

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 3 del 2011

[2'5 puntos] Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determina a , b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,0)$, y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y = -3x + 3$.

Solución

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Función polinómica, por tanto continua y derivable en todo \mathbb{R} .

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$,

$f''(x) = 6ax + 2b$,

Si tiene un punto de inflexión en $(1,0)$, sabemos que $f(1) = 0$ (por punto) y $f''(1) = 0$, por ser punto de inflexión.

Como la recta tangente en $x = 1$ es $y = -3x + 3$, sabemos que su pendiente es $f'(1) = -3 = y'$ (de la recta).

De $f''(1) = 0$, tenemos $0 = 6a + 2b$, luego **$b = -3a$** .

De $f'(1) = -3$, tenemos $-3 = 3a + 2b + c = 3a - 6a + c = -3a + c$, luego **$c = 3a - 3$** .

De $f(1) = 0$, tenemos $0 = a + b + c = a - 3a + 3a - 3 = a - 3$, luego **$a = 3$, $b = -9$ y $c = 6$** .

Ejercicio 2 opción A, modelo 3 del 2011

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x) = 4 - 3|x|$ y $g(x) = x^2$.

(a) [1 punto] Esboza las gráficas de f y g . Determina sus puntos de corte.

(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución

(a)

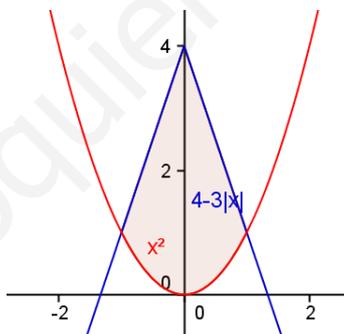
Esboza las gráficas de f y g . Determina sus puntos de corte

Sabemos que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Por tanto $f(x) = 4 - 3|x| = \begin{cases} 4 + 3x & \text{si } x < 0 \\ 4 - 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Su gráfica está formada por dos rectas (con dos valores es suficiente para dibujarlas) y coinciden en $x = 0$, puesto que la función f es continua por suma y compuesta de continuas.

La gráfica de x^2 es el de una parábola con las ramas hacia arriba (\cup) y vértice en $(0,0)$.

Un esbozo de sus gráficas es



Vamos a calcular sus **puntos de corte**, para ello observamos que son simétricas respecto al eje OY, luego sólo calculamos el corte para $x > 0$, y cambiando el signo tenemos el punto para $x < 0$.

Para $x > 0$, tenemos $x^2 = 4 - 3x$, es decir $x^2 + 3x - 4 = 0$. $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$, de donde $x = 1$ y $x = -4$. Como

sólo nos interés la solución positiva tenemos **$x = 1$** , y por simetría la otra es **$x = -1$** .

(b)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Por simetría (la calculamos para $x > 0$) el área pedida es

Área = $2 \cdot \int_0^1 (4 - 3x - x^2) dx = 2 \cdot [4x - 3x^2/2 - x^3/3]_0^1 = 2 \cdot (4 - 3/2 - 1/3) = 2 \cdot (13/6) = 13/3$ u.a. $\cong 4'33$ u.a.

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 del 2011

Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) [1 punto] Halla las matrices $(A + B)(A - B)$ y $A^2 - B^2$.

(b) [1'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $XA - XB - (A + B)^t = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^t$ la matriz traspuesta de $A + B$.

Solución

(a) Halla las matrices $(A + B)(A - B)$ y $A^2 - B^2$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Recordamos que el producto de matrices no es conmutativo, por lo tanto $(A+B)(A-B)$ no coincide con $A^2 - B^2$, por lo tanto para calcular $A^2 - B^2$, tenemos que calcular A, B y sus cuadrados y después restar.

$$(A+B)+(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 2A, \text{ de donde } A = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)-(A-B) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2B, \text{ de donde } B = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot B = B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(b)

Resuelve la ecuación matricial $XA - XB - (A + B)^t = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^t$ la matriz traspuesta de A + B.

De $XA - XB - (A + B)^t = 2I$, tenemos $X(A - B) = (A + B)^t + 2I$, es decir $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por

tanto $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Como el determinante de $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0$, la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, y podemos

multiplicar por la derecha la expresión $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ por la inversa $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$, quedándonos

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot (1/8) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1/8) \cdot \begin{pmatrix} 15 & -18 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa es $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = (1/8) \cdot \text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = (1/8) \cdot \text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (1/8) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 del 2011

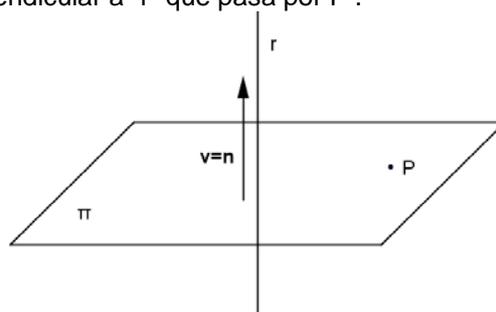
Sea el punto $P(2,3,-1)$ y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a "r" que pasa por P .

