V''(x)$ y simplificando obtenemos

$V''(30\sqrt{(6)}) = (\pi/3).(\, \sqrt{(2)} - 420\sqrt{(3)}\,) < 0$, luego $x = 30\sqrt{(6)}$ es un máximo.

Ejercicio 2 opción A, modelo 4 Junio Específico 2010

Considera las funciones $f, g : R \to R$ definidas por $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = |x|$.

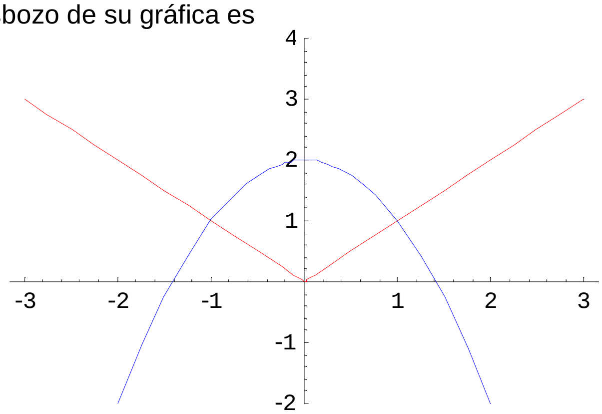
(a) [1 punto] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución

$$f(x) = 2 - x^2;\;\; g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La gráfica de "$-x^2$" es igual que la de x^2 (parábola de vértice (0,0) y ramas hacia arriba) pero simétrica respecto al eje OX. La grafica de "$6 - x^2$" es una parábola igual que $-x^2$ pero desplazada 2 unidades hacia arriba en ordenadas OY. "x" y "$-x$" son rectas luego con dos puntos es suficiente para dibujarlas ("x" es la bisectriz del I y III cuadrante, y solo se dibuja para $x \ge 0$, y "$-x$" es la bisectriz del II y IV cuadrante, y solo se dibuja para $x < 0$), luego un esbozo de su gráfica es



(b)

Para calcular el área vemos los puntos de corte (lo veremos para x > 0) y tenemos en cuenta que es simétrica respecto al eje OY y el área será el doble de la mitad del recinto.

Igualamos $2 - x^2$ a x (utilizamos x > 0)

$2 - x^2 = x$, de donde $x^2 + x - 2 = 0$. Las soluciones son x = -2 y x = 1. Solo utilizamos la solución x = 1 (x era > 0)

Área = $2.\int_0^1 [(2 - x^2) - (x)]dx = 2.[2x - x^3/3 - x^2/2]_0^1 = 2.[(2 - 1/3 - 1/2) - (0)] = 7/3\ u^2$

Ejercicio 3 opción A, modelo 4 Junio Específico 2010

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Comprueba que se verifica $2A - A^2 = I$.

(b) [1'25 puntos] Calcula A^{-1}. (Sugerencia: Puedes utilizar la igualdad del apartado (a)).

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix};\ 2.A = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Veamos que $2A - A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

$$2A - A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, como queríamos ver.

(b)

Sabemos que una matriz cuadrada A tiene matriz inversa B si A.B = B.A = I.

Utilizando la igualdad $2A - A^2 = I$, y sacando factor común la matriz A por la derecha tenemos $(2I - A).A = I$, y por la definición de inversa tenemos que $A^{-1} = 2I - A$, es decir:

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

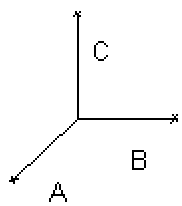
Si multiplicásemos A por A^{-1} nos saldría I.

Ejercicio 4 opción A, modelo 4 Junio Específico 2010

[2'5 puntos] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x + 3y + 2z = 6$ con los ejes coordenados.

Solución

(a)



Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

El punto A se obtiene resolviendo el sistema "plano" = 0, y = 0, z = 0, con lo cual x = 1 y el punto es A(1,0,0)

El punto B se obtiene resolviendo el sistema "plano" = 0, x = 0, z = 0, con lo cual y = 2 y el punto es B(0,2,0)

El punto C se obtiene resolviendo el sistema "plano" = 0, x = 0, y = 0, con lo cual x = 3 y el punto es C(0,0,3).
Otra forma de hacerlo es poniendo el plano en su forma segmentaria "x/a + y/b + z/c = 1", y los puntos de corte son A(a,0,0), B(0,b,0) y C(0,0,c).
En nuestro caso dividiendo el plano 6x + 3y + 2z = 6 entre 6 sale "x/1 + y/2 + z/3 = 1", con lo cual nos salen los mismos puntos que antes.
Sabemos que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan dos vectores con origen común, es decir 1/2 del módulo del producto vectorial (lo indicamos con **x**) de dos vectores del triángulo con origen común.
Tomamos los vectores **AB** y **AC**.

