Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo_1 Junio 2014

Sea $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) [1'75 puntos] Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga tiene un punto de inflexión de abscisa x = 1/2 y que la recta tangente en el punto de abscisa x = 0 tenga de ecuación y = 5 – 6x.

a) [0'75 puntos] Para a = 3, b = -9 y c = 8, calcula los extremos relativos de f(abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Solución

Sea $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a)

Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga tiene un punto de inflexión de abscisa x = 1/2 y que la recta tangente en el punto de abscisa x = 0 tenga de ecuación y = 5 – 6x.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Esta función es polinómica por tanto continua, derivable e integrable las veces que sean necesarias, en R.

Como tiene un punto de inflexión en x =1/2, sabemos que **f''(1/2) = 0**.
Como la recta tangente en el punto de abscisa x = 0 tiene de ecuación y = 5 – 6x, tenemos que **f(0) = 5**, porque en x = 0 la ordenada f(0) y el valor y(0) de la recta tangente coinciden.
Sabemos también que la pendiente de la recta tangente (y' = -6) coincide con f'(0) (por la interpretación geométrica de la derivada en un punto), por tanto **f'(0) = -6.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$.
De f (0) = 5, tenemos 5 = c, por tanto **c = 5**
De f '(0) = -6, tenemos -6 = b, de donde **b = -6.**
De f ''(1/2) = 0, tenemos 0 = 6(1/2) + 2a, por tanto **a = -3/2.**

La función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2/2 - 6x + 5$.

a)

Para a = 3, b = -9 y c = 8, calcula los extremos relativos de f(abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Nuestra función es $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$.
Estudiamos la monotonía, es decir su primera derivada f'(x).
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$; $f'(x) = 3x^2 + 6x – 9$.
De f'(x) = 0, tenemos $3x^2 + 6x – 9 = 0 \to x^2 + 2x – 3 = 0$, de donde x = -3 y x = 1 que serán los posibles extremos relativos.
Como $f'(-4) = 3(-4)^2 + 6(-4) – 9 = 15 > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,-3)$.
Como $f'(0) = 3(0)^2 + 6(0) – 9 = -9 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (-3,1).
Como $f'(2) = 3(2)^2 + 6(2) – 9 = 15 > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(1,+\infty)$.
Por definición en x = -3 hay un máximo relativo que vale $f(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 9(-3) + 8 = 35$.
Por definición en x = 1 hay un mínimo relativo que vale $f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 9(1) + 8 = 3$.

Ejercicio 2 opción A, modelo_1 Junio 2014

Sean $f : R \to R$ y $g : R \to R$ las funciones definidas respectivamente por $f(x) = |x|/2$ y $g(x) = 1/(1 + x^2)$.

a) [1 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

a) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución

Sean f : R → R y g : R → R las funciones definidas respectivamente por f(x) = |x|/2 y g(x) = 1/(1 + x^2).

a)

Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

Recordamos que la gráfica del valor absoluto $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es la de **dos semirrectas que coinciden en (0,0)** porque |x| es continua en R por compuesta de continuas, **es simétrica respecto al eje OY** porque |-x| = |x|, por tanto la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es muy parecida a la de |x| pero **pasa por los puntos (-1,1/2) y (1,1/2)**.

La gráfica de g(x) = 1/(1 + x^2), al ser una función racional podemos obtenerla calculando sus asíntotas y su corte con los ejes.

No tiene asíntotas verticales, porque ningún valor de "x" anula el denominador.

Vemos que **g(0) = 1/(1 + 0^2) = 1**, y que **g(x) > 0**. Como al aumentar el denominador disminuye el cociente, **el valor (0,1) el máximo relativo y absoluto** pues se alcanza para x = 0.

Como $\lim_{x\to\pm\infty} 1/(1 + x^2) = 1/(1 + (\pm\infty)^2) = 1/+\infty = 0^+$, **la recta y = 0 es una asíntota horizontal de g en** ±∞, y además g está por encima de la asíntota horizontal y = 0 en ±∞.

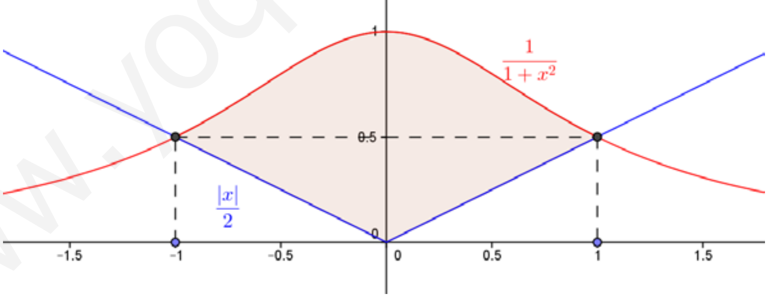
Como g(-x) = g(x), **la gráfica de g es simétrica respecto al eje OY**.

