*En los criterios específicos de corrección de Física se indica "la calificación ...**en múltiplos de 0,25 puntos**", por lo que un error resta al menos 0,25 puntos. Se comentan ideas de errores que pueden restar, a veces son fallos habituales comentados en actas EvAU. Se comentan algunos fallos genéricos y algunos asociados a gravitación:*
- No indicar las unidades correctamente, no pasar a SI o mezclar unidades en los cálculos.
- Confundir datos y unidades: masas de varios objetos, km y m, altura y radio.
- Confusión en expresiones: poner $1/r^2$ en Ep y V, poner 1/r en F y g.
- No realizar la deducción de ciertas expresiones que se suele exigir que en la respuesta se incluyan sin ponerlas directamente (a veces en estas soluciones por abreviar no se incluyan explícitamente). Las deducciones exigidas en gravitación se pueden resumir en:
– Demostración 3ª ley de Kepler para órbitas circulares (relación entre T, v y radio de órbita)
– Velocidad de lanzamiento y de escape
– Expresión de energía cinética y mecánica en órbita circular, en general apoyadas en conservación de energía mecánica y en igualar igualar fuerza centrípeta y gravitatoria.
– (No se pide deducir la expresión de energía potencial gravitatoria como una integral de la fuerza, pero se puede citar que se puede obtener integrando y citar que $V=E_p/m$)
- No citar la ley de gravitación universal o que g=F/m.
- No citar el principio de superposición (campo, fuerza, energía potencia, potencial)
- No indicar si se calcula el trabajo realizado por el campo o el trabajo externo.
- No plantear bien conservación de energía, no considerando todas las energías en cada punto.
- Indicar que una magnitud vectorial es escalar o que una magnitud escalar es vectorial.
- No dar una magnitud vectorial (campo, fuerza, aceleración, velocidad, momento lineal) como vector al limitarse a dar solo módulo. Si enunciado indica sistema de referencia/coordenadas, se debe dar como vector con sus componentes, y si no, al menos citar cualitativamente dirección y sentido además del módulo. La posición puede ser un vector, no solo dar su distancia a otro punto, sino dar sus coordenadas.
- En los desarrollos igualar vectores con escalares. Hay que dejar claro que se sabe cuándo se manejan módulos (o componentes de un vector) y cuándo vectores. Hay que tener cuidado de evitar "encadenar igualdades" que realmente son igualdades distintas.

2024-Julio-Coincidentes

A.1. a) El valor pedido de distancia máxima entre el planeta y la estrella es el radio del afelio.
El dato de distancia mínima entre el planeta y la estrella es el radio del perihelio.
La 3ª ley de Kepler la podemos deducir para una órbita circular en la que v=2πR/T, y luego aplicarla a una órbita elíptica cambiando el radio por el semieje mayor

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_O}\Rightarrow\frac{4\pi^2R_O^2}{T^2}=\frac{GM}{R_O}\Rightarrow\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}\Rightarrow a=\sqrt[3]{T^2\frac{GM}{4\pi^2}}$$

Numéricamente en este caso $a=\sqrt[3]{(7{,}43\cdot365\cdot24\cdot36000)^2\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot2{,}34\cdot10^{30}}{4\pi^2}}=6{,}00\cdot10^{11}\,m$

Por geometría de la elipse $r_a+r_p=2a \rightarrow r_a=2a-r_p=2\cdot6{,}00\cdot10^{11}-2{,}67\cdot10^{11}=9{,}33\cdot10^{11}$ m
El valor pedido de velocidad máxima del planeta es la velocidad en el perihelio, y el dato de velocidad mínima del planeta es la velocidad en el afelio, ya que la energía mecánica se conserva y cuando mayor es el radio y mayor la energía potencia, menor es la energía cinética y menor es la velocidad.
Planteando la conservación del momento angular en afelio y perihelio, en los que en ambos casos r y v son perpendiculares, $r_p\cdot\cancel{m}\cdot v_p=r_a\cdot\cancel{m}\cdot v_a \rightarrow v_p=v_a\cdot r_a/r_p=8{,}61\cdot10^3\cdot9{,}33\cdot10^{11}/2{,}67\cdot10^{11}=3{,}01\cdot10^4$ m/s
b) Planteamos la conservación de la energía mecánica entre ese punto y otro punto del que ya conocemos distancia y velocidad (tomamos perihelio pero también se podría hacer con afelio)