AB = (-1, 2, 0) ; **AC** = (-1, 0, 3) ; **ABxAC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ = **i**(6) – **j**(-3) +**k**(2) = (6, 3, 2)

Área triángulo = (1/2)||**ABxAC**|| = (1/2)($\sqrt{}$($6^2+3^2+2^2$) = (1/2)($\sqrt{}$(49) = 7/2 u^2.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 4 Junio Específico 2010

Sea f la función definida como f(x) = $x^3/(x^2 - 1)$ para x ≠ -1 y x ≠ 1.
(a) [1 punto] Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
(c) [0'5 puntos] Con los datos obtenidos esboza la gráfica de f .

Solución

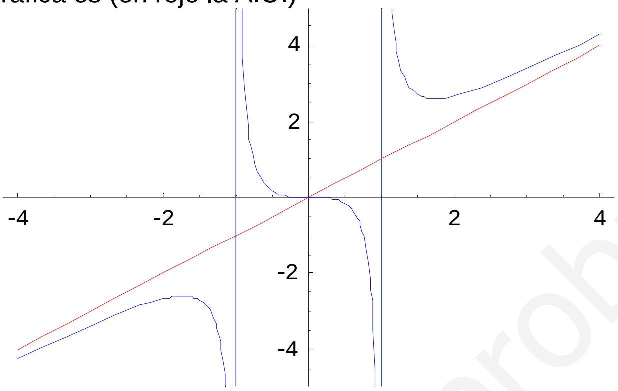
(a)
Asíntotas
x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a^+}$ [(f(x)] = ∞
Como $\lim_{x\to 1^+} [x^3/(x^2 - 1)] = [\ 1/0^+\ ] = +\infty$; la recta **x = 1** es una A.V. de f(x).
$\lim_{x\to 1^-} [x^3/(x^2 - 1)] = [\ 1/0^-\ ] = -\infty$.
Como $\lim_{x\to -1^+} [x^3/(x^2 - 1)] = [\ -1/0^-\ ] = +\infty$; la recta **x = -1** es una A.V. de f(x).
$\lim_{x\to -1^-} [x^3/(x^2 - 1)] = [\ -1/0^+\ ] = -\infty$.

Como en la función que me han dado el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador, f(x) tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma y = mx+n con m = $\lim_{x\to\infty}$ [f(x)/x)] y n = $\lim_{x\to\infty}$ [f(x) - mx)], y es la misma en +∞ y en -∞.
También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.
Lo vamos a realizar por división

x^3	$x^2 - 1$
$-x^3 + x$	x
x	

La A.O. de f(x) es **y = x** en ± ∞.
Como $\lim_{x\to\infty}$ [f(x) - x)] = 0^+, f(x) está por encima de la A.O. en + ∞ (le damos a x el valor + 1000)
Como $\lim_{x\to\infty}$ [f(x) - x)] = 0^-, f(x) está por debajo de la A.O. en - ∞ (le damos a x el valor - 1000)
Si hay es este caso A.O no hay asíntotas horizontales (A.H.)
(b)
Monotonía. Estudio de f '(x)
f(x) = $[x^3/(x^2 - 1)]$
f '(x) = $[3x^2.(x^2 - 1) - x^3(2x)] / (x^2 - 1)^2 = (x^4 - 3x^2) / (x^2 - 1)^2$
Si f '(x) = 0; $x^4 - 3x^2 = 0$ o bien $x^2(x^2 - 3) = 0$, de donde x = 0 (doble) y x = ± $\sqrt{3}$.
Como f '(-2) = 4/(+) > 0, f'(x) > 0 en x < - $\sqrt{3}$, luego f(x) es estrictamente creciente en x < - $\sqrt{3}$.

Como f '(-0'1) = (-)/(+) < 0, f'(x) < 0 en (- √(3) < x < 0) – {-1}, luego f(x) es estrictamente decreciente en (- √(3) < x < 0) – {-1}.
Como f '(0'1) = (-)/(+) < 0, f'(x) < 0 en (0 < x < √(3) – {1}, luego f(x) es estrictamente decreciente en (0 < x < √(3) – {1}.
Como f '(2) = 4/(+) > 0, f'(x) > 0 en x > + √(3), luego f(x) es estrictamente creciente en x > + √(3).
Por definición en x = - √(3) hay un máximo relativo que vale f((- √(3)) = - 3√(3) /2
Por definición en x = + √(3) hay un máximo relativo que vale f((+ √(3)) = + 3√(3) /2
En x = 0 la función decrece y se podría ver que es un punto de inflexión.
(c)
Un esbozo de la gráfica es (en rojo la A.O.)

