Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 2 Junio 2010

Sea f la función definida como $f(x) = (ax^2 + b) / (a – x)$ para $x \neq a$.
(a) [1'5 puntos] Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (2,3) y tenga una asíntota oblicua con pendiente - 4.
(b) [1 punto] Para el caso de a = 2, b = 3, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1

Solución

Sea f la función definida como $f(x) = (ax^2 + b) / (a – x)$ para $x \neq a$.
(a)
Como f pasa por el punto (2,3) tenemos que f(2) = 3.
Como f tiene una asíntota oblicua (y = mx + n) con pendiente – 4, me están diciendo que m = -4, pero también sabemos que $m = \lim_{x\to\infty} [(f(x)) /(x)]$.
De $-4 = \lim_{x\to\infty} [(f(x)) /(x)]$ tenemos $– 4 = \lim_{x\to\infty} [(ax^2 + b) / (ax – x^2)] = -a$, luego **a = 4**.
De f(2) = 3 tenemos $3 = (4.2^2 + b)/(4-2) = (16 + b)/2$, de donde **b = -10**.
(b)
Si a = 2 y b = 3, tenemos $f(x) = (2x^2 + 3) / (2 – x)$ para $x \neq 2$.
La recta tangente en x = 1 es y – f(1) = f '(1)(x – 1)
$f(x) = (2x^2 + 3) / (2 – x)$, luego f(1) = 5/1 = 5
$f'(x) = [(4x).(2 – x) - (2x^2 + 3)(-1)] / (2 – x)^2$, luego $f'(1) = (4+5)/(1)^2 = 9$, por tanto la recta tangente pedida es y – 5 = 9(x – 1).

Ejercicio 2 opción A, modelo 2 Junio 2010

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx$
Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{(x)} = t$.

Solución

Calculamos primero la integral indefinida
$I = \int \operatorname{sen}(\sqrt{(x)})dx = \{$ cambio $\sqrt{(x)} = t$; $x = t^2$ y $dx = 2tdt \} = \int \operatorname{sen}(t).2tdt = 2. \int t.\operatorname{sen}(t)dt = 2.I_1$, donde I_1 es una integral por partes ($\int u.dv = u.v - \int v.du$)
$I_1 = \int t.\operatorname{sen}(t)dt = \{ u = t$ y $dv = \operatorname{sen}(t)dt$, de donde $du = dt$ y $v = \int \operatorname{sen}(t)dt = -\cos(t) \} =$
$= -t.\cos(t) - \int -\cos(t)dt = -t.\cos(t) + \operatorname{sen}(t)$
Luego $I = 2. I_1 = 2.[-t.\cos(t) + \operatorname{sen}(t)] + K = \{$ quito cambio $\sqrt{(x)} = t \} =$
$= 2.[-(\sqrt{(x)}).\cos(\sqrt{(x)}) + \operatorname{sen}(\sqrt{(x)})] + K$
Calculamos ya la integral original

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx = 2.\left[-(\sqrt{x}).\cos(\sqrt{x}) + \operatorname{sen}(\sqrt{x})\right]_0^{\pi^2} =$$

$= 2.[(-\sqrt{\pi^2}.\cos(\sqrt{(\pi^2)}) + \operatorname{sen}(\sqrt{(\pi^2)})) - (-(\sqrt{(0)}).\cos(\sqrt{(0)}) + \operatorname{sen}(\sqrt{(0)}))] =$
$= 2.[((-\pi)(-1) + 0) – (0+0)] = 2\pi$

Ejercicio 3 opción A, modelo 2 Junio 2010

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(a) [0'5 puntos] Indica los valores de m para los que A es invertible.
(b) [2 puntos] Resuelve la ecuación $XA – B^t = C$ para m = 0. (B^t es la matriz traspuesta de B)

Solución

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a)
A es invertible si y solamente si $\det(A) = |A| \neq 0$.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix} \underset{\text{fila}}{\overset{\text{Adjuntos Primera}}{=}} 1(-m^2 - 3) - 0 + (-1)(-4m) = -m^2 + 4m - 3.$$

Si $|A| = 0$, $-m^2 + 4m - 3 = 0$. Resolviendo esta ecuación nos sale $m = 1$ y $m = 3$.

Para **$m \neq 1$** y **$m \neq 3$**, A es invertible y existe A^{-1}.

(b)

Resuelve la ecuación $XA - B^t = C$ para $m = 0$.

$XA = B^t + C$. Como existe A^{-1} multiplicamos ambos miembros por la derecha por A^{-1}.

