Opción A

Ejercicio 1 opción A, Junio 2018 (modelo 1)

[2'5 puntos] Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ tiene en x = 1 un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto (1,1).

Solución

Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de derivada nula en $x = 1$ que no es extremo relativo x = 1, es un punto de inflexión, luego tenemos f '(1) = 0 y además f ''(1) = 0, porque los puntos de inflexión anulan la segunda derivada (en funciones que admitan segunda derivada, como es nuestro caso pues al ser un función polinómica admite infinitas derivadas). También el problema nos dice que f(1) = 1, al pasar la gráfica de f por el punto (1,1).

Tenemos:
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
$f''(x) = 6x + 2a$

De f ''(1) = 0 tenemos 0 = 6 + 2a, luego **a = - 3.**
De f'(1) = 0 tenemos 0 = 3 +2(-3) + b, luego **b = 3.**
De f(1) = 1 tenemos 1 = 1 + (-3) + (3) + c , luego **c = 0.**

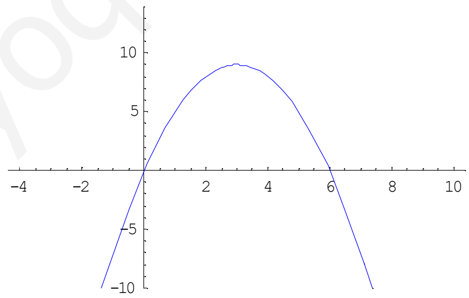
Los coeficientes pedidos son a = -3, b = 3 y c = 0 y la función será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

Ejercicio 2 opción A, Junio 2018 (modelo 1)

Considera las funciones f y g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = |x^2 - 2x|$.
(a) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula sus puntos de corte de dichas gráficas.
(b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución

(a)
La gráfica de $f(x) = 6x - x^2$ (a = -1, b = 6, c = 0), es la de una parábola con las ramas hacia abajo (a = -1<0), abscisa del vértice en x = -b/2a = -6/-2 = 3, y ordenada en $f(3) = 6(3) - (3)^2 = 9$ [V = (3,9)].
Cortes con los ejes en:
Para x = 0, $f(0) = 6(0) - (0)^2 = 0$. Punto (0,0), corte con OY.
Para f(x) = 0, $6(x) - (x)^2 = 0 = x(6 - x)$, de donde x = 0 y x = 6. Puntos (0,0) y (6,0), corte con OX.
Un esbozo de su gráfica es

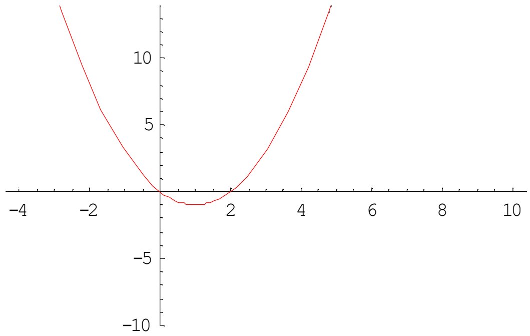


La gráfica de $g(x) = |x^2 - 2x|$.

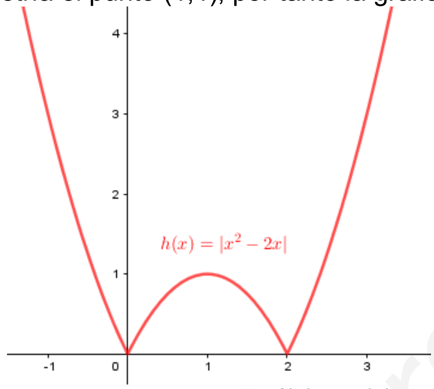
Primero calculamos la gráfica de $h(x) = x^2 - 2x$.

Una vez realizada su valor absoluto tiene la misma gráfica si h(x) > 0, la parte que hay por encima del eje OX, y es simétrica respecto al eje OX si h(x) < 0, la parte que hay por debajo del eje OX.

