Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 4 Septiembre 2014

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - e^x + ax}{x\cdot \text{sen}(x)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Solución

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - e^x + ax}{x\cdot \text{sen}(x)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x\cdot \text{sen}(x)} = \frac{\cos(0) - e^0 + a(0)}{0\cdot \text{sen}(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞), con lo cual tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - e^x + ax}{x\cdot \text{sen}(x)} = (\text{L'H}) = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}(3x)\cdot 3 - e^x + a}{1\cdot \text{sen}(x) + x\cdot \cos(x)} = \frac{-\text{sen}(0)\cdot 3 - e^0 + a}{1\cdot \text{sen}(0) + 0\cdot \cos(0)} = (-1 + a)/0.$$

Como me dicen que el límite existe y es finito **el numerador ha de ser cero,** para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir -1 + a = 0, de donde **a = 1**.
Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con a = 1, tenemos que **el límite es:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen}(3x)\cdot 3 - e^x + 1}{1\cdot \text{sen}(x) + x\cdot \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(3x)\cdot 9 - e^x}{\cos(x) + 1\cdot \cos(x) + x\cdot(-\text{sen}(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos(3x) - e^x}{2\cos(x) - x\cdot \text{sen}(x)} =$$

$$= \frac{-9\cos(0) - e^0}{2\cos(0) - 0\cdot \text{sen}(0)} = (-9 - 1)/(2) = \mathbf{-10/2 = -5.}$$

Ejercicio 2 opción A, modelo 4 Septiembre 2014

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^1 \dfrac{x^2}{2x^2 - 2x - 4}dx$.

Solución

Calcula $\int_0^1 \dfrac{x^2}{2x^2 - 2x - 4}dx$.

Determinamos primero la integral indefinida I = $\int \dfrac{x^2}{2x^2 - 2x - 4}dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}dx$.

Es una integral racional, y como el grado del numerador y el denominador son iguales, efectuamos la división entera antes.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2 - x - 2 \\ \cline{2-2} -x^2 + x + 2 & 1 \\ \hline x + 2 & \end{array}$$

I = (1/2)· ∫ ((Cx) + R(x)/(d(x))dx = (1/2)·∫(1)dx + $\dfrac{1}{2}\int \dfrac{(x+2)dx}{x^2 - 2x - 2}$ = (1/2)·x + (1/2)·I_1

I_1 ya es racional y descomponemos el denominador en producto de factores:
Resolviendo $x^2 - x - 2 = 0$, obtenemos x = -1 y x = 2.

german.jss@gmail.com

$I_1 = \int \frac{(x+2)dx}{x^2 - 2x - 2} = \int \frac{(x+2)dx}{(x+1)\cdot(x-2)} = \int \frac{Adx}{(x+1)} + \int \frac{Bdx}{(x-2)} = A\cdot\ln|x+1| + B\cdot\ln|x-2|$.

Calculamos A y B

$\frac{(x+2)}{(x+1)\cdot(x-2)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)}$. Igualando numeradores:

x + 2 = A(x – 2) + B(x + 1). (Le damos a “x” el valor de las raíces, -1 y 2)

De x = -1 $\rightarrow$ -1 + 2 = A(-1 - 2) + B(-1 + 1) = -3A, de donde A = -1/3.

De x = 2 $\rightarrow$ 2 + 2 = A(2 - 2) + B(2 + 1) = 3B, de donde B = 4/3.

Por tanto I = (1/2)·x + (1/2)·I_1 = (1/2)·x + (1/2)·((-1/3)·ln|x+1| + (4/3)·ln|x-2|).