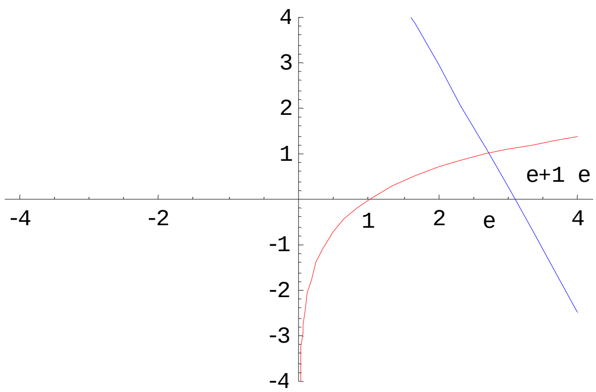


Ejercicio 2 opción B, modelo 4 Junio Específico 2010

Dada la función f: (0,+∞) → R definida por f(x) = ln x, donde ln la función logaritmo neperiano, se pide:
a) [0'75 puntos] Comprueba que la recta de ecuación $y = -ex + 1 + e^2$ es la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = e.
b) [1'75 puntos] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta normal del apartado (a).

Solución

a)
Sabemos que la recta normal (perpendicular) de f(x) en x = e es " y – f(e) = (-1/f'(e)).(x – e)"
f(x) = ln(x), luego f(e) = ln(e) = 1
f'(x) = 1/x, luego f'(e) = 1/e, por tanto (-1/f'(e)) = [-1/(1/e)] = -e, y la recta normal es
$y – 1 = -e.(x – e) = -ex + e^2$, luego $y = -ex + 1+ e^2$ como pedían.
b)
Vamos a realizar un esbozo de la región. La grafica de ln(x) es conocida (x = 0 es asíntota vertical, siempre creciente, corta al eje OX en x = 1, y simétrica respecto a la bisectriz y = x de su recíproca e^x), la gráfica de $y = -ex + 1+ e^2$ es la de su recta perpendicular en x = e. (ln(x) en rojo y la recta en azul)



Calculamos el punto de corte de $y = -ex + 1+ e^2$ con el eje OX, haciendo $y = 0$, con lo cual nos queda $x = e + 1/e$. Ya hemos dicho antes que las gráficas se cortan en $x = e$, luego el área pedida es

Área = $\int_1^e(\ln(x))dx$ (*) + $\int_e^{e+1/e}(-ex + 1+ e^2)dx$ =
$= [x\ln|x| - x]_1^{\ e} + [-ex^2/2 + x + e^2x]_e^{\ e+1/e} = [(e\ln|e| - e) - (1\ln|1| - 1)] +$
$+ [(-e(e+1/e)^2/2 + (e+1/e) + e^2(e+1/e)) - (-e.e^2/2 + e + e^2e)] = 1 + 1/(2e)\ u^2$.

(*) $\int \ln(x)dx$ = {es una integral por partes, $u = \ln(x)$ y $dv = dx$, de donde $du = (dx)/x$ y $v = x$ } = $x\ln|x| - \int x. (dx)/x = x\ln|x| - \int dx = x\ln|x| - x$

Ejercicio 3 opción B, modelo 4 Junio Específico 2010

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}(m + 2)x - y - z &= 1\\ -x - y + z &= -1\\ x + my - z &= m\end{aligned}$$

(a) [1'75 puntos] Discútelo según los valores de m.
(b) [1 punto] Resuelve para el caso m = 1.

Solución

$$\begin{aligned}(m + 2)x - y - z &= 1\\ -x - y + z &= -1\\ x + my - z &= m\end{aligned}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} m+2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 & m \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Para que el sistema tenga solución única, por el Teorema de Rouche, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas, por tanto el determinante de A tiene que ser distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} m+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} \underset{F_2+F_3}{=} \begin{vmatrix} m+2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{Adjuntos}\\ \text{tercera}\\ \text{fila}}}{=} -(m-1)(m+2-1) = -(m-1)(m+1).$$

Si $|A| = 0$, tenemos $-(m-1)(m+1) = 0$, de donde m = 1 y m = -1.