La gráfica de $h(x) = x^2 - 2x$ (a = 1, b = -2, c = 0), es la de una parábola con las ramas hacia arriba (a = 1>0), abscisa del vértice en x = -b/2a = 2/2 = 1, y ordenada en $h(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$ [V = (1,-1)].
Cortes con los ejes en:
Para x = 0, $h(0) = (0)^2 - 2(0) = 0$. Punto (0,0), corte con OY.
Para h(x) = 0, $(x)^2 - 2(x) = 0 = x(x - 2)$, de donde x = 0 y x = 2. Puntos (0,0) y (2,0), cortes con OX.
Un esbozo de su gráfica es



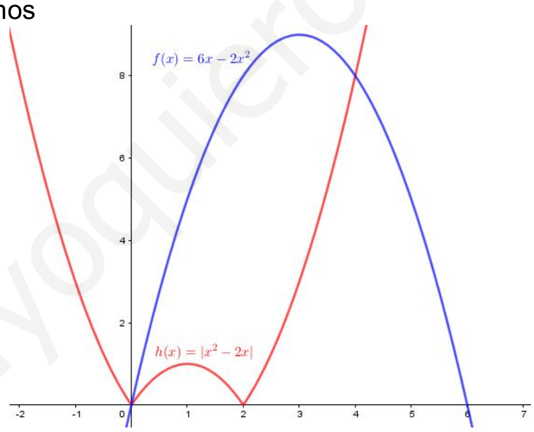
La gráfica de $g(x) = |x^2 - 2x|$, es exactamente igual en los intervalos $(-\infty,0)$ y en $(2,+\infty)$. Al vértice de $h(x)$, punto $(1,-1)$, le corresponde por simetría el punto $(1,1)$; por tanto la gráfica de $g(x)$ es:



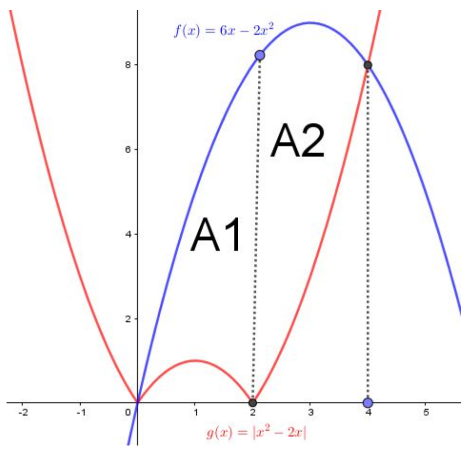
Para calcular sus puntos de corte resolvemos la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir $6x - x^2 = x^2 - 2x$ (Sólo tomamos la parte que hay encima del eje OX, pues a la otra no la corta, salvo en el punto $(0,0)$).

De $6x - x^2 = x^2 - 2x$, tenemos $2x^2 - 8x = 0 = x(2x - 8)$, luego $x = 0$ y $x = 4$. Puntos $(0,0)$ y $(4,8)$.

Juntando ambas gráficas tenemos



(b)
Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.



Observando las gráficas el área que me están pidiendo es: A1 + A2.

Abriendo el valor absoluto, tenemos: $g(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ -(x^2 - 2x) & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

Área A1 $= \int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 ((6x - x^2) + (x^2 - 2x))dx = \int_0^2 (4x)dx = \left[\frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = [(2\cdot 2^2) - (0)] = 8\ u^2$.

Área A2 $= \int_2^4 (f(x) - g(x))dx = \int_2^4 ((6x - x^2) - (x^2 - 2x))dx = \int_2^4 (-2x^2 + 8x)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2\right]_2^4 =$

$= \left(\frac{-2(4)^3}{3} + 4(4)^2\right) - \left(\frac{-2(2)^3}{3} + 4(2)^2\right) u^2 - (0) = 32/3\ u^2$.

Área pedida =Área A1 + Área A2 = $(8 + 32/3)\ u^2 = 56/3\ u^2$.

Ejercicio 3 opción A, Junio 2018 (modelo 1)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$

a) [1'75 puntos] Discútelo según los valores del parámetro "m".
b) [0'75 puntos] Resuelve el sistema para m = -2.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + z = 3m \\ 2x + 4y + 3(m+1)z = 8 \end{cases}$

a)
Discútelo según los valores del parámetro "m".

Matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{pmatrix}$, matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3m \\ 2 & 4 & 3m+3 & 8 \end{pmatrix}$.

Tenemos $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3m+3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{matrix} = (m+3)\cdot(2) - (1)\cdot(0) + (3m+3)\cdot(-1) = 2m+6-3m-3 = -m + 3$.

De $\det(A) = 0 \rightarrow -m + 3 = 0$, de donde m = 3.

