FÍSICA - CONTROL DE MECÁNICA

CUESTIONES *(1 punto)*

1.- Imagina que una bola está botando una y otra vez, sobre un muelle, sin rozamientos. Realiza un análisis detallado desde el punto de vista energético, incidiendo en los trabajos realizados por la gravedad y el muelle.

(1 punto)

2.- Una partícula se mueve según la ecuación vectorial: $\vec{r} = -2t\hat{i} + \hat{j} - 3t^2\hat{k}$. Estudia dicho movimiento y clasifícalo. Obtén la expresión explícita de la trayectoria.

(1 punto)

3.- Demuestra que la velocidad con que desliza un cuerpo, por un plano inclinado con rozamiento, no depende de la masa del objeto. Indica de qué factores depende.

(1 punto)

4.- Define qué es el momento angular. Deduce su ecuación de dimensiones y su unidad en S.I.

(1 punto)

PROBLEMAS *(3 puntos)*

5.- Una bola de 200 g se mueve en línea recta a 36 km/h, sin rozamiento. Si sobre ella actúa una fuerza de 1 N durante dos segundos, en dirección perpendicular al movimiento, calcula:

a) La velocidad y rapidez de la bola después del impulso, y el ángulo que forma la nueva dirección de movimiento con la dirección inicial.
b) El trabajo realizado por esa fuerza en los dos segundos que actúa.

6.- Un bloque de 4 kg de masa viene deslizando por una superficie horizontal que se continúa con otra superficie inclinada 30º. El coeficiente de rozamiento dinámico con ambas superficies es 0,15. Cuando el cuerpo se encuentra a 3 m del punto donde comienza el plano inclinado lleva una rapidez de 5 m/s. Calcula:

a) El valor de las fuerzas de rozamiento en el plano horizontal y en el plano inclinado.
b) La altura máxima que alcanza el bloque.
Dato: g= 10 $m \cdot s^{-2}$

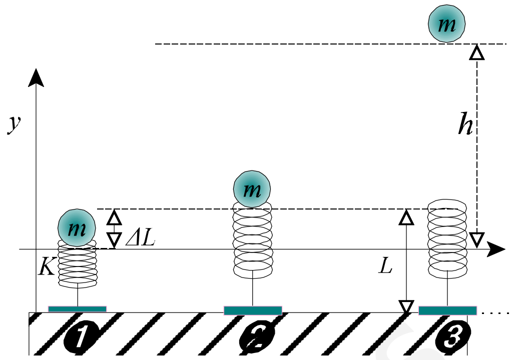
7.- Dada la fuerza: $\vec{F} = -2x\hat{i} + 10\hat{j}$; se desea saber el trabajo que realiza al actuar sobre un cuerpo que se mueve desde el punto (2,0) al (4,6) en línea recta.

a) Calcúlalo y razona si crees que se tratará de una fuerza conservativa
b) Suponiendo que el cuerpo poseía una masa de 100 g y velocidad inicial nula, ¿qué velocidad alcanzará al final del recorrido?

NOTA: *Elige dos problemas de los tres propuestos. Recuerda que los problemas hay que explicarlos. Cuida el orden en la exposición, la limpieza y la ortografía.*

SOLUCIONES - MECÁNICA 1ª Evaluación

1.- Imagina que una bola está botando una y otra vez, sobre un muelle, sin rozamientos. Realiza un análisis detallado desde el punto de vista energético, incidiendo en los trabajos realizados por la gravedad y el muelle.



Para afrontar el estudio de este caso partamos, como inicio, de la situación en la que la bola se encuentran comprimiendo al máximo al muelle. Como la energía es algo relativo partamos de que la energía potencial gravitatoria de la bola ahí es O, es decir, tomamos esa posición como origen de alturas.

Las fuerzas que intervienen son, ambas, conservativas, con lo que la energía se conservará a lo largo de las oscilaciones de la bola. La situación, que puede desglosarse en tres situaciones que se repiten, queda representada en la figura.

En ❶, toda la energía sería potencial elástica (ya que hemos considerado que esa posición era el origen de energía potencial gravitatoria). Aquí: $E_1 = \frac{1}{2} \cdot K\,\Delta L^2$

El muelle realiza un trabajo al recuperar su forma, de modo que toda la energía E_1 la transfiere a la bola como energía cinética y algo de altura ($E_{p,grav}$). Entonces en ❷, ocurre que: $E_2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + mg\Delta L$

A partir de aquí la masa queda a merced de la fuerza gravitatoria que realiza un trabajo de oposición al ascenso, por lo que mermará la E_c hasta anularla pero toda esa energía, que no se pierde, queda acumulada en ❸ en forma de energía potencial gravitatoria: $E_3 = mgh$.