Veamos los puntos de corte de f y g. Lo estudiamos sólo para x > 0, por simetría.

De f(x) = g(x), tenemos (x > 0) x/2 = 1/(1 + x^2) → x(1+ x^2) = 2 → x + x^3 = 2 → x^3 + x - 2 = 0.

Vemos que x = 1 es solución, porque $(1)^3$ + 1 – 2 = 0. Y ya no hay mas cortes entre las gráficas para x > 0, luego los punto de corte son (-1,1/2) y (1,1/2).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



a)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Para calcular el área observando la figura vemos que es simétrica respecto al eje OY, luego:

Área = $2\cdot\int_0^1 (1/(1+x^2) – x/2)dx = 2\cdot[\text{artag}(x) – x^2/4]_0^1$ =

= 2·(artag(1) – 1/4 - artag(0)) **= 2·(π/4 – 1/4 – 0) = π/2 – 1/2 ≅ 1'0708 u^2.**

Si no te das cuenta que es simétrica tienes que calcular el área como suma de dos integrales:

Área = $\int_{-1}^0 (1/(1+x^2) – (-x/2))dx + \int_0^1 (1/(1+x^2) – x/2)dx$ y se obtiene el mismo resultado.

Ejercicio 3 opción A, modelo_1 Junio 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x + 2y - 3z = 3$$
$$2x + 3y + z = 5$$

a) [1'5 puntos] Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

b) [1 punto] Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x + 2y - 3z = 3$$
$$2x + 3y + z = 5$$

a)

Calcula α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el original.

Observamos que **el sistema** $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$ tiene dos ecuaciones y tres incógnitas, y al nos ser los coeficientes de las incógnitas proporcionales (podemos reducir por Gauus, o bien obtener un menor de orden 2 distinto de cero) **tiene de rango 2**, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.

Si le añadimos la ecuación $\alpha x + y - 7z = 1$ al sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$, **para que tenga las mismas soluciones que el original la matriz de las coeficientes A del nuevo sistema** $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ \alpha x + y - 7z = 1 \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{pmatrix}$ **tiene que tener rango 2,** para lo cual **su determinante det(A) tiene que ser cero.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (1)(-21-1) - (2)(-14-\alpha) + (-3)(2-3\alpha) = -22 + 28 + 2\alpha - 6 + 9\alpha = 0 =$$

$= 0+11\alpha=0$, **de donde $\alpha = 0$, para que ambos sistemas ténganlas mismas soluciones**.

b)

Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

El sistema que me piden resolver es $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$. Lo haremos por Gauss. También se puede resolver por Cramer.

Su matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - F_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

, por tanto nuestro sistema asociado es $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -y + 7z = -1 \\ -3z = 2 \end{cases}$, de donde **$z = -2/3$.**

De $-y + 7(-2/3) = -1$, tenemos **y** $= 1 – 14/3$ **$= -11/3$.**

De $x + 2(-11/3) – 3(-2/3) = 3$, tenemos **$x$** $= 3 + 22/3 - 2$ **$= 25/3$.**

german.jss@gmail.com

L**a solución es (x,y,z) = (25/3,-11/3,-2/3)**, y es un sistema compatible y determinado con solución única.

Ejercicio 4 opción A, modelo_1 Junio 2014

Considera la recta r que pasa por los puntos A(1,0,-1) y B(-1,1,0).
(a) [1 punto] Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pase por C(-2,3,2).
(b) [1'5 puntos] Calcula la distancia entre r y s.

Solución

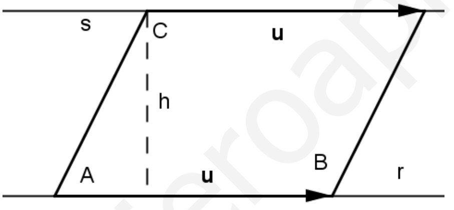
Considera la recta r que pasa por los puntos A(1,0,-1) y B(-1,1,0).
(a)
Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pase por C(-2,3,2).

Para la recta s tengo el punto C(-2,3,2), y como las rectas son paralelas me sirve como vector director de s el de la recta r, es decir el **u** = **AB** = (-2,1,1).