Si m ≠ 3, det(A) ≠ 0, rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, **sistema compatible y determinado, y tiene solución única.** Por el Teorema de Rouche.

Si m = 3, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 12 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$, rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2\cdot F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (1)(-1)\cdot(2) = -2 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 ≠ rango(A*) = 3**, el **sistema es incompatible y no tiene solución**. Por el Teorema de Rouche.

b)
Resuelve el sistema para m = -2.

Hemos visto en el apartado (a) que si m ≠ 3, *rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas, sistema compatible y determinado, y tiene solución única, por el Teorema de Rouche*. Por tanto para m = -2 el sistema tiene una solución única. Vamos a calcularla.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y + z = -6 \\ 2x + 4y - 3z = 8 \end{cases} \begin{matrix}\text{Cambio} \\ \text{fila1 por} \\ \text{fila 2}\end{matrix} \approx \begin{cases} x + y + z = -6 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x + 4y - 3z = 8 \end{cases} \begin{matrix} \\ F_2\text{-}F_1 \\ F_3\text{-}2\cdot F_1\end{matrix} \approx \begin{cases} x + y + z = -6 \\ y = 9 \\ 2y - 5z = 20 \end{cases}.$$

Tenemos **y = 9**, 2(9) -5z = 20 → -2 = 5z →**z = -2/5**. Entrando en la 1ª x + 9 – 2/5 = -6 →**x = -73/5.**
La solución única del sistema, para m = -2, es (x, y, z) = (-73/5, 9, -2/5).

Ejercicio 4 opción A, Junio 2018 (modelo 1)

Considera los puntos P(1,0,-1), Q(2,1,1) y la recta "r" dada por $x - 5 = y = \dfrac{z+2}{-2}$.

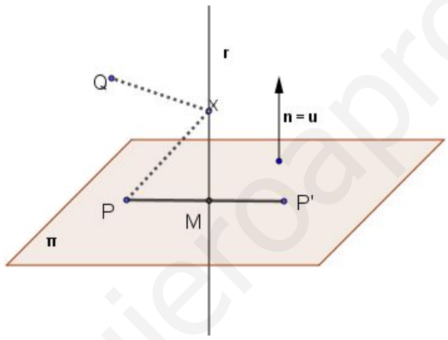
(a) [1'25 puntos] Determina el punto simétrico de P respecto a "r".
(b) [1'25 puntos] Calcula el punto de "r" que equidista de P y Q.

Solución

Considera los puntos P(1,0,-1), Q(2,1,1) y la recta "r" dada por $x - 5 = y = \dfrac{z+2}{-2}$.

(a)
Determina el punto simétrico de P respecto a "r".

De la recta "r", tomamos el punto el A(5, 0, -2) y un vector director de "r" es **u** = (1,1,-2).
El siguiente dibujo nos servirá para los dos apartados.



Calculamos la proyección ortogonal M, de P sobre "r", para lo cual obtenemos el plano "π" perpendicular a la recta "r" por el punto P, el vector normal del plano **n** es el vector director de la recta **u** =(1,1,-2).
π ≡ **PX•n** = 0 = (x-1,y-0,z+1)•(1,1,-2) = x-1+y-2z - 2 = 0 = x + y – 2z - 3 = 0, donde • es el producto escalar de dos vectores.

Calculamos el punto de corte M (es la proyección) del plano "π" con la recta "r"$\equiv \begin{cases} x = 5 + b \\ y = \quad b \\ z = -2 - 2b \end{cases}$ con b∈ R,

sustituyendo la recta en el plano:

(5 + b) + (b) – 2(-2 - 2b) - 3 = 0 → 6 + 6b = 0 → b = -1.

El punto proyección M es M(5 + (-1), (-1), -2 – 2(-1)) = M(4,-1,0).

El punto simétrico P'(x,y,z) se calcula sabiendo que el punto proyección M es el punto medio del segmento PP'.

(4,-1,0) = ((x+1)/2,(y+0)/2,(z-1)/2), de donde:
4 = (x+1)/2 → x = 7.
-1 = y/2 → y = -2.
0 = (z-1)/2 → z = 1.

El simétrico P' de P respecto a la recta "r" es P'(7, -2, 1).
(b)
Calcula el punto de "r" que equidista de P y Q.

