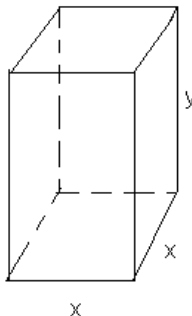


Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 4 Junio 2015

[2'5 puntos] Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad de $13\sqrt{5}$ m³. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para el gasto de chapa sea el mínimo posible.

Solución



Función a Optimizar: Superficie $S = x^2 + 4xy$ (No tiene tapa superior)

Relación entre las variables: Capacidad = Volumen = $13\sqrt{5} = x^2 \cdot y$, de donde $y = (13\sqrt{5})/x^2$

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) < 0$, $x = a$ es un máximo relativo de $g(x)$

Sabemos que si $g'(a) = 0$ y $g''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo relativo de $g(x)$

$$S(x) = x^2 + 4xy = x^2 + 4x(13\sqrt{5})/x^2 = x^2 + 54/x$$

$$S'(x) = 2x - 54/x^2$$

De $S'(x) = 0$, tenemos $2x - 54/x^2 = 0$, es decir $2x = 54/x^2$, de donde $x^3 = 27$, y calculando la raíz cúbica sale $x = 3$ m, posible máximo ó mínimo.

$$S''(x) = 2 + 108/x^3$$

Como $S''(3) = 2 + 108/(3)^3 = 2 + 4 = 6 > 0$, $x = 3$ es un mínimo relativo.

De $x = 3$, tenemos $y = 13\sqrt{5}/3^2 = 3/2 = 1\sqrt{5}$ m, luego las dimensiones del depósito son $x = 3$ m. e $y = 1\sqrt{5}$ m.

Ejercicio 2 opción A, modelo 4 Junio 2015

[2'5 puntos] Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2} dx$.

Solución

$$\text{Calcula } \int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2} dx.$$

La integral pedida es una integral racional, y como el grado del numerador y el denominador son iguales, efectuamos la división entera antes.

$$\frac{-x^2}{x^2 + x - 2} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2} - 1$$

$$\text{Recordamos que } I = \int \left(\text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{divisor}} \right) dx = \int \left(-1 + \frac{x - 2}{x^2 + x - 2} \right) dx = -x + I_1.$$

I_1 ya es racional y descomponemos el denominador en producto de factores:

Resolviendo $x^2 + x - 2 = 0$, obtenemos $x = 1$ y $x = -2$, luego $x^2 + x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 2)$

$$I_1 = \int \frac{x - 2}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{x - 2}{(x - 1) \cdot (x + 2)} dx = \int \frac{A dx}{x - 1} + \int \frac{B dx}{x + 2} = A \cdot \ln|x - 1| + B \cdot \ln|x + 2| = \{(*)\} = (-1/3) \cdot \ln|x - 1| + (4/3) \cdot \ln|x + 2|.$$

(*) Calculamos A y B

german.jss@gmail.com

$$\frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Igualando numeradores:
 $x-2 = A(x+2) + B(x-1)$. (Le damos a "x" el valor de las raíces, 1 y -2)
 De $x = 1 \rightarrow 1-2 = A(1+2) + B(1-1) = 3A$, de donde $-1 = 3A$, luego $A = -1/3$.
 De $x = -2 \rightarrow -2-2 = A(-2+2) + B(-2-1) = -3B$, de donde $-4 = -3B$, luego $B = 4/3$.

Por tanto $I = \int \frac{-x^2}{x^2+x-2} dx = -x + I_1 = -x + (-1/3)\cdot\ln|x-1| + (4/3)\cdot\ln|x+2| + K$.

Ejercicio 3 opción A, modelo 4 Junio 2015

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned}\lambda x + y - z &= -1 \\ \lambda x + \lambda z &= \lambda \\ x + y - \lambda z &= 0\end{aligned}$$

a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de λ .

b) [1 punto] Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned}\lambda x + y - z &= -1 \\ \lambda x + \lambda z &= \lambda \\ x + y - \lambda z &= 0\end{aligned}$$

a)

Discute el sistema según los valores de λ .

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{array} = -(\lambda)\cdot(-\lambda+1) + 0 - (\lambda)\cdot(\lambda-1) = -(\lambda)\cdot(-\lambda+1+\lambda-1) = -(\lambda)\cdot(0) = 0.$$

Sea cual sea el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A) = 0$, por tanto $\text{rango}(A) < 3$ siempre.

