

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 1 del 2015

[2'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla los coeficientes a , b , c y d sabiendo que f presenta un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, que $(1,0)$ es punto de inflexión de la gráfica de f y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3 .

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Halla a , b , c y d sabiendo que f presenta un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, que $(1,0)$ es punto de inflexión de la gráfica de f y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3 .

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Esta función es polinómica por tanto continua y derivable las veces que sean necesarias, en \mathbb{R} .

Como tiene un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, sabemos que $f'(0) = 0$.

Como que $(1,0)$ es punto de inflexión de la gráfica de f , sabemos que $f''(1) = 0$, por punto de inflexión y $f(1) = 0$, por ser punto de la gráfica de f .

Como la pendiente de la recta tangente en dicho punto $(1,0)$ es -3 , tenemos $f'(1) = -3$.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; \quad f''(x) = 6ax + 2b.$$

De $f'(0) = 0$, tenemos $0 = c$, por tanto $c = 0$.

De $f''(1) = 0$, tenemos $0 = 6a + 2b$, por tanto $b = -3a$.

De $f(1) = 0$, tenemos $0 = a + b + d$, de donde $a + b + d = 0$.

De $f'(1) = -3$, tenemos $-3 = 3a + 2b$. Como $b = -3a$ tenemos $-3 = 3a + 2(-3a) \rightarrow -3 = -3a$, luego $a = 1$ y $b = -3(1) = -3$.

Entrando con $a = 1$ y $b = -3$ en $0 = a + b + d \rightarrow 0 = 1 - 3 + d$, luego $d = 2$. \rightarrow

La función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ejercicio 2 opción A, modelo 1 del 2015

[2'5 puntos] Calcula el valor de $a > 1$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + ax$ y la recta $y = x$ es $\frac{4}{3}$.

Solución

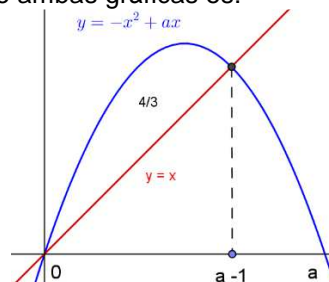
Veamos los puntos de corte de la parábola $y = -x^2 + ax$ con la recta $y = x$.

Resolvemos $-x^2 + ax = x$, es decir $x^2 + ax - x = 0 = x \cdot (-x + a - 1)$, de donde las abscisas de los puntos de corte son $x = 0$ y $x = a - 1$.

La recta $y = x$ es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

La parábola $y = -x^2 + ax$ es de la forma \cap , pues el número que multiplica a x^2 es negativo, y corta al eje OX en $x = 0$ y $x = a$ (soluciones de $-x^2 + ax = 0$), por tanto la parábola está por encima de la bisectriz $y = x$.

Aunque no lo piden un esbozo de ambas gráficas es:



Me dicen que el área encerrada por ambas gráficas es $4/3$, luego:

$$\text{Área} = 4/3 = \int_0^{a-1} (-x^2 + ax - (x)) dx = [-x^3/3 + ax^2/2 - x^2/2]_0^{a-1} =$$

$= [(-a-1)^3/3 + a(a-1)^2/2 - (a-1)^2/2] - (0) =$
 $= -(a^3 - 3a^2 + 3a - 1)/3 + a(a^2 - 2a + 1)/2 - (a^2 - 2a + 1)/2 =$
 $= [-2(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + 3a(a^2 - 2a + 1) - 3(a^2 - 2a + 1)] / 6 = (a^3 - 3a^2 + 3a - 1)/6.$ Igualando esta expresión a $4/3$ tenemos:
 $(a^3 - 3a^2 + 3a - 1)/6 = 4/3 = 8/6$, de donde $a^3 - 3a^2 + 3a - 9 = 0$. Se observa que $a = 3$ es una solución. (División por Ruffini)

	1	-3	3	-9
3		3	0	9
	1	0	3	0

Luego $a = 3$ es una solución de la ecuación $a^3 - 3a^2 + 3a - 9 = 0$, y queda de cociente de la división $a^2 + 3 = 0$, que no tiene soluciones reales, es decir:

$a^3 - 3a^2 + 3a - 9 = (a - 3) \cdot (a^2 + 3)$, por tanto el valor pedido es $a = 3$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 1 del 2015

Considera el sistema dado por $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- a) [0'75 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.
- b) [0'75 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.
- c) [1 punto] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones.