Tenemos los puntos P(1,0,-1), Q(2,1,1) y la la recta "r" $\equiv \begin{cases} x = 5 + b \\ y = \quad b \\ z = -2 - 2b \end{cases}$ con $b \in R$

Tomamos un punto genérico de la recta "r", el X(5+b, b, -2-2b), y le imponemos la condición de ser equidistantes, es decir: d(P,X) = d(Q,X)

PX = (5+b- 1, b-0, -2-2b+1) = (4+b, b, -1-2b). **QX** = (5+b-2, b-1, -2-2b-1) = (3+b, b-1, -3-2b)

d(P,X) = $\sqrt{(4+b)^2+(b)^2+(-1-2b)^2}$; d(Q,X) = $\sqrt{(3+b)^2+(b-1)^2+(-3-2b)^2}$

Igualando, elevando al cuadrado y desarrollando obtenemos:

$16+ 8b + b^2 + b^2+ 1 + 4b + 4b^2 = 9 + 6b + b^2+ b^2 – 2b + 1 + 9 + 12b + 4b^2$, de donde 12b + 17 = 16b + 19, con lo cual -4b = 2, y por tanto **b = -1/2**, y el punto X de la recta "r" que equidista de P y Q es:

X(5+(-1/2), (-1/2), -2-2(-1/2)) = **X(9/2, -1/2, -1)**.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, Junio 2018 (modelo 1)

[2'5 puntos] Determina $k \neq 0$ sabiendo que la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3 - kx^2 & \text{si } x \le 1, \\ \dfrac{2}{kx} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es derivable.

Solución

Como la función f es derivable en todo su dominio lo es también en x = 1, y por tanto como las funciones derivables son continuas, también es continua en x = 1. Utilizaremos estas dos condiciones para calcular k.

Como es continua en x = 1 tenemos $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$.

$f(1) = 3 – k(1)^2 = 3 – k$.
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3 – k(x)^2) = 3 – k(1)^2 = 3 – k$.
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2/kx) = 2/k$.

Igualando tenemos $(3 – k) = 2/k$, de donde $3k –k^2 = 2$, luego $k^2 – 3k + 2 = 0$. Resolviéndola tenemos:
$k = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$, es decir nos queda **k = 1 y k = 2**.

Como es derivable

$f'(x) = \begin{cases} -2kx & \text{si } x \le 1, \\ \dfrac{-2}{kx^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$

Como es derivable en x = 1, tenemos que $f'(1^+) = f'(1^-)$. Estudiamos la continuidad de la derivada.

$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (-2/kx^2) = -2/k$
$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-2kx) = -2k$

Igualando tenemos -2k = -2/k, es decir $k^2 = 1$, de donde **k = ± 1.**

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, el único resultado posible es k = 1

Ejercicio 2 opción B, Junio 2018 (modelo 1)

Considera las funciones f y g : $R \to R$ definidas por $g(x) = -\dfrac{x^2}{4}$ y $f(x) = 3 – x^2$.

(a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = 1 y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.
(b) [0'75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta y = 4 – 2x y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).
(c) [0'75 punto] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución

(a)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3 – x^2$ en el punto de abscisa x = 1.

Recta tangente en x = 1 es $y - f(1) = f'(1)\cdot(x - 1)$
$f(x) = 3 – x^2$; luego $f(1) = 3 – (1)^2 = 2$.
$f'(x) = - 2x$, luego $f'(1) = -2(1) = - 2$.
La recta tangente pedida es $y - 2 = - 2\cdot(x - 1)$, luego **la recta tangente pedida es $y = -2x +4$**. Observar que es la recta que nos dan en el apartado (b).

Para comprobar que es tangente a la gráfica de g, observamos que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f es $y' = -2$, y que la pendiente genérica de g es $g'(x) = - 2x/4 = - x/2$.