$$-G\frac{M\cancel{m}}{r}+\frac{1}{2}\cancel{m}v^2=-G\frac{M\cancel{m}}{r_p}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_p^2\Rightarrow\frac{1}{2}v^2=GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_p}\right)+\frac{1}{2}v_p^2\Rightarrow v=\sqrt{2\left(GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_p}\right)+\frac{1}{2}v_p^2\right)}$$

Numéricamente

$$v=\sqrt{2(6{,}67\cdot10^{-11}\cdot2{,}34\cdot10^{30}(\frac{1}{5\cdot10^{11}}-\frac{1}{2{,}67\cdot10^{11}})+\frac{1}{2}(3{,}01\cdot10^{4})^{2})}=1{,}9\cdot10^{4}\,m/s$$

B.1. a) La fuerza que actúa sobre cada uno de los satélites es la fuerza gravitatoria, su peso, que al ser una órbita circular es la fuerza centrípeta. Es una fuerza radial dirigida hacia el centro de la Tierra y de módulo según la ley de gravitación universal

$$F=G\frac{Mm}{r^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot10^{24}\cdot250}{(6{,}37\cdot10^{6}+1200\cdot10^{3})^2}=1{,}34\cdot10^{3}\,N$$

Deducimos la 3ª ley de Kepler para una órbita circular en la que v=2πR/T, con la que calculamos el periodo de la órbita

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_O}\Rightarrow\frac{4\pi^2R_O^2}{T^2}=\frac{GM}{R_O}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_O^3\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{R_O^3}{GM}}$$

Numéricamente $T=2\pi\sqrt{\frac{(6{,}37\cdot10^{6}+1200\cdot10^{3})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}}=6{,}56\cdot10^{3}\,s$

Al ser una órbita circular recorre 2πR en cada periodo, por lo que la distancian que recorre cada día es $d=2\pi(6{,}37\cdot10^{6}+1200\cdot10^{3})\cdot\frac{24\cdot3600}{6{,}56\cdot10^{3}}=6{,}26\cdot10^{8}\,m$

b) Planteando la conservación de energía, $E_{órbitainferior}+E_{suministrada}=E_{órbitasuperior}$, donde $R_{Osup}=R_T+2\cdot h_{inf}$
Utilizando para órbitas circulares la expresión $v^2=GM/R_O$ llegamos a $E_{mórbita}=-\frac{1}{2}GMm/R_O$

$$E_{suministrada}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_{Osup}}-(\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_{Oinf}})=\frac{1}{2}GMm(\frac{1}{R_{Oinf}}-\frac{1}{R_T+2\cdot h_{inf}})$$

Numéricamente

$$E_{suministrada}=\frac{1}{2}6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot250(\frac{1}{6{,}37\cdot10^{6}+1200\cdot10^{3}}-\frac{1}{6{,}37\cdot10^{6}+2\cdot1200\cdot10^{3}})$$

$$E_{suministrada}=9{,}00\cdot10^{8}\,J$$

2024-Julio

A.1. a) La 3ª ley de Kepler la podemos deducir para una órbita circular en la que v=2πR/T, y luego aplicarla a una órbita elíptica cambiando el radio por el semieje mayor

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_O}\Rightarrow\frac{4\pi^2R_O^2}{T^2}=\frac{GM}{R_O}\Rightarrow\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}\Rightarrow a=\sqrt[3]{T^2\frac{GM}{4\pi^2}}$$

Numéricamente en este caso $a=\sqrt[3]{(12\cdot36000)^2\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{4\pi^2}}=2{,}66\cdot10^{7}\,m$