$XAA^{-1} = (B^t + C)A^{-1}$, operando nos queda $\mathbf{X = (B^t + C)A^{-1}}$.

Calculamos A^{-1}, con $m = 0$

$A^{-1} = (1/|A|).\text{Adj}(A^T)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{fila}}{\overset{\text{Adjuntos segunda}}{=}} (-3)(1) = -3.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \ \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^{-1} = (1/|A|).\text{Adj}(A^T) = \left(\frac{-1}{3}\right).\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Calculamos } (B^t + C) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$X = (B^t + C)A^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\left(\frac{-1}{3}\right).\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 12 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 opción A, modelo 2 Junio 2010

Considera las rectas “r” y “s” de ecuaciones

$$x - 1 = y = 1 - z \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = \ \ 1 \end{cases}$$

(a) [0'75 puntos] Determina su punto de corte.

(b) [1 punto] Halla el ángulo que forma “r” y “s”.

(c) [0’75 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a “r” y “s”.

Solución

(a)

Ponemos las rectas en paramétricas (cada una con un parámetro distinto) y de cada una tomamos un punto y un vector

De la recta “r”, que en continua es “ $(x - 1)/1 = y/1 = (z - 1)/(-1)$, tomamos el punto A(1,0,1) y el vector director **u** = (1,1,-1). Su ecuación paramétrica es $\begin{cases} x = 1 + a \\ y = 0 + a \\ z = 1 - a \end{cases}$ con “a” número real.

De la recta “s” $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = \ \ 1 \end{cases}$, tomando y = b (nº real) tenemos $\begin{cases} x = -1 + 2b \\ y = 0 + b \\ z = 1 - b \end{cases}$. Un punto será B(-1,0,1) y un vector director **v** = (2,1,-1).

Me han dicho que se cortan, no obstante vamos a comprobar que es cierto viendo que det(**AB**,**u**,**v**) = 0

AB = (-2,0,0)

$$\det(\mathbf{AB},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$, por tener la columna 2ª y 3ª proporcionales.

Para obtener el punto de corte igualamos ambas rectas en paramétricas, y resolvemos el sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas. (x = x, y = y, z = z)

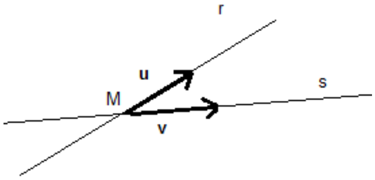
1 + a = -1 + 2b
a = b
1 – a = 1 - b

Utilizamos la 1ª y la 2ª

1 + a = -1 + 2a, de donde **a = 2 = b**, que evidentemente verifica la 3ª ecuación.

El punto de corte de las rectas es M(1+2,2,1-2) = M(3,2,-1)

(b)



Sabemos que el ángulo que forman dos rectas es el menor de los ángulos que forman sus vectores de dirección, por lo cual tomamos valor absoluto en el coseno.

cos(r,s) = |cos(**u**,**v**)| = |**u.v**| / (||**u**||.||**v**||) = 4/(√(3).√(6)) = 4/√(18). Luego el ángulo que forman las rectas es (r,s) =) arcos[4/√(18)] ≈ 19'4712º.

u = (1,1,-1), **v** = (2,1,-1), de donde

u.v = 2+1+1 = 4; ||**u**|| = $\sqrt{(1^2+1^2+1^2)} = \sqrt{(3)}$, ||**v**|| = $\sqrt{(2^2+1^2+1^2)} = \sqrt{(6)}$

(c)

Para determinar un plano π necesitamos un punto y dos vectores independiente o bien un punto y un vector normal. En nuestro caso tomamos el punto de corte M((3,2,-1) y los vectores de dirección de cada recta **u** = (1,1,-1) y **v** = (2,1,-1).

La ecuación del plano en paramétricas es

x = 3 + λ + 2μ
y = 2 + λ + μ
z = -1 - λ – μ, con λ y μ número reales.

La ecuación general del plano π sería

$$\pi = \det(\mathbf{MX},\mathbf{u},\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}_{\substack{\text{Adjuntos}\\ \text{primera}\\ \text{fila}}} = (x-3)(0) – (y-2)(1) + (z+1)(-1) =$$

= - y – z +1 = 0

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 2 Junio 2010

[2'5 puntos] Calcula $\lim_{x\to 0} [(e^x – e^{\text{sen } x}) /(x^2)]$

Solución

La Regla de L'Hopital (L'H), que dice si $\lim_{x\to a}$ [(f(x)/g(x)] = 0/0, y existe $\lim_{x\to a}$ [(f'(x)/g'(x)] entonces se verifica que $\lim_{x\to a}$ [(f(x)/g(x] = $\lim_{x\to a}$ [(f '(x)/g '(x)].