En A tomando el menor de orden 2, (dos primeras filas y dos primeras columnas),

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} = 0 - \lambda = -\lambda, \text{ vemos que si } \lambda \neq 0, \det(A) \neq 0 \text{ y } \text{rango}(A) = 2.$$

En A^* formamos el menor de orden 3 con las columnas 1^a , 2^a y 4^a , y por supuesto $\lambda \neq 0$. Tomamos 1^a y 2^a pues con ellas he determinado el menor de orden 2 de A.

$$\text{En } A^* \text{ como } \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} \\ \text{fila} \end{array} = -(\lambda)\cdot(0+1) + 0 - (\lambda)\cdot(\lambda-1) = -(\lambda)\cdot(1+\lambda-1) = -\lambda^2 \neq 0,$$

puesto que $\lambda \neq 0$, por tanto $\text{rango}(A^*) = 3$.

Luego si $\lambda \neq 0$, $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, y el sistema es incompatible y no tiene solución

Si $\lambda = 0$ tenemos $A \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, vemos que ambas matrices

están escalonadas por filas y tienen dos filas con elementos distinto de cero, por tanto su rango es dos, es decir si $\lambda = 0$, **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.**

b)

Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Hemos visto que $\lambda = 0$, **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, por tanto es un sistema compatible e indeterminado con infinitas soluciones.** Tomamos sólo las dos primeras ecuaciones puesto que el rango es dos.

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ y - z &= -1 \end{aligned}$$

Tomo $z = b \in \mathbb{R}$, tenemos $y = -1 + b$ y $x = -(-1 + b) = 1 - b$, y las infinitas soluciones del sistema son $(x, y, z) = (1 - b, -1 + b, b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción A, modelo 4 Junio 2015

Sean los puntos A(0,1,1), B(2,1,3), C(-1,2,0) y D(2,1,m).

(a) [0'75 puntos] Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

(b) [0'75 puntos] Determina la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.

(c) [1 punto] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Solución

Sean los puntos A(0,1,1), B(2,1,3), C(-1,2,0) y D(2,1,m).

(a)

Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

Con los puntos A, B y C formamos un plano π que tiene como punto el A y como vectores independientes el **AB** y **AC**. Después le imponemos la condición de que el punto $D \in \pi$. Otra forma de hacerlo es viendo el rango de los vectores **AB**, **AC** y **AD**. Si el rango es 2 son coplanarios y si el rango es 3 no son coplanarios.

AB = (2,0,2); **AC** = (-1,1,-1). Vemos que son independientes pues sus coordenadas no son proporcionales.

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (x)(0-2) - (y-1)(-2+2) + (z-1)(2-0) = -2x + 2z - 2 = 0 =$$

$$= -x + z - 1 = 0.$$

Como $D \in \pi \rightarrow -(2) + (m) - 1 = 0$, de donde **m = 3 para que los puntos sean coplanarios.**

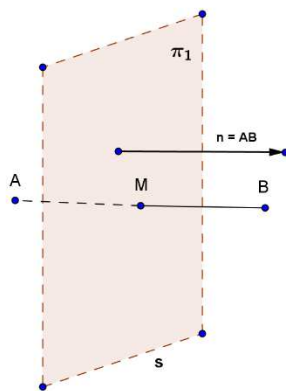
Veamos también que para $\text{rango}(\mathbf{AD}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = 2$, $\det(\mathbf{AD}, \mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = 0$, y saldrá $m = 3$.

$$\det(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & m-1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} = -1(4 - (-1)(m-1)) = -4 - m + 1 = 0 \rightarrow m = 3. \\ \text{columna} \end{array}$$

(b)

Determina la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.

El plano π_1 que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y tiene vector normal el **AB**, es decir nos piden el plano mediador del segmento AB.



$\mathbf{AB} = (2,0,2)$. Otro vector normal sería $\mathbf{n} = (1,0,1)$.

El punto medio del segmento AB es $M((0+2)/2, (1+1)/2, (1+3)/2) = M(1,1,2)$.

Un plano paralelo a π_1 es $x + z + K = 0$, como $M \in \pi_1 \rightarrow (1) + (2) + K = 0$, de donde $K = -3$ y el plano pedido es $\pi_1 \equiv x + z - 3 = 0$.

(c)

Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Sabemos que el área de un triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo que determinan sus lados AB y AC, es decir la mitad del módulo ($\| \cdot \|$) del vector producto vectorial (x) de los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{AC} , luego el Área del triángulo es $= (1/2) \cdot \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\|$.

$\mathbf{AB} = (2,0,2)$; $\mathbf{AC} = (-1-0, 2-1, 0-1) = (-1, 1, -1)$.

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(-2+2) + \vec{k}(2-0) = (-2, 0, 2)$$

$$\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Área del triángulo es} = (1/2) \cdot \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}\| = (1/2) \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 4 Junio 2015

[2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\text{sen}(x^2)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

Solución

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{x \cdot \text{sen}(x)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\text{sen}(x^2)} = \frac{a(0)^2 + b(0) + 1 - \cos(0)}{0 \cdot \text{sen}(0)} = 0/0.$$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H) (si "f" y "g" son funciones continuas en $[a - \delta, a + \delta]$, derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞ , y también si $x \rightarrow \infty$, con lo cual tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\sin(x^2)} = (0/0; L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + b + \sin(x)}{2x \cdot \cos(x^2)} = \frac{2a(0) + b + \sin(0)}{2(0) \cdot \cos(0^2)} = b/0.$$

Como me dicen que el límite existe y vale uno, **el numerador ha de ser cero**, para poder seguir aplicándole la regla de L'Hôpital, es decir $b = 0$, de donde **$b = 0$** .