Halla todas las soluciones en dichos casos.

Solución

Considera el sistema dado por $AX = B$ con $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- a)
Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.

La matriz de los coeficientes del sistema $AX = B$ es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada es

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 3 & 4 & \alpha & 3 \end{pmatrix}.$$

El sistema tiene solución única si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ con lo cual $\det(A) = |A| \neq 0$.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = \alpha(\alpha - 8) - 0 + 3(4 + 1) = \alpha^2 - 8\alpha + 15.$$

De $\alpha^2 - 8\alpha + 15 = 0$ obtenemos $\alpha = 3$ y $\alpha = 5$.

Si $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq 5$, $\det(A) \neq 0$ con lo cual $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ y **el sistema tiene solución única.**

- b)
Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.

El sistema no tiene solución si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$. Veamos los rangos de A y de A^* para los valores $\alpha = 3$ y $\alpha = 5$.

$$\text{Si } \alpha = 3, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En } A \text{ como } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \text{ Adjuntos} \\ \text{primera} = 3(3 - 4) - 0 + 3(2 - 1) = -3 + 3 = 0, \text{ rango}(A^*) = 2. \\ \text{columna} \end{array}$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$, el sistema tiene más de una solución, que es el caso (c) que resolveremos después.

$$\text{Si } \alpha = 5, A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En } A \text{ como } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 0 \neq 0, \text{ rango}(A) = 2$$

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \text{ Adjuntos} \\ \text{primera} = 5(3 - 12) - 0 + 3(6 - 1) = -45 + 15 = -30 \neq 0, \text{ rango}(A^*) = 3. \\ \text{columna} \end{array}$$

Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, el sistema es incompatible y no tiene ninguna solución.

c)

Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

$$\text{Hemos visto que este caso se daba para } \alpha = 3, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < \text{número de incógnitas}$, el sistema tiene más de una solución. Como el rango es dos tomamos sólo dos ecuaciones, las dos primeras que son con las que he formado el menor de orden dos distinto de cero.

$$3x + 2y - z = 1$$

$$y + 2z = 1. \text{ Tomo } z = \lambda \in \mathbb{R}, \text{ con lo cual } y = 1 - 2\lambda.$$

$$\text{De } 3x + 2(1 - 2\lambda) - (\lambda) = 1 \rightarrow 3x + 2 - 4\lambda - \lambda = 1 \rightarrow 3x = -1 + 5\lambda, \text{ de donde } x = -1/3 + (5\lambda)/3, \text{ y la solución del sistema es } (x, y, z) = (1/3 + (5\lambda)/3, 1 - 2\lambda, \lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 4 opción A, modelo 1 del 2015

Considera los puntos $B(1,2,-3)$, $C(9,-1,2)$, $D(5,0,-1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) [1'25 puntos] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son B, C y D.

b) [1'25 puntos] Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

Solución

Considera los puntos $B(1,2,-3)$, $C(9,-1,2)$, $D(5,0,-1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a)

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son B, C y D.

Sabemos que el área de un triángulo BCD es la mitad del área del paralelogramo que determinan sus lados BC y BD, es decir la mitad del módulo ($||$) del vector producto vectorial (\times) de los vectores **BC** y **BD**, luego el Área del triángulo es $= (1/2) \cdot ||\mathbf{BC} \times \mathbf{BD}||$.

$$\mathbf{BC} = (8, -3, 5); \mathbf{BD} = (4, -2, 2); \mathbf{BC} \times \mathbf{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-6+10) - \vec{j}(16-20) + \vec{k}(-16+12) = (4, 4, -4)$$

$$||\mathbf{BC} \times \mathbf{BD}|| = \sqrt{(4)^2 + (4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Área del triángulo es} = (1/2) \cdot ||\mathbf{BC} \times \mathbf{BD}|| = (1/2) \cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

b)

Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

Ponemos la recta "r" en vectorial o paramétrica, tomamos un punto genérico de "r", el A, y le imponemos la condición de ser rectángulo en A, es decir los vectores **BA** y **CA** son perpendiculares, por tanto su producto escalar (\bullet) es cero. $\mathbf{BA} \bullet \mathbf{CA} = 0$.

$$\text{En } r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \text{ tomando } z = \lambda \in \mathbb{R}, \text{ tenemos } y = \lambda \text{ y } x = -1 - \lambda. \text{ La ecuación vectorial de}$$

"r" es $(x, y, z) = (-1 - \lambda, \lambda, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, que es el punto genérico A de r, es decir $A(-1 - \lambda, \lambda, \lambda)$.

$$\mathbf{BA} = (-1 - \lambda - 1, \lambda - 2, \lambda + 3) = (-2 - \lambda, -2 + \lambda, 3 + \lambda)$$

$$\mathbf{CA} = (-1 - \lambda - 9, \lambda + 1, \lambda - 2) = (-10 - \lambda, 1 + \lambda, -2 + \lambda)$$

$$\mathbf{BA} \bullet \mathbf{CA} = 0 \rightarrow (-2 - \lambda, -2 + \lambda, 3 + \lambda) \bullet (-10 - \lambda, 1 + \lambda, -2 + \lambda) =$$

$$= (-2 - \lambda) \cdot (-10 - \lambda) + (-2 + \lambda) \cdot (1 + \lambda) + (3 + \lambda) \cdot (-2 + \lambda) =$$

$$= (\lambda^2 + 12\lambda + 20) + (\lambda^2 - \lambda - 2) + (\lambda^2 + \lambda - 6) = 3\lambda^2 + 12\lambda + 12 = 0 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0, \text{ de donde:}$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} = -2 \pm 0, \lambda = -2 \text{ (doble)}, \text{ tenemos un solo valor de } \lambda \text{ y por}$$

tanto tenemos un sólo punto de la recta "r" que verifica la condición.

Para $\lambda = -2$ tenemos el punto **A** $(-1 - (-2), (-2), (-2)) = \mathbf{A}(1, -2, -2)$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 1 del 2015 (Ejercicio 1A de Septiembre de 2006)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.

a) [0'5 puntos] Estudia la derivabilidad de f.

b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

c) [1 punto] Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

(a)

$$f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ teniendo en cuenta la definición de } |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$x^2 + x$ es una función continua y derivable en todo \mathbb{R} , en particular en $x < 0$

$x^2 - x$ es una función continua y derivable en todo \mathbb{R} , en particular en $x > 0$

Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$, es decir si verifica

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$f(0) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) = 0$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, **la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ y por tanto en**

todo \mathbb{R} .

Estudiamos ya la derivabilidad de $f(x)$, en particular en $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Veamos la derivabilidad en $x=0$, es decir si $f'(0^+) = f'(0^-)$. Vemos la continuidad de la derivada.

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 1) = -1; \quad f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1) = +1$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, **$f(x)$ no es derivable en $x=0$** por lo cual **es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$** .

(b) y (c)

Para ver la monotonía estudiamos la 1ª derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Si $x < 0$, $f'(x) = 2x + 1$.

$f'(x) = 0$, nos da $2x + 1 = 0$, de donde $x = -1/2$, que puede ser un posible extremo relativo.

Como $f'(-1) = -1 < 0$, **$f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en el intervalo $(-\infty, -1/2)$** .

Como $f'(-0^+) = 0^8 > 0$, **$f(x)$ es estrictamente creciente (\nearrow) en el intervalo $(-1/2, 0)$** .

Por definición **$x = -1/2$ es un mínimo relativo que vale $f(-1/2) = (-1/2)^2 - |-1/2| = -1/4$**

Si $x > 0$, $f'(x) = 2x - 1$. Resolvemos $f'(x) = 0$ y veremos crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.

$f'(x) = 0$, nos da $2x - 1 = 0$, de donde $x = 1/2$, que puede ser un posible extremo relativo.