(b) [1'5 puntos] Calcula la distancia del punto P a la recta "r" y determina el punto simétrico de P respecto de r.

Solución

(a) Halla la ecuación del plano perpendicular a "r" que pasa por P .



El plano π tiene como vector normal \mathbf{n} uno director de la recta \mathbf{v} , luego $\mathbf{n} = (0, -2, 1)$. Como el plano pasa por

el punto $P(2,3,-1)$, el plano π tiene de ecuación $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0$, siendo " \cdot " es producto escalar.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0 = (0,-2,1) \cdot (x-2,y-3,z+1) = -2y+6+z+1 = -2y+z+7 = 0 \equiv \pi$$

(b)

Calcula la distancia del punto P a la recta "r" y determina el punto simétrico de P respecto de r.

Para calcular la distancia del punto P a la recta "r", determinamos la intersección Q de "r" con " π ".

(sustituimos r en π , determinamos λ , y obtenemos Q).

$$d(P, \pi) \quad d(PQ) = \|\mathbf{PQ}\|, \text{ donde } \|\cdot\| \text{ es el módulo del vector.}$$

El simétrico de P respecto de r, es el simétrico de P respecto de Q, por la construcción que hemos realizado.

$$-2(-2\lambda)+(\lambda)+7 = 0 = 5\lambda + 7, \text{ de donde } \lambda = -7/5, \text{ y } Q(1,-2(-7/5),-7/5) = Q(1,14/5,-7/5).$$

$$d(P, \pi) \quad d(PQ) = \|\mathbf{PQ}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (14/5-3)^2 + (-7/5+1)^2} = \sqrt{6/5} \text{ u.l.}$$

$$\mathbf{PQ} = (1-2, 14/5-3, -7/5+1) = (-1, -1/5, -2/5)$$

Q es el punto medio del segmento PP' , siendo P' el simétrico buscado.

$$(1, 14/5, -7/5) = ((x+2)/2, (y+3)/2, (z-1)/2)$$

$$\text{De } 1 = (x+2)/2, \text{ tenemos } x = 0$$

$$\text{De } 14/5 = (y+3)/2, \text{ tenemos } y = 28/5 - 3 = 13/5$$

$$\text{De } -7/5 = (z-1)/2, \text{ tenemos } z = -14/5 + 1 = -9/5$$

El simétrico buscado es $P'(0, 13/5, -9/5)$.

Opción B

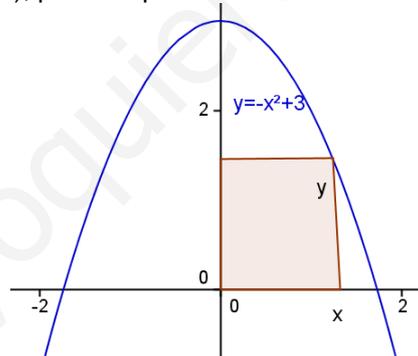
Ejercicio 1 opción B, modelo 3 del 2011

[2'5 puntos] En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

Solución

Es un problema de optimización.

Un pequeño esbozo de la gráfica nos ayudará. $Y = -x^2 + 3$ es una parábola exactamente igual que " $-x^2$ " (ramas hacia abajo \cap , vértice en $(0,0)$, pero desplazada 3 unidades hacia arriba en ordenadas OY.



Función a optimizar Área = $x \cdot y$

Relación entre las variables $y = -x^2 + 3$.

Función a optimizar $A(x) = x \cdot (-x^2 + 3) = -x^3 + 3x$.

Recordamos que si $A'(a) = 0$ y $A''(a) < 0$, en $x = a$ hay un máximo relativo.

$$A(x) = -x^3 + 3x.$$

$A'(x) = -3x^2 + 3$. De $A'(x) = 0$, tenemos $-3x^2 + 3 = 0$, de donde $x^2 = 1$ y sus soluciones son $x = \pm 1$. Como estamos en la parte positiva la única solución válida es $x = 1$, que será el posible máximo.

$$A'(x) = -3x^2 + 3$$

$$A''(x) = -6x.$$

Como $A''(1) = -6 < 0$, $x = 1$ es un máximo.

Las **dimensiones del rectángulo** pedido son $x = 1$ e $y = -(1)^2 + 3 = 2$

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 del 2011

Calcula: $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) dx$

Solución

Calculamos primero la integral indefinida, $\int x \cdot \cos(x) \cdot dx$, que es una integral por partes ($\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$)

Tomamos $u = x$ de donde $du = dx$, y $dv = \cos(x).dx$ de donde $v = \int \cos(x).dx = \sin(x)$, luego nos resulta

$$\int x.\cos(x).dx = x.\sin(x) - \int \sin(x).dx = x.\sin(x) + \cos(x).$$

La integral definida pedida es

$$\int_0^{\pi/2} x.\cos(x).dx = [x.\sin(x) + \cos(x)]_0^{\pi/2} = (\pi/2).\sin(\pi/2) + \cos(\pi/2) - (0.\sin(0) + \cos(0)) = \pi/2 - 1.$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 del 2011

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz $A - 2I$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

(b) [1'5 puntos] Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX = 2X + I$.