Luego $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2 - 2x - 4}dx = [(1/2)\cdot x + (1/2)\cdot((-1/3)\cdot\ln|x+1| + (4/3)\cdot\ln|x-2|)]_0^1 =$

= [(1/2)·1+(1/2)·((-1/3)·ln|1+1| + (4/3)·ln|1-2|)] - [(1/2)·0 + (1/2)·((-1/3)·ln|0+1| + (4/3)·ln|0-2|)] =

= (1/2)+(1/2)·((-1/3)·ln|2| + (4/3)·ln|1|)] - [0 + (1/2)·((-1/3)·ln|1| + (4/3)·ln|2|)] =

= (1/2)+(1/2)·((-1/3)·ln(2) - (1/2)·((4/3)·ln(2)) = (1/2) - (1/6)·ln(2) - (2/3)·ln(2)) =

= (1/2) - (5/6)·ln(2) ≅ -0’0776723

Ejercicio 3 opción A, modelo 4 Septiembre 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} x - y + mz &= 0 \\ mx + 2y + z &= 0 \\ -x + y + 2mz &= 0 \end{aligned}$$

a) [0’75 puntos] Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.

b) [1 punto] Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene alguna solución distinta de la solución nula.

c) [0’75 puntos] Resuelve el sistema para m = -2.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} x - y + mz &= 0 \\ mx + 2y + z &= 0 \\ -x + y + 2mz &= 0 \end{aligned}$$

a) y b)

Halla los valores del parámetro m para los que el sistema tiene una única solución.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ m & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2m & 0 \end{pmatrix}$.

Como vemos rango(A) = rango(A^*) al ser un sistema homogéneo (términos independientes 0), por tanto el sistema es siempre compatible.

El sistema tiene una única solución, la trivial (x,y,z) = (0,0,0), si el determinante de la matriz de los coeficientes A es distinto de cero.

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2m \end{vmatrix}_{F_3+F_1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3m \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 0 + 0 + 3m(2 + m) = 3m(2 + m)$.

Resolviendo la ecuación 3m(2 + m) = 0, obtenemos 3m = 0 y 2 + m = 0, de donde m = 0 y m = -2.

Si $m \neq 0$ y $m \neq -2$, det(A) = |A| ≠ 0, rango(A) = rango(A^*) = 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única, la trivial (x,y,z) = (0,0,0).**

Si **m = 0 y m = -2**, det(A) = |A| = 0, rango(A) = rango(A^*) < 3 = nº de incógnitas. **El sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones**
c)
Resuelve el sistema para m = -2.
Ya hemos visto que para m = -2, el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2.

Como el rango es 2 con dos ecuaciones es suficiente, tomamos la 1ª y 3ª ecuación pues con ellas he formado el menor distinto de cero.

$x - y - 2z = 0 \quad \rightarrow \quad x - y - 2z = 0$
$-x + y - 4z = 0. \quad F_2 + F_1 \quad \rightarrow \quad -6z = 0$, de donde $z = 0$.
Tomo **x = a** ∈ R, con lo cual y = x = a.
Solución (x,y,z) = (a, a, 0) con a ∈ R.

Ejercicio 4 opción A, modelo 4 Septiembre 2014

Considera los puntos A(1,1,2) y B(1,-1,-2) y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$.

(a) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a la recta que pasa por A y B.
(b) [1'5 puntos] Halla el punto de la recta r que está a la mínima distancia de A y B.

Solución

Considera los puntos A(1,1,2) y B(1,-1,-2) y la recta "r" dada por $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$.

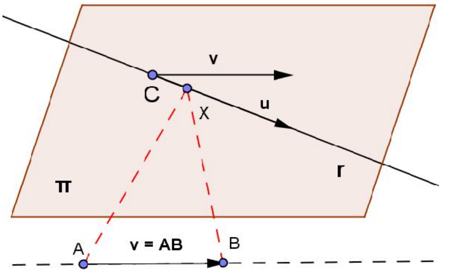
(a)
Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a la recta que pasa por A y B.

Como el plano contiene a "r" tomo de "r" un punto, el C y un vector, el **u**. Como el plano es paralelo a la recta que pasa por A y B, tomo de dicha recta el otro vector independiente, el **AB.** La ecuación general del plano pedida es det(**CX,u,AB**) = 0, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano.