$\lim_{x\to 0} [e^x – e^{\text{sen } x}) /(x^2)] = [(e^0 – e^0)/0] = 0/0$, L'H

$\lim_{x\to 0} [(e^x – \cos(x).e^{\text{sen } x}) /(2x)] = [(e^0 – 1. e^0)/0] = 0/0$, L'H

$\lim_{x\to 0} [(e^x – (-\text{sen}(x).e^{\text{sen } x} + \cos^2(x). e^{\text{sen } x})) /(2)] = [(e^0 – (0.e^0 - 1. e^0)/2] = 0/2 = 0$

Ejercicio 2 opción B, modelo 2 Junio 2010

Considera la función f dada por f(x) = 5 – x y la función g definida como g(x) = 4/x para x ≠ 0.

(a) [1 punto] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g indicando sus puntos de corte.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

Solución

f(x) = 5 – x y g(x) = 4/x

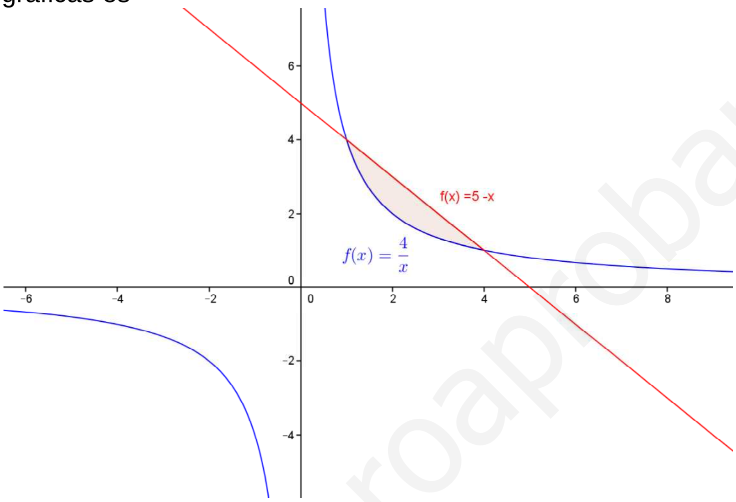
(a)

$f(x) = 5 – x$, es una recta y con dos valores de "x" es suficiente para dibujarla.

$g(x) = 4/x$, es una hipérbola de I y III cuadrante. Le doy dos valores a "x" a la derecha del 0 y dos a la izquierda del 0. Tenemos en cuenta que x = 0 es una asíntota vertical y la recta y = 0 es una asíntota horizontal.

x	f(x) = 5 – x	x	g(x) = 4/x
5	f(5) = 0	1	g(1) = 4
0	f(0) = 5	2	g(2) = 2
		-1	g(-1) = -4
		-2	g(-2) = -2

Para ver los puntos de corte igualamos f(x) = g(x), es decir 5 – x = 4/x, de donde $5x-x^2=4$, es decir $x^2 – 5x + 4 = 0$. Resolviendo l ecuación obtenemos x = 1 y x = 4. Un esbozo de la gráficas es



(b)

El área del recinto limitado por las curvas f(x) y g(x) es

Área = $\int_1^4 [f(x) – g(x)]dx = \int_1^4 [5 – x – 4/x]dx = [5x – x^2/2 – 4Ln|x|]_1^4| =$

$= (20 – 8 – 4Ln|4|) – (5 – 1/2 – 4Ln|1|) = (12 – 4Ln(4)) – (9/2 – 0) = 15/2 – 4Ln(4)\ u^2$

Ejercicio 3 opción B, modelo 2 Junio 2010

Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\lambda x + y + z = \lambda + 2$$
$$2x - \lambda y + z = 2$$
$$x - y + \lambda z = \lambda$$

(a) [1'75 puntos] Discútelo según los valores de λ. ¿Tiene siempre solución?

(b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para λ = -1.

Solución

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda+2 \\ 2 & -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$.