Solución

(a)

Determina los valores de λ para los que la matriz $A - 2I_3$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

La matriz $A - 2I_3$ tiene inversa si su determinante ($|A - 2I_3|$) es distinto de cero.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante desarrollando por el adjunto de la segunda columna.

$$|A - 2I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2).$$

$|A - 2I_3| \neq 0$ si $(\lambda - 2)(1 - \lambda^2) \neq 0$, es decir $(\lambda - 2) \neq 0$ y también $(1 - \lambda^2) \neq 0$, es decir $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \pm 1$.

La matriz $A - 2I_3$ tiene inversa si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \pm 1$

(b)

Para $\lambda = -2$, resuelve la ecuación matricial $AX = 2X + I$.

De $AX = 2X + I$, tenemos $AX - 2X = I$, es decir $(A - 2I_3).X = I$.

Como para $\lambda = -2$, la matriz $(A - 2I_3)$ tiene inversa, podemos multiplicar por la izquierda por la inversa, y obtenemos:

$$(A - 2I_3)^{-1} \cdot (A - 2I_3).X = (A - 2I_3)^{-1} \cdot I, \text{ de donde } X = (A - 2I_3)^{-1} \cdot I = (A - 2I_3)^{-1}.$$

Calculamos ya $(A - 2I_3)^{-1} = (1 / |A - 2I_3|) \cdot \text{Adj}(A - 2I_3)^t$.

Como $|A - 2I_3| = (\lambda - 2)(1 - \lambda^2)$, para $\lambda = -2$, tenemos $|A - 2I_3| = (-2 - 2)(1 - (-2)^2) = 12$.

$$\text{Como } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ para } \lambda = -2, \text{ tenemos } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A - 2I_3)^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}; \text{ Adj}(A - 2I_3)^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}; (A - 2I_3)^{-1} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \text{ luego la matriz}$$

$$\text{pedida es } X = (A - 2I_3)^{-1} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 del 2011

[2'5 puntos] Considera los planos π_1 y π_2 dados respectivamente por las ecuaciones

$$(x,y,z) = (-2,0,7) + \lambda(1,-2,0) + \mu(0,1,-1) \quad \text{y} \quad 2x + y - z + 5 = 0$$

Determina los puntos de la recta "r" definida por $x = y + 1 = (z - 1)/(-3)$ que equidistan de π_1 y π_2 .

Solución

Ponemos el plano π_1 en su forma general $\det(\mathbf{x}-\mathbf{a},\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$, donde $\mathbf{a} = (-2,0,7)$, $\mathbf{u} = (1,-2,0)$ y $\mathbf{v} = (0,1,-1)$.

$$\pi_1 \equiv \det(\mathbf{x}-\mathbf{a},\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x+2 & y & z-7 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} = (x+2)(2) - y(-1) + (z-7)(1) = 2x + y + z - 3 = 0. \\ \text{fila} \end{array}$$

Sabemos que la distancia de un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ a un plano $\pi \equiv ax+by+cz+d = 0$ es

$$d(P, \pi) = \frac{|a(p_1)+b(p_2)+c(p_3)+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \text{ donde } | \cdot | \text{ es el valor absoluto.}$$

Ponemos la recta "r" en forma vectorial, para lo cual necesitamos un punto suyo, el B y un vector director, el **w**.

Como "r" $\equiv x = y + 1 = (z - 1)/(-3)$, un punto de la recta es el B(0,-1,1) y un vector director es **w** = (1,1-3).

La recta en forma vectorial es "r" $\equiv (x, y, z) = (0+\delta, -1+\delta, 1-3\delta)$, con δ un número real cualquiera.

Un punto genérico de la recta "r" es $X = (\delta, -1+\delta, 1-3\delta)$.

Como me piden los puntos de "r" que equidistan de π_1 y π_2 , tengo que resolver la ecuación:

$$d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2), \text{ con } X \text{ punto genérico de "r".}$$

Recuerdo que $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 3 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x + y - z + 5 = 0$ y $X = (\delta, -1+\delta, 1-3\delta)$.

$$d(X, \pi_1) = \frac{|2(\delta) + (-1+\delta) + (1-3\delta) - 3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$d(X, \pi_2) = \frac{|2(\delta) + (-1+\delta) - (1-3\delta) + 5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|6(\delta) + 3|}{\sqrt{6}}$$

Igualando tenemos $\frac{|6(\delta) + 3|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$, es decir $|6\delta + 3| = 3$, de donde salen dos ecuaciones:

$+(6\delta + 3) = 3$, de donde $\delta = 0$, y **uno de los puntos es** $X_1(0, -1+(0), 1-3(0)) = X_1(0, -1, 1)$.

$-(6\delta + 3) = 3$, de donde $\delta = -1$, y **otro de los puntos es** $X_2(-1, -1+(-1), 1-3(-1)) = X_2(-1, -2, 4)$.