

**UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CURSO 2011-2012.
MATEMÁTICAS II**

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Septiembre 2011

Sea la función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \begin{cases} x+k & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

(a) [1'25 puntos] Calcula el valor de k .

(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=1$.

Solución

(a)

Calcula el valor de k .

Como la función es continua en \mathbb{R} (nos lo dice el problema), es continua en $x = 0$.

Si $f(x)$ es continua en $x = 0$, tenemos $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$f(0) = (0 + k) = k; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + k) = (0 + k) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0}, \text{ aplicamos la Regla de L'Hôpital} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cdot e^{x^2}}{2x} = \{\text{simplificando}\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2}}{1} = e^0 = 1.$$

Igualando las tres expresiones tenemos $k = 1$.

(b)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=1$.

$$\text{Nuestra función es } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como nos piden la recta tangente en $x = 1$, la rama es $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$.

La recta tangente es “ $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ ”

$$f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}, \quad f(1) = e^1 - 1$$

$$f'(x) = \frac{(2x \cdot e^{x^2}) \cdot x^2 - (e^{x^2}-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}, \quad f'(1) = 2 \cdot e^1 \cdot 1 - (e^1 - 1) \cdot 2 = 2e - 2e + 2 = 2.$$

La recta tangente pedida es $y - (e^1 - 1) = 2(x - 1)$

Ejercicio 2 opción A, modelo Septiembre 2012

$$\text{Sea } I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx.$$

(a) [1'75 puntos] Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$

(b) [0'75 puntos] Calcula el valor de I .

Solución

(a)

Expresa la integral I aplicando el cambio de variable $t = \sqrt{1-x}$

Calculamos 1º la integral indefinida

$$I_1 = \int \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx$$

Cambio $t = \sqrt{1-x} \rightarrow t^2 = 1-x \rightarrow x = 1-t^2 \rightarrow dx = -2tdt$. Sustituyendo, tenemos

$$I_1 = \int \frac{1-t^2}{1+t} \cdot (-2t) dt = \{\text{diferencia de cuadrados}\} = \int \frac{(1-t)(1+t)}{1+t} \cdot (-2t) dt = \{\text{simplificando}\} = -2 \cdot \int (t - t^2) dt =$$

$$= -2\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) = -t^2 + (2/3)t^3 = \{\text{quito cambio}\} = -(\sqrt{1-x})^2 + (2/3)(\sqrt{1-x})^3 = -(1-x) + (2/3)(\sqrt{1-x})^3$$

(b)

Calcula el valor de I .

$$I = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} dx = [- (1-x) + (2/3)(\sqrt{1-x})^3]_0^1 = -(1-1) + (2/3)(\sqrt{1-1})^3 - (-(1-0) + (2/3)(\sqrt{1-0})^3) = 0 + 1 - 2/3 = 1/3.$$

Ejercicio 3 opción A, modelo Septiembre 2012

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

$$kx + 2y = 2$$

$$2x + ky = k$$

$$x - y = -1$$

(a) [0'5 puntos] Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k .(b) [1 punto] Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.

(b) [1 punto] Halla las soluciones en cada caso

Solución

(a)

Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k .

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ 2 & k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ la matriz de los coeficientes y } A^* = \begin{pmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ la matriz ampliada.}$$

Como observamos $\text{rango}(A) \leq 2$, puesto que sólo tiene dos columnas.Para que el sistema sea compatible $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$, por tanto $\text{rango}(A^*)$ tiene que ser menor que 3, luego $\det(A^*) = |A^*| = 0$.

$$|A^*| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3+C_1 \\ C_3+C_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} k & k+2 & k+2 \\ 2 & k+2 & k+2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ por tener dos columnas iguales; luego } \text{rango}(A) = \text{rango}(A^*),$$

luego el sistema es compatible independientemente del valor de " k ".

