Matemáticas I: Hoja 2
Cálculo matricial y sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1 *Escribe las siguientes matrices en forma normal de Hermite:*

1. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

¿Cuál es su rango?

Solución:

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Su rango es 2.

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Rango=3

3. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Rango=2

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Rango=3

5.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango=3

6.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango=3

7.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango=3

8.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 59/15 \\ 0 & 1 & 0 & -8/55 \\ 0 & 0 & 1 & 6/5 \end{pmatrix}$$

Rango=3

□

Ejercicio 2 *Considera las matrices del ejercicio anterior.*

1. *Multiplicálas dos a dos siempre y cuando sea posible. Si A, B son dos matrices que se pueden multiplicar tanto por la derecha como por la izquierda, compara ambos resultados.*

2. *Decide cuáles son invertibles.*

Solución: Las matrices inversibles son aquellas cuadradas de rango máximo. □

Ejercicio 3 *Calcula los determinantes de las siguientes matrices:*

$$a)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad d)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$e)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \quad f)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Solución:

a) 1

b) Las filas 2 y 3 de la matriz en $b)$ se obtienen de las mismas filas de la matriz en $a)$ multiplicadas por (-1) Por lo tanto

$$b) = (-1)(-1)a) = a) = 1$$

c) 1

d) 6

e) 1

$\square$

Ejercicio 4 *Calcular el primer determinante y usarlo para calcular los siguientes empleando las propiedades del determinante e indicando cuáles son:*

$$a)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ -3 & -1 & 7 & -3 \\ 4 & 1 & -9 & 4 \end{vmatrix}$$

$$d)\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad e)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad f)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$g)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad h)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución:

a) 1

b) Se obtiene de en $a)$ $F_1 \leftrightarrow F_1 - 2F_3$. Luego el resultado es el mismo.

c) Se obtiene de sustituir $C_3 \leftrightarrow C_3 - 2C_1$. Mismo resultado

d) Intercambiamos en a) La filas tercera y segunda y luego la primera con la segunda. El determinante se multiplica por $(-1)^2$, es decir, no varía.

e) Intercambiamos las filas cuarta y tercera y multiplicamos la nueva cuarta por -1. El resultado es el mismo.

f) Intercambiamos las columnas primera y cuarta y segunda y tercera. Mismo resultado.

g) Intercambiamos las columnas dos y tres y multiplicamos la nueva tercera por dos. Así, el determinante es $(-2)1 = -2$.

h) Intercambiamos las filas 1 y 2. A continuación sustituimos $C_3 \leftrightarrow C_3 - 2C_2$. Así, $h) = -1$

$\square$

Ejercicio 5 *Calcula las inversas de las siguientes matrices:*

$$a)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} b)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} c)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} d)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} f)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} g)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} h)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$i)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} j)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} k)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1-1 & -1 & \\ -4 & 5 & -2 & -7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$a)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} b)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} c)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} d)\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$e)\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -7 & 3 \end{pmatrix} f)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} g)\begin{pmatrix} 1 & 15 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -10 & -1 & -3 \\ -1 & -8 & -1 & -2 \end{pmatrix} h)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i)\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} j)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} k)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\square$

Ejercicio 6 *Demostrar que si A y B son matrices invertibles, entonces AB también lo es, y la inversa vale $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. También demostrar que si A es invertible, su traspuesta también lo es y la inversa de la traspuesta vale $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Solución: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ pues $ABB^{-1}A^{-1} = Id = B^{-1}A^{-1}AB$. $det(A) \neq 0 \Rightarrow detA^t \neq 0$ pues la dependencia o independencia lineal de los vectores columna y de los vectores fila de una matriz son equivalentes.
Como $(AB)^t = B^tA^t$, entonces $(AA^{-1})^t = (A^{-1})^tA^t = Id = A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t$, lo cual demuestra la segunda parte. $\square$

Ejercicio 7 *Calcular el determinante de orden n cuyos elementos vienen dados por* $A_{i,j} = \text{mín}\{i,j\}$

Solución: 1 $\square$

Ejercicio 8 *Calcular el determinante de orden n cuyos elementos vienen dados por* $A_{i,j} = \text{máx}\{i,j\}$

Solución: $n(-1)^{n-1}$. $\square$

Ejercicio 9 *Calcular el determinante de las siguientes matrices:*

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Solución:
(a) $(-1)^{n-1}(n-1)$
(b) $(2n-1)(n-1)^{n-1}$
(c) $(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$.

Hagamos el último apartado con detalle, y los otros se deducen de él. Sea S_n el determinante de orden n. Tenemos que, operando por filas y haciendo la transformación $f_n' = f_n - f_1$, siendo f_i la antigua fila i-ésima y f_i' la nueva, nos queda que:

$$S_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b-a & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la última columna llegamos a que:

$$S_n = (-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b-a & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2n}(a-b)S_{n-1} = b(a-b)^{n-1} + (a-b)S_{n-1}$$

donde en la última igualdad hemos desarrollado el nuevo determinante por la última fila y aprovechado que el resto de las matrices que quedan al desarrollar por esa fila son diagonales.