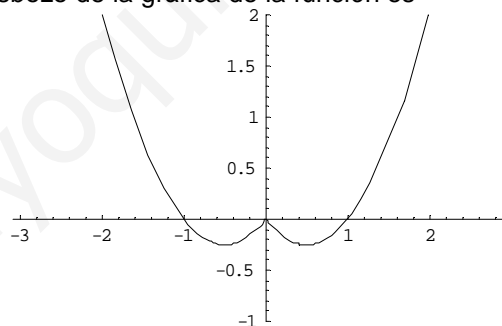
Como $f'(0^+) = -0^8 < 0$, **$f(x)$ es estrictamente decreciente (\searrow) en el intervalo $(0, 1/2)$** .

Por definición **$x = 0$ es un máximo relativo, no derivable, que vale $f(0) = (0)^2 - |0| = 0$** .

Como $f'(1) = 1 > 0$, **$f(x)$ es estrictamente creciente (\nearrow) en el intervalo $(1/2, +\infty)$** .

Por definición **$x = 1/2$ es un mínimo relativo que vale $f(1/2) = (1/2)^2 - |1/2| = -1/4$** .

Aunque no lo piden, un esbozo de la gráfica de la función es



Ejercicio 2 opción B, modelo 1 del 2015

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 1$ y sea F la primitiva de f cuya

gráfica pasa por el punto $P(2, \ln(2))$ (\ln denota logaritmo neperiano).

a) [0'5 puntos] Calcula la recta tangente a la gráfica de F en el punto P .

b) [2 puntos] Determina la función F .

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)}$ para $x \neq 0$ y $x \neq 1$ y sea F la primitiva de f cuya

gráfica pasa por el punto $P(2, \ln(2))$ (\ln denota logaritmo neperiano).

a)

Calcula la recta tangente a la gráfica de F en el punto P .

Sabemos que como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ entonces $F(x) = \int f(x)dx$ y además $F'(x) = f(x)$.

La recta tangente a la gráfica de F en el punto $P(2, \ln(2))$ es $y - F(2) = F'(2) \cdot (x - 2)$.

$$F(2) = \ln(2); \quad F'(2) = f(2) = \frac{(2)^2 + 1}{(2)^2 \cdot (2 - 1)} = \frac{5}{4}.$$

La recta tangente pedida es: $y - \ln(2) = \frac{5}{4} \cdot (x - 2)$.

b)

Determina la función F .

Como F es una primitiva de f tenemos $F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integral racional con una} \\ \text{raíz simple y una doble} \end{array} \right\} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \right) dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{x^2} dx + \int \frac{C}{x-1} dx =$$

$= A \cdot \ln|x| - \frac{B}{x} + C \cdot \ln|x - 1| + K = \{***\} = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x - 1| + K = F(x)$, donde \ln es el logaritmo neperiano.

$= \{***\}$ Calculamos las constantes A , B y C .

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} = \frac{A(x)(x-1) + B(x-1) + C(x)^2}{x^2 \cdot (x - 1)}$$

Igualando numeradores tenemos

$$x^2 + 1 = A(x)(x - 1) + B(x - 1) + C(x)^2.$$

Para $x = 0$ tenemos $1 = B(-1)$, de donde $B = -1$

Para $x = 1$ tenemos $2 = C(1)^2$, de donde $C = 2$

Tomando $x = -1$ tenemos $2 = A(-1)(-2) + (-1)(-2) + (2)(-1)^2$, de donde $2A = -2$, luego $A = -1$.

Como $F(x)$ pasa por el punto $P(2, \ln(2))$ tenemos $F(2) = \ln(2)$, de donde:

$$\ln(2) = -\ln|2| + \frac{1}{2} + 2\ln|2 - 1| + K = -\ln|2| + \frac{1}{2} + 0 + K, \text{ luego } K = 2 \cdot \ln(2) - \frac{1}{2}, \text{ y la primitiva}$$

pedida es **$F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x - 1| + 2 \cdot \ln(2) - \frac{1}{2}$.**

Ejercicio 3 opción B, modelo 1 del 2015

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) [1'75 puntos] Halla la matriz X que verifica $AX - B = I$ (I denota la matriz identidad de orden 3).