Por tanto **para m ≠ 1 y m ≠ - 1 el sistema es compatible y determinado, y tiene solución única.**

Si m = 1

Tenemos $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Vemos que rango(A) = 1, pues las tres filas son iguales.

En A como $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tener la fila 2ª y 3ª proporcionales tenemos rango(A^*)=2.

Como rango(A) = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, por el Teorema de Rouche el **sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**.

Si m = - 1

Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y A^* = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{F_2+F_1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{\substack{\text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila}}} = (-2)(-2) = 4 \neq 0$, rango($A^*$) = 3.

Como rango(A) = 2 $\neq$ rango(A^*) = 3, por el Teorema de Rouche **el sistema es incompatible y no tiene solución**.

(b)

Si m = 1 hemos visto que rango(A) = rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, y el sistema era compatible e indeterminado y tenía infinitas soluciones. Para resolverlo tomamos dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

Tomamos las dos primeras ecuaciones (con las que hemos calculado el menor distinto de cero).

$3x - y - z = 1$

$-x - y + z = -1$. Si z = t con t nº real, tenemos

$3x - y = 1 + t$

$-x - y = -1 - t$. Si a la 1ª ecuación le restamos la 2ª ecuación, resulta

$4x = 2 + 2t$, de donde $x = 1/2 + (1/2)t$ con t nº real

$-x - y = -1 - t$.

Luego $y = -x + 1 + t = -1/2 - (1/2)t + 1 + t = 1/2 + (1/2)t$ con t nº real

La solución del sistema en este caso **es (x,y,z) = (1/2+(1/2)t, 1/2+(1/2)t, t)** con t nº real.

Ejercicio 4 opción B, modelo 4 Junio Específico 2010

Sean los puntos A(1,1,1), B(-1,2,0), C(2,1,2) y D(t, -2, 2)

(a) [1'25 puntos] Determina el valor de t para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

(b) [1'25 punto] Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por A y B que contenga al punto C.

Solución

(a)

Para ver que los cuatro puntos están en el mismo plano lo podemos hacer de dos formas. Una de ellas es ver que el rango de los vectores **AB, AC, AD** es 2, y la otra es formar un plano con los puntos A, B y C, y obligar al punto D a pertenecer a dicho plano.

AB = (-2,1,-1), **AC** = (1,0,1), **AD** = (t-1,-3,1),

Para ver que el rango de los vectores **AB, AC, AD** es 2, una forma es que el determinante de dichos vectores sea cero, es decir det(**AB, AC, AD**) = 0.

det(**AB, AC, AD**) = $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ t-1 & -3 & 1 \end{vmatrix}_{\substack{\text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila}}} = -(1)(-2)+0-(1)(7-t) = -5 + t = 0$, de donde t = 5 y el punto D es D(5, -2, 2)

De la otra forma determinamos el plano formado por los puntos A(1,1,1), B(-1,2,0), C(2,1,2). Tomo como punto el A(1,1,1) y como vectores independientes **AB** = (-2,1,-1) y **AC** = (1,0,1). X(x,y,z) es un punto genérico del plano.

Plano π ≡ det(**AX, AB, AC**) = $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{fila}}{\overset{\text{Adjuntos primera}}{=}}$ = (x-1)(1) – (y-1)(-1) + (z-1)(-1) =

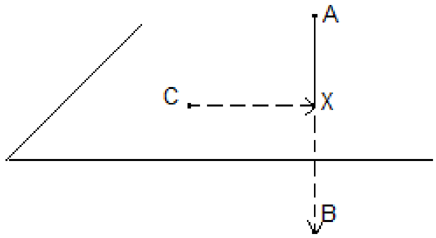
= x + y – z - 1 = 0

Obligamos al punto D(t, -2, 2) a pertenecer a dicho plano.

(t)+(-2)-(2)-1 = 0, de donde t = 5. Como vemos sale lo mismo y el punto D es D(5,-2,2)

(b)

Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por A y B que contenga al punto C.



Sabemos que un plano está determina por un punto y dos vectores independientes o bien por un punto (el C(2,1,2)) y un vector normal (el **n** = **AB** = (-2,1,-1)).

La ecuación del plano pedido es **CX.AB** = 0 con X(x,y,z) un punto genérico del plano, es decir el producto escalar de dos vectores perpendiculares vale cero.

El plano pedido es π' ≡ **CX.AB** = 0 = (x-2,y-1,z-2)**.**(-2,1,-1) = -2x + y – z + 5 = 0