Si la altitud del apogeo es 39700 km, el radio del apogeo es $r_a=39700\cdot10^3+6{,}37\cdot10^6=4{,}607\cdot10^7$ m.
Por geometría de la elipse $r_a+r_p=2a\rightarrow r_p=2a-r_a=2\cdot2{,}66\cdot10^7-4{,}607\cdot10^7=7{,}13\cdot10^6$ m
La altura en el perigeo será $7{,}13\cdot10^6-6{,}37\cdot10^6=7{,}6\cdot10^5$ m
Planteando la conservación del momento angular en apogeo y perigeo, en los que en ambos casos r y v son perpendiculares, $r_p\cdot\cancel{m}\cdot v_p=r_a\cdot\cancel{m}\cdot v_a\rightarrow r_p\cdot v_p=r_a\cdot v_a\rightarrow v_p/v_a=r_a/r_p=4{,}607\cdot10^7/7{,}13\cdot10^6=6{,}46$ (adimensional, es una proporción)
b) *Planteamiento similar a 2024-Modelo-A1.*
La velocidad en perihelio se puede plantear usando la conservación del momento angular. Según la 2ª Ley de Kepler, la velocidad areolar es constante, dA/dt=L/2m.
Al mismo tiempo, dA/dt es igual al área de toda la elipse entre el periodo, dato del enunciado.
El área de la elipse es πab, siendo b el semieje menor, que se puede obtener con varias expresiones
$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(2{,}66\cdot10^7)^2-(2{,}66\cdot10^7-7{,}13\cdot10^6)^2}=1{,}81\cdot10^7\,m$ c es la semidistancia focal, el semieje mayor menos la distancia al perihelio.
$b=\sqrt{r_a\cdot r_p}=\sqrt{4{,}607\cdot10^7\cdot7{,}13\cdot10^6}=1{,}81\cdot10^7\,m$
Por lo tanto la velocidad areolar es $dA/dt=\pi\cdot2{,}66\cdot10^7\cdot1{,}81\cdot10^7/(12\cdot3600)=3{,}5\cdot10^{10}\,m^2/s$
Por lo tanto $L/m=2\cdot3{,}5\cdot10^{10}=7\cdot10^{10}\,m^2/s$
Como el momento angular es constante, si igualamos módulos en perihelio y afelio, instantes en los

que el vector posición y el momento lineal forman 90º, llegamos a

$$r_a \cdot \cancel{m} \cdot v_a = r_p \cdot \cancel{m} \cdot v_p$$

Tras simplificar ambas expresiones son L/m, por lo que podemos plantear

En perihelio que es donde se pide en este caso $r_p \cdot v_p = L/m \Rightarrow v_p = 7 \cdot 10^{10}/7{,}13 \cdot 10^6 = 9{,}82 \cdot 10^3\, m/s$

También se puede plantear combinando la conservación de energía mecánica y la conservación del momento angular en ambos puntos, afelio y perihelio.

$$-G\frac{M\cancel{m}}{r_a}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_a^2=-G\frac{M\cancel{m}}{r_p}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_p^2$$ Si combinamos con $r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p \Rightarrow v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p$

$$-G\frac{M}{r_a}+\frac{1}{2}\frac{r_p^2}{r_a^2}v_p^2=-G\frac{M}{r_p}+\frac{1}{2}v_p^2$$ *De donde podemos despejar v_p al ser r_a, r_p y M conocidos.*

También se pide la velocidad asociada a una órbita circular de radio igual a la distancia al perigeo. Utilizando el desarrollo de la 3ª ley de Kepler para órbitas circulares

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{R_O} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R_O}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{7{,}13 \cdot 10^6}} = 7{,}47 \cdot 10^3\, m/s$$

B.1. a) En la órbita circular v=2πR/T planteamos la 3ª ley de Kepler.

$$F_g = F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{R_O} \Rightarrow \frac{4\pi^2 R_O^2}{T^2} = \frac{GM}{R_O}$$

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R_O^3}{T^2} = \frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \cdot \frac{(1{,}2 \cdot 10^{11})^3}{(3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 1{,}14 \cdot 10^{29}\, kg$$