(b) [0'75 puntos] Calcula el determinante de la matriz $(A^2B^{-1})^{2015}$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a)

Halla la matriz X que verifica $AX - B = I$ (I denota la matriz identidad de orden 3).

$$\text{Como } \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = 1(8 - 6) = 2 \neq 0, \text{ existe la matriz in-}$$

$$\text{versa } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t).$$

$AX - B = I \rightarrow AX = I + B$. Multiplicando ambos miembros por la izquierda por A^{-1} tenemos:
 $A^{-1}AX = A^{-1} \cdot I + A^{-1}B \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot (I + B) \rightarrow \mathbf{X = A^{-1} \cdot (I + B)}$.

$$\text{Calculamos } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t). |A| = 2; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por tanto la}$$

$$\text{matriz inversa es } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matriz es } \mathbf{A^{-1} \cdot (I + B)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7/2 & 1/2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(b)

Calcula el determinante de la matriz $(A^2 B^{-1})^{2015}$.

Sabemos que $\det(B) = 1/\det(B)$, $\det(A^2) = (\det(A))^2$,

$$\text{Calculamos primero } \det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{array} = (-1)(0-4) = 4.$$

$$\mathbf{\det(A^2 B^{-1})^{2015} = (\det(A^2 B^{-1}))^{2015} = (\det(A) \cdot \det(A) \cdot \frac{1}{\det(B)})^{2015} = (2 \cdot 2 \cdot (1/4))^{2015} = 1^{2015} = 1.}$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 1 del 2015

Considera el punto $P(1,0,-1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

a) [1'5 puntos] Halla la distancia de P a r .

b) [1 punto] Determina la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r .

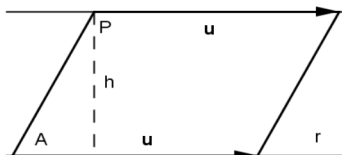
Solución

Considera el punto $P(1,0,-1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

a)

Halla la distancia de P a r .

Calculamos la distancia del punto P a la recta " r ", utilizando el área de un paralelogramo. *La distancia pedida es la altura del paralelogramo*



Dada la recta "r" conocemos el punto A y el vector \mathbf{u} . Por el punto P trazamos una recta paralela a la "r", y formamos el paralelogramo.

El área del paralelogramo determinado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{AP} es $\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\| = \text{base} \cdot \text{altura} = \|\mathbf{u}\| \cdot h$, pero la altura "h" es $d(P;r)$, luego $d(P;r) = (\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|)$ ("x" es el producto vectorial).

Ponemos "r", en forma vectorial, para lo cual $y = \lambda \in \mathbb{R}$, de donde $x = -\lambda$, y la ecuación de la recta es $r \equiv (x, y, z) = (-\lambda, \lambda, 1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Un punto de "r" es $A(0, 0, 1)$ y un vector director de "r" es $\mathbf{u} = (-1, 1, 0)$.

Punto $P(1, 0, -1)$. $\mathbf{AP} = (1, 0, -2)$; $\mathbf{AP} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0+2) - \mathbf{j}(0-2) + \mathbf{k}(1-0) = (2, 2, 1)$;

$$\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\| = \sqrt{(2^2 + 2^2 + 1^2)} = 3; \quad \|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

Luego $d(P;r) = (\|\mathbf{AP} \times \mathbf{u}\|) / (\|\mathbf{u}\|) = 3 / (\sqrt{2}) = (3\sqrt{2})/2$ u.l.

b)

Determina la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r.

Formamos el haz de planos que determina la recta y la imponemos la condición de que pase por el punto P

Haz de planos $\pi_\lambda \equiv (x + y) + \lambda(z - 1) = 0$. Como $P(1, 0, -1) \in \pi_\lambda \rightarrow (1 + 0) + \lambda(-1 - 1) = 0$, de donde $2\lambda = 1$, $\lambda = 1/2$, y **el plano pedido es $\pi_{1/2} \equiv (x + y) + (1/2)(z - 1) = 0 \equiv 2x + 2y + z - 1 = 0$.**