A la caída se repetirán las posiciones ❷ (donde ahora toda la energía vuelve a ser casi toda cinética) y ❶ (donde la energía queda almacenada como energía potencial elástica)

Así pues, se cumple que en todo instante la energía mecánica total se conserva:

$$E_1 = E_2 = E_3 \Rightarrow \frac{1}{2} K \cdot \Delta L^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 + mg\Delta h = m \cdot g \cdot h$$

2.- Una partícula se mueve según la ecuación vectorial: $\vec{r} = -2t\hat{i} + \hat{j} - 3t^2\hat{k}$ ***. Estudia dicho movimiento y clasifícalo. Obtén la expresión explícita de la trayectoria.***

Para catalogar el movimiento necesitamos las expresiones de velocidad y aceleración, que obtenemos por derivación:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\hat{i} - 6t\hat{k} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = -6\hat{k} \end{aligned}\right\} \text{ Se trata de un MUA, por ser constante la aceleración.}$$

La ecuación explícita de la trayectoria la obtenemos al eliminar t de las expresiones paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= -2t \\ z &= -3t^2 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

despejando t de la primera: $t = -\frac{x}{2}$

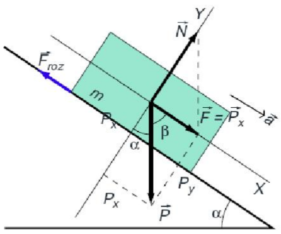
y sustituyendo en la segunda: $z = -3 \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow z = -\frac{3}{4}x^2$

El movimiento se da en un plano (y cte), correspondiendo la trayectoria a una parábola. Se trata *por tanto, de un movimiento parabólico uniformemente acelerado.*

3.- Demuestra que la velocidad con que desliza un cuerpo, por un plano inclinado con rozamiento, no depende de la masa del objeto. Indica de qué factores depende.

La dinámica queda determinada por la 2ª ley de Newton, según la cual:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



El diagrama adjunto explicita las fuerzas actuantes. En la dirección de movimiento tenemos la componente P_x a favor de la caída y la fuerza de rozamiento F_{roz} en contra. Si asignamos, como criterio de signos, valores positivos a la dirección de la pendiente, tenemos que:

$$\vec{P}_x + \vec{F}_{roz} = m \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\vec{P}_x + \vec{F}_{roz}}{m} \quad [1]$$

$$como: \begin{cases} P_x = mg \cdot sen\alpha \\ P_y = mg \cdot \cos\alpha \\ F_{roz} = \mu \cdot N = \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Sustituyendo esos módulos en [1] y aplicando el criterio de signos, tenemos:

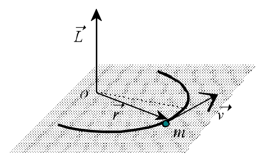
$$a = \frac{\cancel{m} g \cdot sen\alpha - \mu \cdot \cancel{m} g \cdot \cos\alpha}{\cancel{m}} = \underline{g \cdot (sen\alpha - \mu \cos\alpha)}$$

En el resultado final obtenido se observa que m no interviene. La aceleración de caída será directamente proporcional a la gravedad del planeta. A mayor ángulo y menor coeficiente de rozamiento mayor aceleración de caída.

4.- Define qué es el momento angular. Deduce su ecuación de dimensiones y su unidad en S.I.

Se define el momento angular $\vec{L}$ de una partícula de masa m animada con una velocidad lineal $\vec{v}$ (por tanto, con una cantidad de movimiento $\vec{p}$) respecto a un punto O, como el momento del vector cantidad de movimiento respecto a O. Es decir:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$



Esta definición, subraya el carácter vectorial de dicha magnitud. De modo que $\vec{L}$ es un vector perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$, cuyo sentido puede deducirse con la regla del sacacorchos.