Aplicando la 3ª ley de Kepler a una órbita elíptica cambiando el radio por el semieje mayor $a=(r_a+r_p)/2=(1{,}0\cdot 10^{11}+1{,}8\cdot 10^{11})/2=1{,}4\cdot 10^{11}$ m

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}14 \cdot 10^{29}} \cdot (1{,}4 \cdot 10^{11})^3} = 1{,}19 \cdot 10^8\, s$$

También se puede plantear $\frac{T_c^2}{R_c^3} = \frac{T_e^2}{a_e^3} \Rightarrow T_e = T_c \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{R_c}\right)^3} = 3 \cdot \sqrt{\left(\frac{1{,}4 \cdot 10^{11}}{1{,}2 \cdot 10^{11}}\right)^3} = 3{,}78\, años = 1{,}19 \cdot 10^8\, s$

b) En una órbita circular igualando fuerza gravitatoria y centrípeta, llegamos a

$$v^2 = \frac{GM}{R_O} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}14 \cdot 10^{29}}{1{,}2 \cdot 10^{11}}} = 7{,}96 \cdot 10^3\, m/s$$

En una órbita circular sumando energía cinética y potencial y usando expresión de velocidad

$$E_m = \frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_O} = \frac{-1}{2}mv^2 \Rightarrow m = \frac{-2E_m}{v^2} = \frac{-2 \cdot (-3{,}8 \cdot 10^{30})}{(7{,}96 \cdot 10^3)^2} = 1{,}2 \cdot 10^{23}\, kg$$

Enunciado indica "halle la masa de los planetas", así que se pide también para el segundo de órbita elíptica. En este caso no tenemos valores con relación directa con la masa del segundo planeta, como sería la energía mecánica (enunciado da el valor solo para el primer planeta de órbita circular "su energía mecánica en su órbita circular es") o el momento angular. Por lo tango no hay datos para calcular la masa del segundo planeta. Pero no hace falta, porque enunciado indica en su primera línea "dos planetas de masas iguales " luego la masa del segundo es la ya calculada.

2024-Junio-Coincidentes

A.1. a) La energía mecánica se conserva en la órbita y la podemos calcular en cualquier punto, en este caso en el afelio que es de donde se facilitan datos

$$E_m = \frac{-GMm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}99 \cdot 10^{30} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{14}}{5{,}26 \cdot 10^{12}} + \frac{1}{2} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{14} \cdot 900^2 = -5{,}46 \cdot 10^{21}\, J$$

El momento angular y su módulo se conserva en la órbita y lo podemos calcular en cualquier punto, en este caso en el afelio que es de donde se facilitan datos, y donde r y v son perpendiculares

$$L = rmv = 5{,}26 \cdot 10^{12} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{14} \cdot 900 = 1{,}04 \cdot 10^{30}\, J \cdot s\ ó\ \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

b) La expresión de la energía mecánica la podemos deducir para una órbita circular, y luego aplicarla a una órbita elíptica cambiando el radio por el semieje mayor

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_O} \Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_O} \Rightarrow E_m=\frac{-GMm}{R_O}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_O} \Rightarrow E_m=\frac{-GMm}{2a}$$

Numéricamente usando el valor de energía mecánica calculado en apartado a

$$a=\frac{-GMm}{2E_m}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}99\cdot10^{30}\cdot2{,}2\cdot10^{14}}{2\cdot(-5{,}46\cdot10^{21})}=2{,}67\cdot10^{12}m$$

En este caso hemos calculado el eje mayor sin usar el dato del periodo del enunciado, y se puede plantear de otras maneras:

Opción 1: La 3ª ley de Kepler la podemos deducir para una órbita circular en la que v=2πR/T, y luego aplicarla a una órbita elíptica cambiando el radio por el semieje mayor

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_O} \Rightarrow \frac{4\pi^2 R_O^2}{T^2}=\frac{GM}{R_O} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow a=\sqrt[3]{T^2\frac{GM}{4\pi^2}}$$