Igualando pendientes tenemos "$– 2 = -x/2$", donde **x = 4, que es la abscisa donde la recta y = -2x +4 es tangente a la gráfica de g.**

El punto de tangencia de la recta y = -2x +4 con la gráfica de g es (4, g(4)) = (4, -4).
(b)
Esboza el recinto limitado por la reecta y = 4 – 2x y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

La gráfica de la recta "y = -2x + 4" se obtiene con dos puntos, y los tenemos pues son los puntos de tangencia con las gráficas de f y g, es decir los puntos (1,2) y (4,-4)

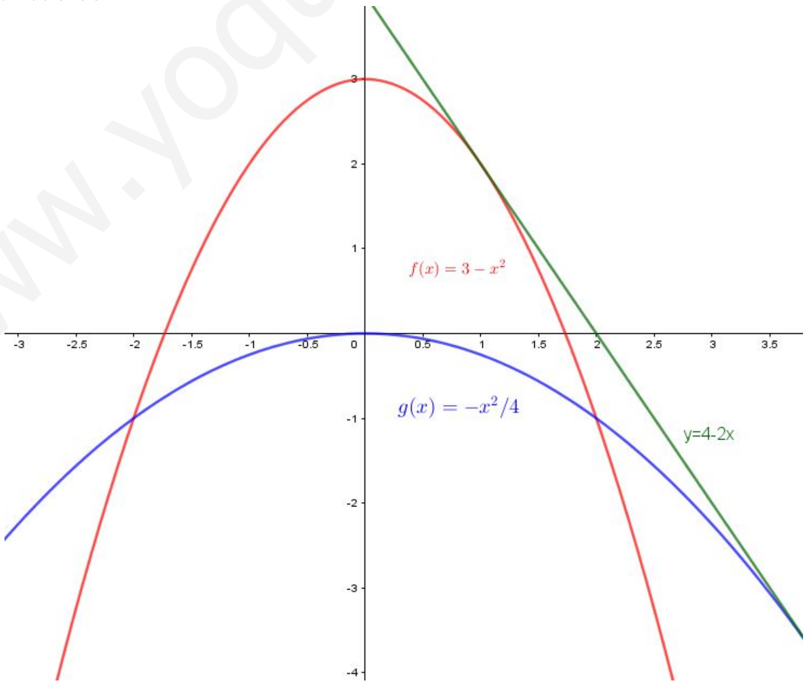
La gráfica de $g(x) = - x^2/4$ es la de una parábola con las ramas hacia abajo (∩) porque el nº que multiplica a x^2 es negativo, abscisa del vértice en la solución de $g'(x) =0= -2x/4$, de donde x = 0 y el vértice es V(0,g(0)) = (0,0). Ya sabemos que pasa por el punto de tangencia (4, -4).

La gráfica de $f(x) = 3 - x^2$es la de una parábola con las ramas hacia abajo (∩) porque el nº que multiplica a x^2 es negativo, abscisa del vértice en la solución de $f'(x) = 0 = -2x$, de donde x = 0 y el vértice es V(0,f(0)) = = (0,3). Ya sabemos que pasa por el punto de tangencia (1,2).

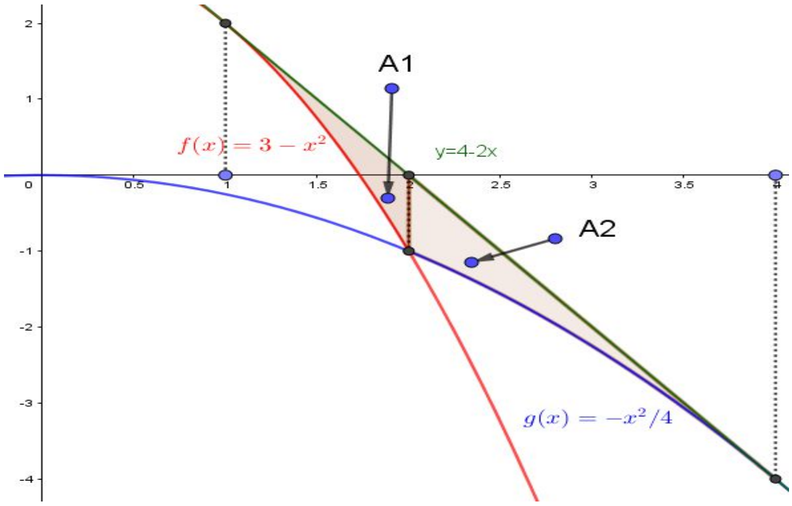
Los puntos de corte de ambas curvas se obtienen resolviendo la ecuación g(x) = f(x), es decir $-x^2/4=3-x^2$.

Tenemos $-x^2 = 12 - 4x^2$, es decir $3x^2 = 12$, de donde $x = \pm\sqrt{(4)} = \pm 2$, por tanto los puntos de corte de ambas parábolas son (-2,-1) y (2,-1).