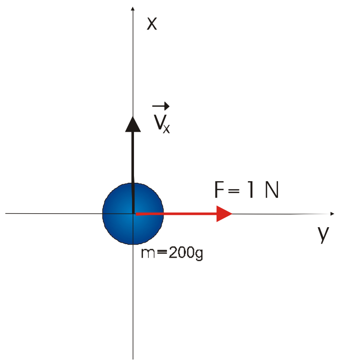
La ecuación de dimensiones será, por tanto:

$$[L] = [r] \cdot [m \cdot v] = L \cdot M \cdot LT^{-1} = ML^2T^{-1}$$

Y la unidad que corresponderá en S.I. será el: $kg \cdot m^2 s^{-1}$

5.- Una bola de 200 g se mueve en línea recta a 36 km/h, sin rozamiento. Si sobre ella actúa una fuerza de 1 N durante dos segundos, en dirección perpendicular al movimiento, calcula:

> ***a) La velocidad y rapidez de la bola después del impulso, y el ángulo que forma la nueva dirección de movimiento con la dirección inicial.***
>
> ***b) El trabajo realizado por esa fuerza en los dos segundos que actúa.***



a $\quad \vec{v}_0 = 10\hat{i}\ \frac{m}{s}$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \begin{cases} v_x = 10 m/s \\ v_y = at = \dfrac{1N}{0,2kg} \cdot t = 5t \end{cases}$$

$$Y\ de\ ahí,\ las\ ecuaciones\ de\ movimiento,\ por\ ejes,\ serán: \begin{cases} x = 10t \\ y = \dfrac{1}{2}at^2 = 2,5t^2 \end{cases}$$

El movimiento puede estudiarse por componentes separadas. Dado que la fuerza actúa perpendicularmente a la dirección de la velocidad inicial, esta no se verá afectada y la aceleración producirá variaciones en el movimiento en el eje y.

v_x (2s)= 10 m/s
v_y (2 s) = 5 m·s^{-1} · 2 s = 10 m/s

Por tanto: $\boxed{\vec{v}_{2s} = 10\hat{i} + 10\hat{j}}\quad (m/s) \quad \Rightarrow \quad v_{2s} = \sqrt{(10\,\frac{m}{s})^2 + (10\,\frac{m}{s})^2} = \underline{14,14\,\frac{m}{s}}|$

Dado que las dos componentes de la velocidad tienen el mismo valor, la bola se moverá con un ángulo de 45º respecto a la dirección inicial.

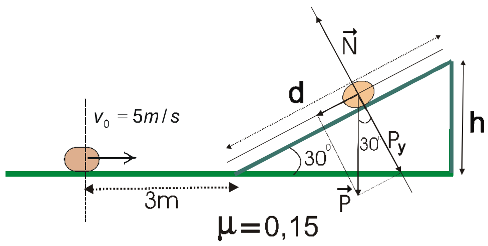
b) El trabajo podemos calcularlo a partir de la variación de la energía cinética que experimenta la bola:

$$W = \Delta E_c = \tfrac{1}{2} m (v_f^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} 0,2kg \cdot 100\,\frac{m^2}{s^2} = \underline{10J}|$$

6.- Un bloque de 4 kg de masa viene deslizando por una superficie horizontal que se continúa con otra superficie inclinada 30º. El coeficiente de rozamiento dinámico con ambas superficies es 0,15. Cuando el cuerpo se encuentra a 3 m del punto donde comienza el plano inclinado lleva una rapidez de 5 m/s. Calcula:

a) El valor de las fuerzas de rozamiento en el plano horizontal y en el plano inclinado.
b) La altura máxima que alcanza el bloque.
Dato: g= 10 m

Primero planteamos la situación gráficamente.



Las componentes del peso son:

$$\begin{cases} P_x = mg \cdot sen30º \\ P_y = mg \cdot \cos 30º \end{cases}$$

La relación entre la distancia recorrida sobre el plano y la altura alcanzada por el cuerpo se obtiene por trigonometría:

$$sen30º = \frac{h}{d} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d = \dfrac{h}{sen30º} \\ h = d \cdot sen30º \end{cases}$$

a) Las fuerzas de rozamiento pedidas serán:

En el plano horizontal: $F_{roz,hor}$ = μ·mg= 0,15 · 4kg · 10ms^{-1}= 6,0 N

En el plano inclinado: $F_{roz,\ inc}$ = μ·mg · cos 30º = 0,15 · 4kg · 10ms^{-1}·cos 30º= 5,2 N

b) Aplicando el principio de conservación de la energía, puede establecerse que:

$$\left.\begin{aligned} E_F &= E_0 + W_{roz} \\ mgh &= \tfrac{1}{2}\cdot mv_0^2 + W_{roz} \quad (1) \end{aligned}\right\}$$

La masa posee energía cinética inicialmente, que al recorrer las superficies se transformará en energía potencial más cierta cantidad de calor disipado por rozamiento.