Numéricamente en este caso

$$a=\sqrt[3]{(75{,}571\cdot365\cdot24\cdot36000)^2\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}99\cdot10^{30}}{4\pi^2}}=2{,}67\cdot10^{12}m$$

Opción 2: Como tenemos el módulo del momento angular calculado en el apartado anterior, planteamos la expresión de la velocidad areolar $\frac{dA}{dt}=\frac{|L|}{2m}$ *. Usando el dato de periodo, la expresión del área de la elipse πab y la relación geométrica entre semieje menor* $b^2=r_a\cdot r_p$ *con* $r_p=2a-r_a$ *(el cálculo de* r_p *se realiza en este mismo apartado)*

$$\frac{\pi ab}{T}=\frac{L}{2m} \Rightarrow a=\frac{L\cdot T}{2m\pi\sqrt{r_a\cdot r_p}}=\frac{1{,}04\cdot10^{30}\cdot75{,}571\cdot365\cdot24\cdot3600}{2\cdot2{,}2\cdot10^{14}\cdot\pi\cdot\sqrt{5{,}26\cdot10^{12}\cdot8{,}00\cdot10^{10}}}=2{,}6\cdot10^{12}m$$

Para calcular la velocidad orbital del cometa en el perihelio necesitamos el radio del perihelio. Lo podemos calcular por geometría de la elipse conociendo el semieje mayor y el radio del afelio.

Por geometría de la elipse $r_a+r_p=2a \rightarrow r_p=2a-r_a=2\cdot2{,}67\cdot10^{12}-5{,}26\cdot10^{12}=8{,}00\cdot10^{10}$ m

Planteando la conservación del momento angular en afelio y perihelio, en los que en ambos casos r y v son perpendiculares, $r_p\cdot\cancel{m}\cdot v_p=r_a\cdot\cancel{m}\cdot v_a \rightarrow v_p=v_a\cdot r_a/r_p=900\cdot5{,}26\cdot10^{12}/8{,}00\cdot10^{10}=5{,}92\cdot10^4$ m/s

B.1. a) m=d·v. Utilizando el volumen de la esfera y cambiando de unidades la densidad a kg/m³

$$m=\frac{4}{3}\pi r^3\cdot d=\frac{4}{3}\pi(2{,}54\cdot10^7)^3\cdot\frac{1{,}27\,\cancel{g}}{1\,\cancel{cm^3}}\cdot\frac{1\,kg}{1000\,\cancel{g}}\cdot\frac{10^6\,\cancel{cm^3}}{1\,m^3}=8{,}72\cdot10^{25}kg$$

A partir de la velocidad en una órbita circular podemos obtener el radio de la órbita

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_O} \Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_O} \Rightarrow R_O=\frac{GM}{v^2}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot8{,}72\cdot10^{25}}{(9{,}5\cdot10^3)^2}=6{,}44\cdot10^7 m$$

$$a_c=\frac{v^2}{R}=\frac{(9{,}5\cdot10^3)^2}{6{,}44\cdot10^7}=1{,}40\,m/s^2$$

b) La nueva energía mecánica será la suma de la energía potencial asociada al radio de la órbita y la energía cinética asociada a la nueva velocidad, que será 9,5+2=11,5 km/s.

$$E_m=\frac{-GMm}{r}+\frac{1}{2}mv^2=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{8{,}72\cdot10^{25}\cdot250}{6{,}44\cdot10^7}+\frac{1}{2}\cdot250\cdot(11{,}5\cdot10^3)^2=-6{,}05\cdot10^7 J$$

La sonda con esa energía no escapará al campo gravitatorio del planeta, ya que para ello su nueva energía mecánica debería ser 0 o positiva; escapar supone aportar una energía suficiente para llegar a un punto infinitamente alejado donde la energía potencial es cero.