Volviéndole a aplicar la regla de L'Hôpital, con $b = 0$, tenemos:

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + \sin(x)}{2x \cdot \cos(x^2)} = (0/0; L'H) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a + \cos(x)}{2 \cdot \cos(x^2) + 2x \cdot (-2x \cdot \sin(x^2))} = \frac{(2a + 1)}{(2 + 0)}, \text{ es}$$

decir **$1 = (2a + 1)/2$** , de donde $2 = 2a + 1$, por tanto **$a = 1/2$** .

Los valores pedidos son **$a = 1/2$ y $b = 0$** .

Ejercicio 2 opción B, modelo 4 Junio 2015

[2'5 puntos] Determina la función $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = \ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano)

Solución

Por el Teorema fundamental del cálculo Integral que dice: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces la función $G(x) = \int_a^x [f(t)] dt$ es derivable y su derivada es $G'(x) = (\int_a^x [f(t)] dt)' = f(x)$.

En nuestro caso, en la práctica $f(x) = \int f'(x) dx$; $f'(x) = \int f''(x) dx$; $f''(x) = \int f'''(x) dx$, etc...

Como la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto $P(1, 2)$, sabemos que **$f'(1) = 0$** .

Como la gráfica de f pasa por el punto $P(1, 2)$, sabemos que **$f(1) = 2$** .

Recordamos que **$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x$** , pues **es una integral por partes** $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$.
 $\int \ln(x) dx = \{ u = \ln(x) \rightarrow du = dx/x; dv = x \rightarrow v = \int dx = x \} = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot dx/x = x \cdot \ln(x) - \int dx = x \cdot \ln(x) - x$.

Empezamos **$f'(x) = \int f''(x) dx = \int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + K$** .

Como **$f'(1) = 0 \rightarrow (1) \cdot \ln(1) - 1 + K = 0$** , de donde $K = 1$, luego **$f'(x) = x \cdot \ln(x) - x + 1$** .

Análogamente **$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x \cdot \ln(x) - x + 1) dx = \int (x \cdot \ln(x)) dx - \int x dx + \int 1 dx = I_1 - x^2/2 + x + L$** .

$I_1 = \int x \cdot \ln(x) dx$, es también integral por partes $\{u = \ln(x) \rightarrow du = dx/x; dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = x^2/2\}$

$I_1 = \int x \cdot \ln(x) dx = (x^2/2) \cdot \ln(x) - \int (x^2/2) \cdot (dx/x) = (x^2/2) \cdot \ln(x) - (1/2) \int (x \cdot dx) = (x^2/2) \cdot \ln(x) - (1/2)(x^2/2) = (x^2/2) \cdot \ln(x) - (1/4)(x^2)$. Por tanto:

$f(x) = I_1 - x^2/2 + x + L = (x^2/2) \cdot \ln(x) - (1/4)(x^2) - x^2/2 + x + L = (x^2/2) \cdot \ln(x) - (3/4)(x^2) + x + L$.

Como **$f(1) = 2 \rightarrow 2 = (1^2/2) \cdot \ln(1) - (3/4)(1^2) + 1 + L = 0 - 3/4 + 1 + L = 2$** , de donde tenemos

que **$L = 7/4$** , y la función pedida es **$f(x) = (x^2/2) \cdot \ln(x) - (3/4)(x^2) + x + 7/4$** .

Ejercicio 3 opción B, modelo 4 Junio 2015

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$.

(a) [1'5 puntos] Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

(a) [1 punto] Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$.

(a)

Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

A como máximo tiene rango 2 y B como máximo tiene rango 3.

Estudiamos A

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = -m - 4.$$

Si $|A| = 0 \rightarrow -m - 4 = 0$, de donde $m = -4$.

Si $m \neq -4$, $\det(A) \neq 0$ y **rango (A) = 2**.

Si $m = -4$, $\det(A) = 0$ y **rango (A) = 1**, porque tiene algún elemento distinto de cero..

Estudiamos B

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{array} = m(m+4).$$

Si $|B| = 0 \rightarrow m \cdot (m+4) = 0$, de donde $m = 0$ y $m = -4$.

Si $m \neq 0$ y $m \neq -4$, $\det(B) \neq 0$ y **rango (B) = 3**.

$$\text{Si } m = 0, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y como } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ tenemos } \mathbf{rango (B) = 2}.$$

$$\text{Si } m = -4, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 + 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \text{ y como me han quedado dos filas de la matriz}$$

con elementos distinto de cero, tenemos **rango (B) = 2**.