Si det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$|A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda)(-\lambda^2+1) - (1)(2\lambda-1) + (1)(-2+\lambda) = -\lambda^3 - 1$. (Lo he desarrollado por los adjuntos de la 1ª fila)

Resolvemos $|A| = 0$, es decir $-\lambda^3 - 1 = 0$, de donde $\lambda^3 = -1$ y por tanto $\lambda = -1$

Si $\boldsymbol{\lambda \neq -1}$, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual rango(A) = rango(A^*) = 3, y por el teorema de *Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si $\boldsymbol{\lambda = -1}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En A^* como la 1ª y 3ª filas son proporcionales tenemos rango(A^*) = 2

Como rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

Por tanto el sistema siempre tiene solución

(b)

Nos piden resolverlo si $\boldsymbol{\lambda = -1}$.

Hemos visto que c*omo rango(A)= 2 = rango(A^*), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.*

Como rango(A)= rango(A^*) = 2 < nº de incógnitas, tenemos sólo dos ecuaciones (las dos primeras, con las que hemos calculado el rango de A) y dos incógnitas principales..

$-x + y + z = 1$

$2x + y + z = 2$. Tomamos $z = \lambda$ nº real.

A la 2ª ecuación le resto la 1ª tenemos $3x = 1$. De donde $x = 1/3$.

Sustituyendo en $-x + y + z = 1$, nos resulta $-1/3 + y + \lambda = 1$, de donde $y = 4/3 - \lambda$.

La solución del sistema es $(x, y, z)= (1/3, 4/3 - \lambda, \lambda)$ con λ nº real.

Ejercicio 4 opción B, modelo 2 Junio 2010

Los puntos P(2,0,0) y Q(-1,12,4) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta "r" de ecuación $\begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$.

(a) [1'5 puntos] Calcula las coordenadas del punto S sabiendo que "r" es perpendicular a la recta que pasa por P y S.

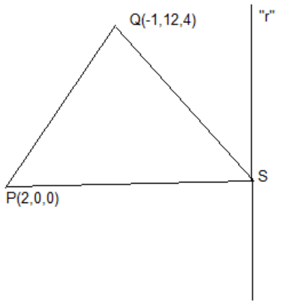
(b) [1 punto] Comprueba si el triángulo es rectángulo.

Solución

P(2,0,0) y Q(-1,12,4) vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta "r" de ecuación $\begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$.

(a)

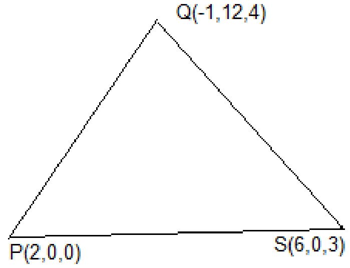
Calcula S sabiendo que "r" es perpendicular a la recta que pasa por P y S.



Ponemos la recta "r" en vectorial tomando $x = 3\lambda$ (así la ecuación es divisible por 3), con λ nº real.

De $4(3\lambda) + 3z = 33$, tenemos $z = 11 - 4\lambda$

La ecuación vectorial es (x,y,z) = (3λ,0,11-4λ) con λ nº real.
Un vector director de la recta es **u** = (3,0,-4)
S es un punto genérico de “r”, es decir S(x,y,z) = S(3λ,0,11-4λ) con λ nº real.
Como la recta que pasa por los puntos P y S es perpendicular a la recta “r”, el vector director de “r” que es **u** tiene que ser perpendicular al vector **PS**, es decir su producto escalar tiene que ser cero.
PS = (3λ-2,0-0,11-4λ-0) = (3λ-2,0,11-4λ)
PS.u = 0 = 9λ – 6 + 0 – 44 + 16λ = 25λ – 50 = 0, de donde λ = 2 y el punto pedido es S(6,0,11-8) = S(6,0,3).
(b)
Para ver si el triángulo es rectángulo podemos ver si el lado mayor al cuadrado es la suma de los cuadrados de los otros dos lados (Teorema de Pitágoras), o bien si el producto escalar de los vectores que determinan los lados es cero.



PQ = (-3,12,4), de donde || **PQ**|| = $\sqrt{(3^2+12^2+4^2)} = \sqrt{(169)} = 13$
PS = (4,0,3), de donde || **PS**|| = $\sqrt{(4^2+0^2+3^2)} = \sqrt{(25)} = 5$
QS = (7,-12,-1), de donde || **QS**|| = $\sqrt{(7^2+12^2+1^2)} = \sqrt{(194)}$
Como $[\sqrt{(194)}]^2 = [\sqrt{(169)}]^2 + [\sqrt{(25)}]^2$, **el triángulo es rectángulo en P**.
También podríamos ver que el producto escalar de **PQ** y **PS** es cero.