(b)

Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.

$$\text{En } A \text{ los menores de orden 2 son } \begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4, \text{ si lo igualamos a 0 las soluciones son } k = 2 \text{ y } k = -2.$$

Si igualamos los otros dos determinantes a 0, la solución es $k = -2$.Si $k \neq 2$ y $k \neq -2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 = n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es determinado.

$$\text{Si } k = 2, A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$, luego $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = n^\circ$ de incógnitas, por tanto el sistema es determinado (recordamos que el determinante de A^* es 0).

$$\text{Si } k = -2, A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2+F_1 \\ F_3+(1/2)F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego $\text{rango}(A) = 1$ (la matriz sólo tiene una fila con elementos distintos de cero).

En A^* como $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1, F_3+(1/2)F_1} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, luego $\text{rango}(A^*) = 1$ (la matriz sólo tiene una fila con

elementos distintos de cero).

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) < n^\circ$ de incógnitas, por tanto el sistema es indeterminado.

(b)

Halla las soluciones en cada caso

Si $k \neq 2$, $k \neq -2$ y $k = 2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 = n^\circ$ de incógnitas, luego el sistema es determinado.

Veamos las soluciones, para lo cual elegimos sólo dos ecuaciones (la 2ª y 3ª).

$$2x + ky = k$$

$$x - y = -1$$

Lo resolvemos por Cramer, $x = \frac{\begin{vmatrix} k & k \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-2-k} = 0$; $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2-k}{-2-k} = 1$. Solución $(x,y) = (0,1)$, y se le

diésemos a k el valor 2 saldría lo mismo.

Si $k = -2$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 1 < n^\circ$ de incógnitas, por tanto el sistema es indeterminado. Sólo necesitamos una ecuación. Tomamos la 3ª

De $x - y = -1$ tenemos $x = -1 + y$. Tomando $y = \lambda \in \mathbb{R}$, $x = -1 + \lambda$. Solución $(x,y) = (-1 + \lambda, \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción A, modelo Septiembre 2012

Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$.

(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

(b) [0'5 puntos] Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

(c) [1 punto] Calcula la distancia del punto D al plano π .

Solución

(a)

Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

Para la ecuación del plano necesitamos un punto, el $A(0,0,1)$, y dos vectores independientes, el $\mathbf{AB} = (1,0,-2)$ y $\mathbf{AC} = (0,1,-3)$

La ecuación general del plano es $\pi \equiv 0 = \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = x(2) - y(-3) + (z-1)(1) =$

$$= 2x + 3y + z - 1 = 0.$$

Su vector normal es $\mathbf{n} = (2,3,1)$.

(b)

Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

Para que los cuatro puntos no sean coplanarios, el punto $D(1,2,0)$ no debe de pertenecer al plano π .

Como $2(1) + 3(2) + (0) - 1 = 0 \rightarrow \mathbf{7} = \mathbf{0}$, lo cual es absurdo, luego D no está en π y **los cuatro puntos no son coplanarios**.

(c)

Calcula la distancia del punto D al plano π .

$$\text{Aplicando la fórmula } d(D, \pi) = \frac{|2(1)+3(2)+(0)-1|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{7}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} \text{ u}^2.$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Septiembre 2012

Sea la función f definida por $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ para $x \neq 1$.

(a) [1'25 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f .

(b) [1'25 puntos] Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Solución

(a)

Estudia las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

La recta $x = a$ es una asíntota vertical (A.V.) de $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = \infty$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{-x}}{1-x} = [e^{-1}/0^+] = +\infty$ ($e^{-1} = 1/e > 0$); la recta $x = 1$ es una A.V. de $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{-x}}{1-x} = [e^{-1}/0^-] = -\infty$$

La recta $y = b$ es una asíntota horizontal (A.H.) de $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(1-x)} = [1/-\infty] = 0$ la recta $y = 0$ es una A.H. de $f(x)$ en $+\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{+x}}{1+x} = \{\infty/\infty; \text{aplicamos L'Hopital}\} = +\infty$, $f(x)$ no tiene A.H. en $-\infty$.

Como tiene A.H., $f(x)$ no tiene asíntota oblicua (A.O.)