La recta s en forma paramétrica es : $s \equiv \begin{cases} x = -2 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$, con $\lambda \in$ R.

(b)
Calcula la distancia entre r y s.

Como ya sabemos que las rectas son paralelas, vamos a calcular la distancia entre ellas como el área de un paralelogramo. *Es la altura del paralelogramo*



Dada la recta "r" conocemos el punto A y el vector **u**. De la recta "s" sólo tomamos el punto C

El área del paralelogramo determinado por los vectores **u** y **AC** es ||**AC**x**u**|| = base·altura =

= ||**u**||·h, pero la altura "h" es d(s,r) = d(C;r), luego d(C;r) = (||**AC**x**u**||) / (||**u**||)

De "r", punto el A(1,0,-1) y vector, el **u** = (-2,1,1).
De "s", punto el C(-2,3,2).

AC = (-3, 3,3); **AC**x**u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = **i**(0) - **j**(3) + **k**(3) = (0,3,3) ; ||**AC**x**u**|| = $\sqrt{(0^2+3^2+3^2)} = 3\cdot\sqrt{(2)}$

||**u**|| = $\sqrt{(2^2+1^2+1^2)} = \sqrt{(6)}$

Luego d(s,r) = d(C;r) = (||**AC**x**u**||) / (||**u**||) = $3\cdot(\sqrt{(2)}) / (\sqrt{(6)}) = 3\cdot\sqrt{(1/3)}$ **= $\sqrt{(3)}$ u.l.**

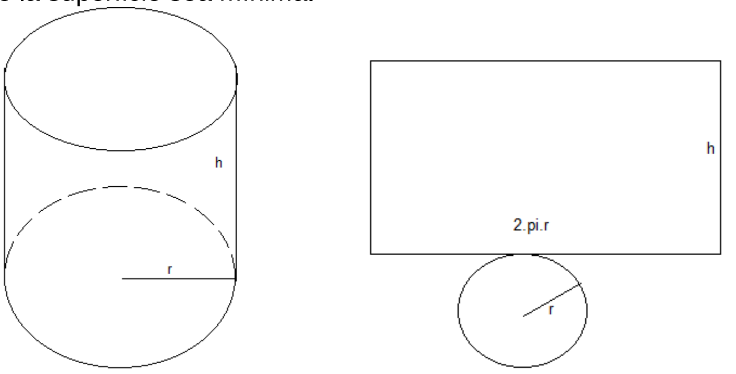
Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo_1 Junio 2014

[2'5 puntos] Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima..

Solución

Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.



Función a minimizar: Superficie = S = área rectángulo + área base = $(2\pi r).h + \pi r^2$.

Relación entre las variables: Capacidad = Volumen = 125 = $(\pi r^2).h$, de donde $h = \dfrac{125}{\pi r^2}$.

Función a minimizar $S(r) = (2\pi r)\cdot\dfrac{125}{\pi r^2} + \pi r^2 = \dfrac{250}{r} + \pi r^2$.

Si S'(a) = 0 y S''(a) > 0, x = a es un mínimo de S(r)

$S'(r) = \dfrac{-250}{r^2} + 2\pi r$. De S'(r) = 0, tenemos $\dfrac{-250}{r^2} + 2\pi r = 0$, es decir $2\pi r = \dfrac{250}{r^2}$, de donde tenemos $2\pi r^3 = 250$, y $r = \sqrt[3]{\dfrac{250}{2\pi}} = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ m. ≅ 3'414 m.

Las dimensiones del depósito son radio = $r = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ m. y $h = \dfrac{125}{\pi\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi}$ m $= \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \cong$

≅ 3'414 m. Observamos que el radio y la altura son iguales.

Veamos que $r = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ es un mínimo, viendo que $S''\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right) > 0$

De $S'(r) = \dfrac{-250}{r^2} + 2\pi r = -250\cdot r^{-2} + 2\pi r$, tenemos $S''(r) = -250\cdot(-2)\cdot r^{-3} + 2\pi = \dfrac{500}{r^3} + 2\pi$, por tanto sustituyendo $S''\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = \dfrac{500}{\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3} + 2\pi = 4\pi + 2\pi = 6\pi > 0$, luego es un mínimo.

Ejercicio 2 opción B, modelo_1 Junio 2014

[2'5 puntos] Sea la función definida por $f(x) = x\cdot\ln(x + 1)$ para $x > -1$ (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1,0).