De la recta "r" tenemos el punto C(1,0,1) y el vector **u** = (2,1,0).
v = AB = (1,-1,-2) - (1,1,2) = (0,-2,-4)

$$\pi \equiv \det(\mathbf{CX},\mathbf{u},\mathbf{AB}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (x-1)(-4+0) - (y)(-8-0) + (z-1)(-4-0) =$$

= -4x + 4 + 8y - 4z + 4 = -4x + 8y - 4z + 8 = -x + 2y - z + 2 = 0.
Un esbozo de la figura es:



(b)
Halla el punto de la recta r que está a la mínima distancia de A y B.

El dibujo anterior nos sirve, donde X es un punto genérico de la recta.
X(1+2t, t, 1); A(1,1,2) y B(1,-1,-2)

Tenemos que resolver la ecuación d(A,X) = d(B,X), es decir ||**AX**|| = ||**BX**||.
AX = (1+2t, t, 1) - (1,1,2) = (2t, t-1, -1)
BX = (1+2t, t, 1) - (1,-1,-2) = (2t, t+1, 3)
De ||**AX**|| = ||**BX**||, tenemos $\sqrt{(2t)^2+(t-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{(2t)^2+(t+1)^2+(3)^2}$. Elevando al cuadrado: $(2t)^2 + (t-1)^2 + (-1)^2 = (2t)^2 + (t+1)^2 + (3)^2 \rightarrow t^2 - 2t + 1 + 1 = t^2 + 2t + 1 + 9 \rightarrow -4t = 8$, de donde t = -2 y **el punto buscado es** X(1+2(-2), -2, 1) = **X(-3,-2,1)**.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 4 Septiembre 2014

[2'5 puntos] De entre todos los número reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Solución

Es un problema de optimización.
Función a minimizar: S(x) = x + 1/x, con x > 0.

Si S'(a) = 0 y S''(a) > 0, x = a es un mínimo de S(x)

$S'(x) = 1 - 1/x^2$. De S'(x) = 0, tenemos $1 - 1/x^2 = 0$, es decir $1 = 1/x^2$ de donde $x^2 = 1$, y sus soluciones son $x = \pm 1$. Como x > 0, sólo sirve x = 1.
El nº que sumado con su inverso, da una suma mínima **es el 1**, y la suma es 1 + 1/1 = 2.
Veamos que x = 1 es un mínimo, viendo que S''(1) > 0
De $S'(x) = 1 - 1/x^2$, tenemos $S''(x) = 0 - (-2x/x^4) = 2/x^3$, por tanto sustituyendo tenemos S''(1) = 2/1 = 2 > 0, luego x = 1 es un mínimo.

Ejercicio 2 opción B, modelo 4 Septiembre 2014

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$ (Sugerencia: integración por partes).

Solución

Resolvemos primero la integral indefinida $I = \int \frac{x}{\cos^2(x)}dx$ = {Integral por partes por partes

$\int udv = uv - \int vdz$. En nuestro caso u = x y $dv = \frac{dx}{\cos^2(x)}$, de donde du = dx y $v = \int dv =$

$= \int \dfrac{dx}{\cos^2(x)} = tg(x)\ \} = x\cdot tg(x) - \int tg(x)dx = x\cdot tg(x) - \int \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}dx = x\cdot tg(x) - (-\ln(\cos(x)) =$

$= x\cdot tg(x) + \ln(\cos(x))$.

Luego $\int_0^{\pi/4} \dfrac{x}{\cos^2(x)}dx = [x\cdot tg(x) + \ln(\cos(x)]_0^{\pi/4} =$

$= ((\pi/4)\cdot tg(\pi/4) + \ln(\cos((\pi/4)) - (0\cdot tg(0) + \ln(\cos(0)) = \pi/4\cdot(1) + \ln((\sqrt{2})/2) - 0 - \ln(1) =$

$\mathbf{= \pi/4 + \ln((\sqrt{2})/2).}$

Ejercicio 3 opción B, modelo 4 Septiembre 2014

Sabiendo que el determinante de la matiz A = $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes:

(a) [0’5 puntos] det(3A).

(b) [0’5 puntos] $\det(A^{-1})$.

(c) [0’75 puntos] $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

(d) [0’75 puntos] $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Solución

Sabiendo que el determinante de la matiz A = $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes determinantes:

(a) y (b)

det(3A) y $\det(A^{-1})$.