Un esbozo de las gráficas es



(c)
Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.



Si observamos la gráfica, nos piden el área A1 + A2.

Área A1 = $\int_1^2 (y - f(x))dx = \int_1^2 ((4 - 2x) - (3 - x^2))dx = \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^2 =$

$= \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1\right)$ u^2 = 1/3 u^2.

Área A2= $\int_2^4 (y - g(x))dx = \int_2^4 ((4 - 2x) - (-x^2/4))dx = \int_2^4 (x^2/4 - 2x + 4)dx = \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_2^4 =$

$= \left(\frac{4^3}{12} - 4^2 + 16\right) - \left(\frac{2^3}{12} - 2^2 + 8\right)$ u^2 = 2/3 u^2.

Área pedida =Área A1 + Área A2 = (1/3 + 2/3)u^2 = 1 u^2.

Ejercicio 3 opción B, Junio 2018 (modelo 1)

(a) [1'5 puntos]Justifica que es posible un pago de 34'50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- ♦ utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
- ♦ se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
- ♦ tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuantas maneras y con cuantas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

(b) [1 punto]Si se redondea la cantidad a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

Solución

(a) [1'5 puntos]Justifica que es posible un pago de 34'50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- ♦ utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
- ♦ se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
- ♦ tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuantas maneras y con cuantas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

x = Número de monedas de 50 céntimos= Número de monedas de 0'5 euros.
y = Número de monedas de 1 euro.
z = Número de monedas de 2 euros.

No podemos olvidar que las soluciones tienen que ser números enteros positivos, pues no existe media moneda de 50 céntimos, ….

De "utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros"
$\rightarrow$ 0'5x + 1y + 2z = 34'50 (pago total). Multiplicando por 2 $\rightarrow$ x + 2y + 4z = 69
De "se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas"
$\rightarrow$ x + y + z = 30 (total de monedas)
De "tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas"
$\rightarrow$ y = x + z. Pasándolo a un miembro $\rightarrow$ -x + y - z = 0

Intentamos resolver el sistema $\begin{cases} x\ +y\ +\ z = 30 \\ x + 2y + 4z = 69\ \ (F_2 - F_1) \\ -x\ +\ y\ -z\ = 0\ \ \ (F_3 + F_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x\ +y\ +\ z = 30 \\ \quad\ \ y + 3z = 39 \\ \quad\ \ 2y\quad\ \ = 30 \end{cases}$

De 2y = 30. Tenemos **y = 15.**
Entrando en la 2ª ecuación, (15) + 3z = 39, es decir 3z = 24, luego **z = 8.**
Entrando en la 1ª ecuación, x + (15) + (8) = 30, de donde **x = 7.**

La solución es (x, y, z) = (7, 15, 8), es decir "hay una sola manera de efectuar el pago de los 34'50 euro y es, utilizando 7 monedas de 50 céntimos, 15 monedas de un euro y 7 monedas de 2 euros".
(b)
[1 punto]Si se redondea la cantidad a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

Teniendo en cuenta el apartado (a), tenemos:

De "utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros"
$\rightarrow$ 0'5x + 1y + 2z = 35 (pago total). Multiplicando por 2 $\rightarrow$ x + 2y + 4z = 70
De "se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas"
$\rightarrow$ x + y + z = 30 (total de monedas)
De "tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas"
$\rightarrow$ y = x + z. Pasándolo a un miembro $\rightarrow$-x + y - z = 0

Intentamos resolver el sistema $\begin{cases} x\ +y\ +\ z = 30 \\ x + 2y + 4z = 70\ \ (F_2 - F_1) \\ -x\ +\ y\ -z\ = 0\ \ \ (F_3 + F_1) \end{cases} \approx \begin{cases} x\ +y\ +\ z = 30 \\ \quad\ \ y + 3z = 40 \\ \quad\ \ 2y\quad\ \ = 30 \end{cases}$

De 2y = 30. Tenemos **y = 15.**
Entrando en la 2ª ecuación, (15) + 3z = 40, es decir 3z = 25, luego **z = 25/3 ≅8'33, que <u>no es un número entero de monedas de dos euros</u>.**
Entrando en la 1ª ecuación, x + (15) + (25/3) = 30, de donde **x = 20/3 ≅ 6'66, que <u>no es un número entero de monedas de 50centimos</u>.**

La solución matemática es (x, y, z) = (20/3, 15, 25/3), luego <u>no es posible efectuar el pago de 35 euros con las mismas restricciones del apartado (a), puesto que el número monedas es un número entero positivo, no un número racional decimal periódico</u>.