Veamos la posición relativa

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x(1-x)} = [1/-\infty] = 0^-$, $f(x)$ está por debajo de la A.H. en $+\infty$ (le damos a x el

valor $+100$)

(b)

Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de $f'(x)$

$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$. Vemos que la función no está definida en $x = 1$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-1)(1-x) - e^{-x}(-1)}{(1-x)^2} = \frac{e^{-x}(-1+x+1)}{(1-x)^2} = \frac{x \cdot e^{-x}}{(1-x)^2}$$

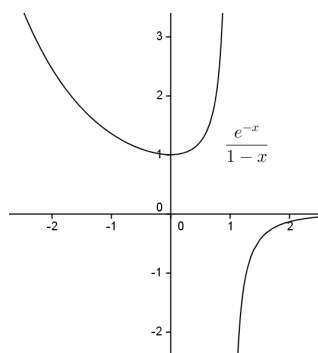
Si $f'(x) = 0$; $x \cdot e^{-x} = 0$, de donde $x = 0$ (e^{-x} es una exponencial y no se anula nunca).

Como $f'(-1) = -1 \cdot e^{1/(-)} < 0$, $f'(x) < 0$ en $x < 0$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$.

Como $f'(2) = 2 \cdot e^{-2/(+)} = (+)/(+) > 0$, $f'(x) > 0$ en $(0, +\infty) - \{1\}$, luego $f(x)$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty) - \{1\}$.

Por definición en $x = 0$ hay un mínimo relativo que vale $f(0) = e^0/1 = 1$.

Aunque no lo piden un esbozo de la gráfica es :



Ejercicio 2 opción B, modelo Septiembre 2012

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=1$.

(b) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $x + 2y = 5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

Solución

(a)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Sabemos que la recta tangente de f en $x = 1$ es " $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$ "

$f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$, luego $f(1) = 8/4 = 2$

$f'(x) = -2x/4 = -x/2$, luego $f'(1) = -1/2$, por **la recta tangente es $y - 2 = (-1/2) \cdot (x - 1)$** . Operando tenemos que la recta tangente es **$y = -x/2 + 5/2$** .

(b)

Esboza el recinto limitado por la gráfica de f , la recta $x + 2y = 5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

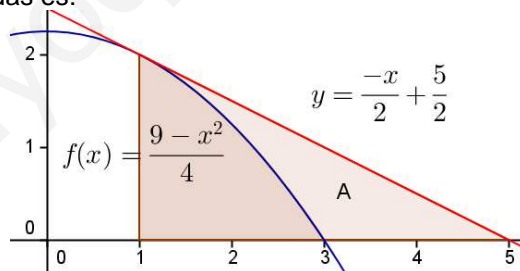
La gráfica de $f(x) = \frac{9 - x^2}{4}$ ($a = -1/4$, $b = 0$, $c = 9/4$), es la de una parábola muy parecida a " $-x^2$ " (ramas hacia abajo y con vértice en $(0, 9/4) = (0, 2'25)$), pero un poco más abierta (al estar multiplicada por $1/4$) y desplazada "4" unidades hacia arriba en el eje OY, es decir el vértice lo tiene en $(0, 4)$.

Vemos que los cortes con el eje OX son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$, porque de $9 - x^2 = 0$ obtenemos $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

La recta $x + 2y = 5$ es $y = -x/2 + 5/2$, como hemos visto en el apartado anterior es la recta tangente en $x=1$.

Con dos puntos es suficiente para dibujarla. Para $x = 1$, $y = 2$; para $y = 0$, $x = 5$. Puntos $(1, 2)$ y $(0, 5)$

Un esbozo de las gráficas pedidas es:



Donde me piden el área A, que vemos es el área del triángulo bajo la recta entre 1 y 5, menos el área bajo la parábola entre 1 y 3.

Área pedida $A = (1/2)(5-1)(2) - \int_1^3 \frac{9-x^2}{4} dx = 4 - [9x/4 - x^3/12]_1^3 = 4 - [(27/4 - 27/12) - (9/4 - 1/12)] = 5/3 \text{ u}^2$.

Ejercicio 3 opción B, modelo Septiembre 2012

Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{aligned} x - y &= \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z &= \lambda \\ -x - y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

(a) [1'25 puntos] Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ .

(b) [1 punto] Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

Solución

(a)

Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ .

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\lambda & \lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & \lambda \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (1)(2\lambda^2 + \lambda) - (-1)(\lambda) + 0 = 2\lambda^2 + 2\lambda \neq 0,$$

Resolviendo la ecuación $2\lambda^2 + 2\lambda = 0 = 2\lambda(\lambda + 1)$, obtenemos $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si $\lambda = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ A y } A^* \text{ tienen el mismo rango porque la última columna de } A^* \text{ es}$$

de ceros.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Si $\lambda = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} F_2 - F_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < n^\circ$ de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

(b)

Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

Para $\lambda = 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) = 2$, por tanto sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 3ª).

$$x - y = 0$$

$-x - y = 0$. $E_2 - E_1 \rightarrow -2x = 0$, de donde $x = 0$ e $y = 0$. Tomamos $\mathbf{z} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}$, con lo cual la solución del sistema es $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{a})$ con $a \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda = -1$, tenemos $\text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(A^*) = 2$, por tanto sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$$x - y = -1$$

$-2y - z = -1$. Tomamos $\mathbf{y} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}$, con lo cual $x = -1 + a$ y $z = 1 - 2a$, y la solución del sistema es $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (-1 + \mathbf{a}, \mathbf{a}, 1 - 2\mathbf{a})$ con $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción B, Septiembre 2012

[2'5 puntos] Halla el punto simétrico de $P(2,1,-5)$ respecto de la recta r definida por

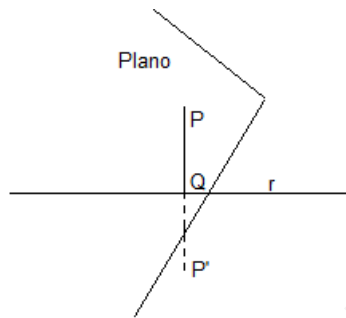
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Solución

Simétrico de $P(2,1,-5)$ respecto de la recta r : $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$.

De la recta tomo un punto, hacemos $x = 0$ y resulta $z = 0$ e $y = -2$, el punto sería $A(0,-2,0)$ y un vector director $\mathbf{u} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \{\text{producto vectorial de los vectores normales de cada plano que forman la recta}\} =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = \vec{i}(1) - \vec{j}(1) + \vec{k}(1) = (1, -1, 1). \text{ La recta en vectorial es } (x, y, z) = (0, -2, 0) + \lambda(1, -1, 1).$$



Trazamos el plano " π " perpendicular a la recta " r " (su vector normal \mathbf{n} puede ser el vector director de la recta, es decir $\mathbf{n} = \mathbf{u} = (1, -1, 1)$ que pase por el punto $P(2,1,-5)$. Calculamos el punto Q intersección de la recta con el plano. El punto Q es el punto medio del segmento PP' donde P' es el simétrico buscado.

Un plano paralelo al pedido es $x - y + z + K = 0$. Como pasa por el punto $P(2,1,-5)$ tenemos $2 - 1 - 5 + K = 0$, de donde $K = 4$ y el plano " π " es $x - y + z + 4 = 0$.

Ponemos la recta " r " en paramétricas para sustituirla en el plano. " r ": $(x, y, z) = (\lambda, -2 - \lambda, \lambda)$.

Sustituimos " r " en " π "

$$(\lambda) - (-2 - \lambda) + (\lambda) + 4 = 0 = 6 + 3\lambda = 0, \text{ de donde } \lambda = -2 \text{ y el punto } Q \text{ es } Q((-2), -2 - (-2), (-2)) = Q(-2, 0, -2)$$

Q es el punto medio del segmento PP' , es decir $(-2, 0, -2) = ((2+x)/2, (1+y)/2, (-5+z)/2)$.

Igualando tenemos

$$-2 = (2+x)/2, \text{ de donde } x = -4 - 2 = -6$$

$$0 = (1+y)/2, \text{ de donde } y = 0 - 1 = -1$$

$$-2 = (-5+z)/2, \text{ de donde } z = -4 + 5 = 1$$

El punto simétrico pedido es $P'(x, y, z) = P'(-6, -1, 1)$