(i)Sabemos que $\det(k\cdot A_n) = (k)^n\cdot\det(A)$ y que $\det(A^{-1}) = 1/(\det(A))$, porque de $A^{-1}\cdot A = \mathbf{I}$, aplicándole determinantes $|A^{-1}\cdot A| = |\mathbf{I}| = 1 = |A^{-1}|\cdot|A|$.

Luego **det(3A)** $= (3)^3\cdot\det(A) = 27\cdot(2)$ **= 54**, y $\mathbf{\det(A^{-1})} = 1/(\det(A)) = \mathbf{1/2}$.

(c)

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

(ii)Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(iii)Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ = {aplicamos (ii)} = $(3)\cdot(2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ = {aplicamos (iii)} =

german.jss@gmail.com

$$= (6)(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (6)(-1)(2) = \mathbf{-12}.$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

(iv)Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el premier y segundo sumando respectivamente.
(v)Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, dicho determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (iv)}\} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{\text{aplicamos (ii), (iii) y (v)}\} =$$

$$= (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 = (-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 = \mathbf{-2}.$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 4 Septiembre 2014

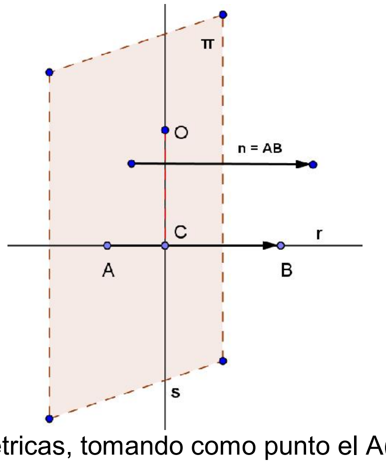
Sea r la recta que pasa por los puntos A(1,0,-1) y B(2,-1,3).
(a) [1'25 puntos] Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta r.
(b) [1'25 puntos] Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

Solución

Sea r la recta que pasa por los puntos A(1,0,-1) y B(2,-1,3).
(a)
Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta r.

Vamos a calcular la distancia de punto a recta, como si calculáramos el simétrico de un punto respecto a la recta, porque nos servirá para el apartado (b).

Veámoslo con una figura.



Ponemos la recta "r" en paramétricas, tomando como punto el A(1,0,-1) y como vector de dirección el **u = AB** = (2,-1,3) - (1,0,-1) = (1,-1,4), con lo cual "r"$\equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 - \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$ con $\lambda \in R$.

Calculamos el plano es perpendicular "π" a "r" que pasa por el origen O(0,0,0). Su vector normal **n** coincide con el vector director de "r" el **u = AB** = (1,-1,4),.
La ecuación del plano π es **OX•n** = 0, siendo X(x,y,z) un punto genérico del plano y "•" el producto escalar:
$\pi \equiv$ **OX•n** = 0 = (x,y,z)•(1,-1,4) = x - y + 4z = 0.
Calculamos el punto de corte C del plano π con la recta r, sustituyendo la recta en el plano:
$(1+\lambda) - (-\lambda) + 4(-1+4\lambda) = 0 \rightarrow -3+18\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 3/18 = 1/6$.
El punto C es C(1+(1/6),-(1/6),-1+4(1/6)) = C(7/6,-1/6,-2/6).

Por la construcción que hemos hecho la distancia del origen O a la recta r es la distancia del punto O al punto C.
d(O,r) = d(O,C) = ||OC|| = $\sqrt{(7/6)^2+(1/6)^2+(2/6)^2} = \sqrt{54/36} \cong$ 1'225 u.l.
(b)
Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas.

Por la construcción que hemos hecho la distancia, la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el origen de coordenadas del origen O, es la recta s que pasa por el punto O y el punto C.

Recta "s", punto el O(0,0,0); vector dirección el **OC** = (7/6,-1/6,-2/6); otro es el **v** = (7,-1,-2):

La recta en paramétricas es "s"$\equiv \begin{cases} x = 0 + 7\lambda \\ y = 0 - \lambda \quad \text{con } \lambda \in R \\ z = 0 - 2\lambda \end{cases}$