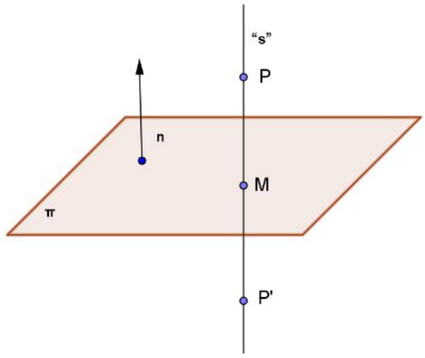
Ejercicio 4 opción B, Junio 2018 (modelo 1)

Considera el punto P(2,-1,3) y el plano π de ecuación 3x +2y + z = 5.
(a) [1'75 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de π.
(b) [0'75 puntos] Calcula la distancia de P a π.

Solución

Considera el punto P(2,-1,3) y el plano π de ecuación 3x +2y + z = 5.
(a)
[1'75 puntos] Halla el simétrico del punto P respecto al plano π.

Tenernos que obtener la proyección ortogonal M de P sobre π, para lo cual calculamos la recta "s" perpendicular ($\perp$), al plano π (el vector director **u** de la recta "s" es el vector normal **n** del plano π) por el punto P. Determinamos el punto proyección M = s$\cap\pi$, y la proyección M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido.



Del plano $\pi \equiv$ 3x +2y + z = 5, tenemos su vector normal **n** = (3, 2, 1).

La recta $\perp$ es "s(P;**u**)" = s(P;**n**) con P(2, -1, 3) y **n** = (3, 2, 1).

Su ecuación vectorial es s $\equiv$ (x,y,z) = (2+3b, -1+2b, 3+b) con b $\in$ R.

M = s$\cap\pi$, sustituimos la ecuación de la recta en el plano y obtenemos el parámetro "b", y luego el punto M.

3(2+3b) +2(-1+2b) + (3+b) = 5, de donde 6 + 9b – 2 + 4b + 3 +b = 5, luego 14b = -2, por tanto **b = -1/7** y el punto M es M(2+3(-1/7), -1+2(-1/7), 3+(-1/7)) = M(11/7,-9/7,20/7).

M es el punto medio del segmento PP', donde P' es el simétrico pedido.

(11/7,-9/7,20/7) = ((2+x)/2,(-1+y)/2,(3+z)/2), de donde:

11/7 = (2+x)/2, es decir **x =** 22/7 - 2 = **8/7.**
-9/7 = (-1+y)/2, es decir **y =** -18/7 + 1 = **-11/7.**
20/7 = (3+z)/2), es decir **z =** 40/7 - 3 = **19/7.**

El simétrico pedido es P'(8/7, -11/7, 19/7).
(b)
[0'75 puntos] Calcula la distancia de P a π.

Por la construcción realizada d(P;π) = d(P,M) = **||PM||**
P(2,-1,3), M(11/7, -9/7, 20/7), **PM** = (11/7 - 2, -9/7 + 1, 20/7 - 3) = (-3/7, -2/7, -1/7), luego la distancia pedida es **d(P;π) = d(P,M) = ||PM||** = $\sqrt{(3/7)^2+(2/7)^2+(1/7)^2}\ u^1$ **= $\sqrt{14}/7$ u = 0'5352 u^1.**

También se puede realizar por la fórmula $d(P;\pi) = \dfrac{|a(x_0) + b(y_0) + c(z_0) + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, siendo P el punto de coordenadas $P(x_0, y_0, z_0)$ y π el plano ax + by + cz + d = 0.

En nuestro caso P(2,-1,3) y el plano π de ecuación 3x +2y + z = 5, es decir 3x +2y + z – 5 = 0. Luego:

$$\mathbf{d(P;\pi) =} \frac{|3(2) + 2(-1) + (3) - 5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}\ u^1 = \frac{|2|}{\sqrt{14}}\ u^1 = \frac{2\cdot\sqrt{14}}{14}\ u^1 = \frac{\sqrt{14}}{7}\ u^1$$