Luego para $m = 0$ tenemos rango(A) = rango(B) = 2,

(Me la ha comentado D. Javier García Gómez).

(a)

Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

Ya hemos calculado los determinantes de A y B .

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = -m - 4 \text{ y } \det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{array} = m(m+4).$$

Nos están pidiendo valores de m con $\det(A) = \det(B)$, es decir $-m - 4 = m(m+4)$. Pasándolo todo a un miembro $0 = (m+4) + m(m+4) = (1+m) \cdot (m+4)$, de donde $m = -1$ y $m = -4$.

Por tanto si $m = -1$ y $m = -4$ tenemos que $\det(A) = \det(B)$.

Ejercicio 4 opción B, modelo 4 Junio 2015

Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$.

(a) [1'5 puntos] Calcula el punto P' , simétrico del punto $P(2, -1, 5)$ respecto del plano π .

(b) [1 punto] Calcula la recta r' , simétrica de la recta $r \equiv (x-2)/(-2) = (y+1)/3 = (z-5)/1$ respecto del plano π .

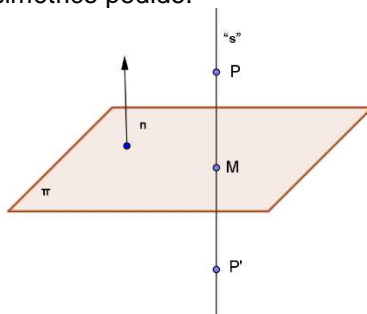
Solución

Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$.

(a)

Calcula el punto P' , simétrico del punto $P(2, -1, 5)$ respecto del plano π .

Calculamos la recta "s" perpendicular (\perp), al plano π (el vector director \mathbf{u} de la recta "s" es el vector normal \mathbf{n} del plano π) por el punto P. Determinamos $M = s \cap \pi$, y M es el punto medio del segmento PP' , donde P' es el simétrico pedido.



$s(P; \mathbf{u}) = s(P; \mathbf{n})$ con $P(2, -1, 5)$ y $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$.

Su ecuación vectorial es $s \equiv (x, y, z) = (2+2b, -1+b, 5-b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

$M = s \cap \pi \rightarrow 2(2+2b) + (-1+b) - (5-b) + 8 = 0 = 6b+6$, de donde $\mathbf{b} = -1$, y el punto M es $M(2+2(-1), -1+(-1), 5-(-1)) = M(0, -2, 6)$.

M es el punto medio del segmento PP' , donde P' es el simétrico pedido.

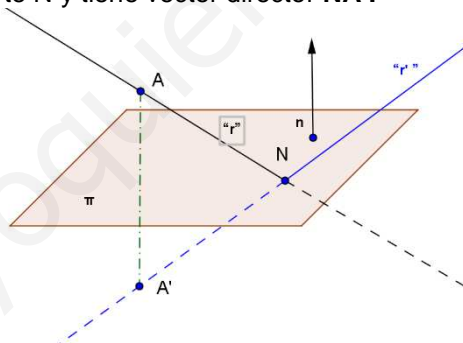
$(0, -2, 6) = ((2+x)/2, (-1+y)/2, (5+z)/2)$, de donde $x = -2$, $y = -4+1 = -3$, $z = 12-5 = 7$.

El simétrico pedido es $P'(-2, -3, 7)$.

(b)

Calcula la recta r' , simétrica de la recta $r \equiv (x-2)/(-2) = (y+1)/3 = (z-5)/1$ respecto del plano π .

Para calcular la recta r' , simétrica de la recta r , se calcula el punto de corte N de r con π , el punto A' simétrico del punto $A(2, -1, 5)$ de la recta r respecto al plano π . La recta r' pedida es la que pasa por el punto de corte N y tiene vector director \mathbf{NA}' .



Si nos damos cuenta ya hemos calculado el simétrico del punto $(2, -1, 5)$, que antes se le ha llamado P, luego A' es $A'(-2, -3, 7)$.

Ponemos r en vectorial $r \equiv (x, y, z) = (2-2c, -1+3c, 5+c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

$N = r \cap \pi \rightarrow 2(2-2c) + (-1+3c) - (5+c) + 8 = 0 = -2c + 6$, de donde $c = 3$ y el punto N es $N(2-2(3), -1+3(3), 5+(3)) = N(-4, 8, 8)$

La recta r' es $r'(N; \mathbf{NA}')$ con $N(-4, 8, 8)$ y $\mathbf{NA}' = (-2-(-4), -3-(8), 7-8) = (2, -11, -1)$.

La recta es $r' \equiv (x+4)/2 = (y-8)/(-11) = (z-8)/(-1)$