Por otro lado, sabemos que $S_1 = a, S_2 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Concluimos la demostración por inducción. Como hemos visto antes, la fórmula se satisface para $n = 1$. Nuestra hipótesis de inducción será que S_k verifica la fórmula de arriba. Veamos que S_{k+1} también lo hace bajo dicha hipótesis. Se tiene que:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= b(a-b)^k + (a-b)S_k \underset{H.I.}{=} b(a-b)^k + (a-b)(a-(k-1)b)(a-b)^{k-1} \\ &= (a-b)^k(b + a - (k-1)b) = (a-b)^k(a-kb) \end{aligned}$$

que es justo lo que queríamos demostrar. Esto concluye la demostración. $\square$

Ejercicio 10 *Hallar el rango de las siguientes matrices:*

$a)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $b)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $c)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ $d)\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

Solución:
(a) 2.
(b) 3.
(c) 3.
(d) 2. $\square$

Ejercicio 11 *Hallar los valores de λ para los cuales la matriz*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene rango mínimo. ¿Cuál será el rango para los λ hallados y cuál será para otros valores de λ?

Solución: Para $\lambda = 0$, el rango es 2. En otro caso, el rango es 3. $\square$

Ejercicio 12 *¿Cuál será el rango de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

para distintos valores de λ?

Solución: Para $\lambda = 3$, el rango es 2. En otro caso, el rango es 3. $\square$

Ejercicio 13 *Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$(a)\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \end{array}\right.$$

$$(b)\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \end{array}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 6 & = & 0 \\ 6x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & + & 8 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & + & 6 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(d)\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & 4z & + & 8t & = & -1 \\ x & + & 3y & - & 6z & + & 2t & = & 3 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & - & 2t & = & 8 \\ x & - & y & + & 2z & & & = & 4 \end{array}\right.$$

Solución:

(a) $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -1$
(b) $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$
(c) $x_1 = 23/3, x_2 = -7, x_3 = 2, x_4 = 0$
(d) $x = 12, y = 41, z = 33/2, t = -33/2$ □

Ejercicio 14 *Hallar el polinomio cuadrado $f(x)$, sabiendo que:*

$$f(1) = -1, \quad f(-1) = 9, \quad f(2) = -3$$

Solución:

$$f(x) = x^2 - 5x + 3$$

□

Ejercicio 15 *Hallar el polinomio de tercer grado $f(x)$, para el cual*

$$f(-1) = 0, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 16$$

Solución:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$$

□

Ejercicio 16 *Investigar la compatibilidad y hallar la solución general y una particular del sistema de ecuaciones:*

$$(a)\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 7x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(b)\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 8x_2 & - & 7x_3 & = & 12 \end{array}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 6 \end{array}\right.$$

Solución:

(a) Por ejemplo, la solución general

$$x_1 = \frac{x_3 - 9x_4 - 2}{11}, \quad x_2 = \frac{-5x_3 + x_4 + 10}{11}$$

y la solución particular $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1$.

(b) El sistema tiene la única solución $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$.

(c) Solución general:

$$x_3 = -\frac{9}{2} - x_1 - 2x_2, \quad x_4 = -\frac{25}{2} - 2x_1 - 4x_2, \quad x_5 = -\frac{15}{2} - 2x_1 - 4x_2$$

Solución particular:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = -\frac{5}{2}, \quad x_5 = \frac{5}{2}$$

□

Ejercicio 17 *Investigar el sistema y hallar la solución general en función del valor del parámetro λ:*

$$(a)\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 8x_4 & = & 5 \\ x_1 & - & 6x_2 & - & 9x_3 & - & 20x_4 & = & -11 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & \lambda x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(b)\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \lambda x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$(c)\left\{\begin{array}{ccccccc}(1+\lambda)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1\\ x_1 & + & (1+\lambda)x_2 & + & x_3 & = & \lambda\\ x_1 & + & x_2 & + & (1+\lambda)x_3 & = & \lambda^2\end{array}\right.$$

Solución:

(a) Para $\lambda = 0$, el sistema es incompatible. Para $\lambda \neq 0$, éste es compatible y la solución general tiene el siguiente aspecto:

$$x_1 = \frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}x_3, \quad x_2 = \frac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \frac{8}{5}x_3, \quad x_4 = \frac{1}{\lambda}$$

(b) Para $(\lambda-1)(\lambda+3) \neq 0$, el sistema tiene una única solución: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{\lambda+3}$. Para $\lambda = 1$, la solución general tiene la siguiente forma: $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, donde x_2, x_3, x_4 son incógnitas independientes. Para $\lambda = -3$, el sistema es incompatible.

(c) Para $\lambda(\lambda+3) \neq 0$, el sistema tiene solución única:

$$x_1 = \frac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}, \quad x_2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda(\lambda+3)}, x_3 = \frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1}{\lambda(\lambda+3)}$$

Para $\lambda = 0, \lambda = -3$, el sistema es incompatible. □

Ejercicio 18 (*) *Escribir la ecuación de una circunferencia que pasa por tres puntos* $(1,2)$, $(1,-2)$, $(0,-1)$ *y hallar su centro y radio.*

Solución: $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$. El centro está en el punto $(2,0)$. El radio es igual a $\sqrt{5}$. □