Solución

Una primitiva de $f(x) = x\cdot\ln(x + 1)$ es $F(x) = I = \int x\cdot\ln(x + 1)\,dx$ = {Integral por partes por partes $\int udv = uv - \int vdz$. En nuestro caso $u = \ln(x + 1)$ y $dv = x\cdot dx$, de donde $du = \dfrac{dx}{1+x}$ y $v = \int dv =$

$= \int x\cdot dx = x^2/2$ } $= (x^2/2)\cdot\ln(x + 1) - \int \dfrac{x^2dx}{2(1+x)} = (x^2/2)\cdot\ln(x + 1) - I_1$

german.jss@gmail.com

$I_1 = \int \frac{x^2dx}{2(1+x)} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{(1+x)}$, que es una integral racional, pero como el numerador es de grado mayor que el denominador tenemos que efectuar antes la división entera.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^2 - x & x-1 \\ \hline x+1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$I_1 = (1/2)\cdot \int ((Cx) + R(x)/(d(x))dx = (1/2)\cdot\int (x-1)dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = (1/2)\cdot(x^2/2 - x) + (1/2)\cdot\ln(x+1)$, luego $\mathbf{F(x) =} I = (x^2/2)\cdot \ln(x + 1) - I_1 = (x^2/2)\cdot\ln(x + 1) - (1/2)\cdot(x^2/2 - x) - (1/2)\cdot\ln(x+1) + K =$
$\mathbf{= (x^2/2 - 1/2)\cdot\ln(x + 1) - (1/2)\cdot(x^2/2 - x) + K}$.

Como pasa por (1,0), $F(1) = 0 \rightarrow (1/2 - 1/2)\cdot\ln(1 + 1) - (1/2)\cdot(1/2 - 1) + K = 0 = 1/4 + K = 0$, de donde $K = -1/4$ y la primitiva pedida es $\mathbf{F(x) = (x^2/2 - 1/2)\cdot\ln(x + 1) - (1/2)\cdot(x^2/2 - x) - 1/4.}$

Ejercicio 3 opción B, modelo_1 Junio 2014

[2'5 puntos] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determina, si existe, la matriz X que verifica $A\cdot X + B = A^2$

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determina, si existe, la matriz X que verifica $A\cdot X + B = A^2$.

La matriz A tiene matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$, si su determinante $det(A) = |A|$ es distinto de cero.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos tercera fila $= 1(0-1) = -1 \neq 0$, la matriz A tiene matriz inversa A^{-1}.

$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) = (1/-1).\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De $A\cdot X + B = A^2$, tenemos $A\cdot X = A^2 - B$. Como existe A^{-1} multiplicamos por la izquierda la expresión $A\cdot X = A^2 - B$.

$A^{-1}AX = A^{-1}A^2 - A^{-1}B \rightarrow I\cdot X = I\cdot A - A^{-1}\cdot B \rightarrow X = A - A^{-1}\cdot B$

Luego $X = A + A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 opción B, modelo_1 Junio 2014

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas..
(b) [1 punto] Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto (1,1,0).

Solución

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ o $\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

(a)
Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

Una de las maneras de resolverlo es calcular el haz de planos que determina la recta r (pues me la han dado en forma implícita) y sustituir el punto por donde pasa el plano.
Haz de planos $(x + 2y – z – 3) + \lambda(2x - y + z – 1) = 0$. Sustituimos el origen (0,0,0) y nos queda $(0 – 3) + \lambda(0 – 1) = 0$, de donde $\lambda = -3$, y **el plano pedido es**:
$(x + 2y – z – 3) + (-3)(2x - y + z – 1) = 0 =$ **$-5x + 5y – 4z = 0$**
(b)
Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto P(1,1,0).

Como el plano π es perpenticular a la recta "r" tiene como vector normal **n** el vector director de la recta r, el **v**.
Un vector director **v** lo sacamos como producto vectorial (x) de los vectores normales que determinan dicha recta.

$$\mathbf{v} = (1,2,-1)x(2,-1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1) - \mathbf{j}(3) + \mathbf{k}(-5) = (1,-3,-5) = \mathbf{n}.$$

Si nos damos cuenta el vector normal se obtiene de los vectores independientes (1,2,-1) y (2,-1,1), que son los vectores normales de los planos que determinan la recta.
Para poner la ecuación paramétrica del plano necesitamos un punto, el P(1,1,0) y dos vectores independientes el (1,2,-1) y (2,-1,1).

Las ecuaciones paramétricas del plano son: $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda - \mu \\ z = 0 - \lambda + \mu \end{cases}$, con λ, $\mu \in$ R y (x,y,z) un punto genérico del plano.

german.jss@gmail.com