El trabajo realizado por el rozamiento o energía disipada, puede calcularse a partir de las fuerzas halladas en el apartado anterior. Hay que advertir que se producen dos trabajos de rozamiento diferenciados al cambiar el valor de la normal del plano horizontal al inclinado. Por tanto:

$$W_{roz} = W_{roz,hor} + W_{roz,incl} = \mu\cdot mg\cdot 3\cdot \overbrace{\cos 180^o}^{-1} + \mu\cdot mg\cdot\cos 30^o \cdot \underbrace{d}_{\frac{h}{sen30^o}} \cdot\overbrace{\cos 180^o}^{-1} =$$

$$= -\mu\cdot mg - \mu\cdot mg\cdot h\cdot \cot g30^o = -\mu\cdot mg\left(3 + \frac{h}{tg30^o}\right)$$

Introduciendo ese resultado en (1), tenemos:

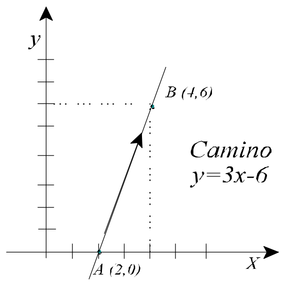
$$\cancel{m}gh = \tfrac{1}{2}\cdot\cancel{m}v_0^2 - \mu\cdot\cancel{m}g\left(3+\frac{h}{tg30^o}\right) \Rightarrow gh + \mu g\frac{h}{tg30^o} = \frac{v_o^2}{2} - \mu g\cdot 3$$

$$gh\cdot\left(1+\frac{\mu}{tg30^o}\right) = \frac{v_o^2}{2} - \mu g \quad\Rightarrow\quad h = \frac{\frac{v_o^2}{2} - \mu g}{g\left(1+\frac{\mu}{tg30^o}\right)} = \frac{\frac{(5m/s)^2}{2} - 0{,}15\cdot 10\,\frac{m}{s^2}\cdot 3m}{10\,\frac{m}{s^2}\left(1+\frac{0{,}15}{0{,}58}\right)} = \frac{12{,}5\,\frac{m^2}{s^2} - 4{,}5\,\frac{m^2}{s^2}}{12{,}59\,\frac{m}{s^2}} \approx \underline{\underline{0{,}635m}}$$

Resulta, por tanto, que la masa ascenderá hasta algo más de 63 centímetros de altura.

7.- Dada la fuerza: $\vec{F} = -2x\hat{i} + 10\hat{j}$ ***; se desea saber el trabajo que realiza al actuar sobre un cuerpo que se mueve desde el punto (2,0) al (4,6) en línea recta.***

a) Calcúlalo y razona si crees que se tratará de una fuerza conservativa
b) Suponiendo que el cuerpo poseía una masa de 100 g y velocidad inicial nula, ¿qué velocidad alcanzará al final del recorrido?



El camino seguido es rectilíneo, por tanto dado por la expresión de una recta y= mx + n

La pendiente se calcula a partir de m=Δy/Δx = 6/2 = 3

y la ordenada en el origen es : n = y - mx = 6 - 3·4 = -6

Por tanto el camino es: ***y= 3x - 6***

$$W_{A\to B} = \int_{(2,0)}^{(4,6)}(-2x\hat{i} + 10\hat{j})\cdot(dx\hat{i} + dy\hat{j}) = -\int_2^4 2xdx + \int_0^6 10dy = -\left[x^2\right]_2^4 + \left[10y\right]_0^6 =$$

$$= -12J + 60J = \underline{48J}$$

Se trata, indudablemente, de una fuerza conservativa como se deduce del hecho de que no hemos necesitado para nada la información del camino seguido.

b) La velocidad alcanzada en la aceleración del cuerpo se obtiene del teorema de las fuerzas vivas.

$$W = \Delta E_c \Rightarrow E_{c,f} = E_{c,0} + W \Rightarrow v_f^2 = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 48J}{0{,}1kg}} = \sqrt{960\,\frac{m^2}{s^2}} \approx \underline{31\,\frac{m}{s}}$$