Se indica "aumenta su velocidad orbital en 2 km/s en dirección tangencial", lo que supone un aumento del módulo de la velocidad inicial 9,5 km/s en esa cantidad, ya que la velocidad es tangencial a la órbita. Si se plantease que la nueva energía cinética es la suma de energías cinéticas de ambas velocidades $½\cdot250\cdot11{,}5^2+½\cdot250\cdot2^2 = ½\cdot250\cdot(11{,}5^2+2^2)$ *se estaría planteando que el aumento de velocidad en 2 km/s es perpendicular a la trayectoria, y se tiene una nueva energía cinética asociada a una nueva velocidad total* $v^2=11{,}5^2+2^2$*, que no es lo que se indica.*

2024-Junio

A.1. a) Utilizando la definición de energía potencial, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria, conservativa, es igual a la variación de energía potencial cambiada de signo. Usamos p para perigeo, punto más próximo en su órbita, y a para apogeo, punto más distante.

$$W_{p\to a}=-\Delta E_p=-(E_p(a)-E_p(p))=-(\frac{-GMm}{r_a}-(\frac{-GMm}{r_p}))=GMm(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_p})$$

$$W_{p\to a}=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}02\cdot 10^{26}\cdot 1{,}60\cdot 10^{15}\cdot(\frac{1}{21\cdot 10^9}-\frac{1}{12\cdot 10^9})=-3{,}89\cdot 10^{20}\,J$$

El trabajo realizado por el campo es negativo, es en contra del campo: está llevando el satélite Halimede a un punto más lejano de Neptuno.
b) La velocidad máxima se produce en el perigeo, ya que en ese momento la energía potencial es mínima al ser la distancia mínima, y ser la energía mecánica constante.

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{r_p}+\frac{1}{2}m v_p^2$$

$$-2{,}5\cdot 10^{20}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1{,}02\cdot 10^{26}\cdot 1{,}60\cdot 10^{15}}{12\cdot 10^9}+\frac{1}{2}1{,}60\cdot 10^{15}\cdot v_p^2$$

$$v_p=\sqrt{\frac{2}{1{,}60\cdot 10^{15}}\cdot(-2{,}5\cdot 10^{20}+6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1{,}02\cdot 10^{26}\cdot 1{,}60\cdot 10^{15}}{12\cdot 10^9})}=9{,}06\cdot 10^2\,m/s$$

B.1. a) En la órbita circular

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_O}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R_O}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}{6{,}37\cdot 10^6+630\cdot 10^3}}=7{,}54\cdot 10^3\,m/s$$

La velocidad del enunciado es mayor, luego no es una órbita circular en la que la velocidad es constante. Como enunciado indica que la órbita es cerrada, la única opción es que sea una órbita elíptica.
b) Se indica que en ese instante la velocidad es perpendicular a la dirección radial, por lo que se trata de apogeo o perigeo; al ser la velocidad mayor que la asociada a la órbita circular, es el perigeo.
En este caso el módulo $L=r\cdot m\cdot v=(6{,}37\cdot 10^6+630\cdot 10^3)\cdot 200\cdot 9{,}92\cdot 10^3=1{,}39\cdot 10^{13}$ kg·m²/s
Se pide la aceleración del satélite en ese momento. De manera general en una órbita elíptica la aceleración tiene una componente tangencial y una componente normal a la trayectoria, pero la componente normal no es siempre la gravitatoria, que es radial dirigida hacia uno de los focos. Sin embargo en este momento que indica el enunciado la velocidad es perpendicular a la dirección radial, de modo que solo hay aceleración normal. Si aplicamos la 2ª ley de Newton, F=ma, la única fuerza es la gravitatoria y la única aceleración es la normal, por lo que la componente normal es la asociada a la fuerza gravitatoria y, en ese instante, no hay aceleración tangencial.
$g=GM/r_p^2=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}/(6{,}37\cdot 10^6+630\cdot 10^3)^2=8{,}13$ m/s²
Si se plantease $a=v^2/R$, en ese caso R es el radio de curvatura, no la distancia entre el centro de la Tierra y el satélite, por lo que $a=(9{,}92\cdot 10^3)^2/(6{,}37\cdot 10^6+630\cdot 10^3)^2=14{,}1$ m/s² no sería correcto. Eso nos permite calcular el radio de curvatura $R=v^2/a=(9{,}92\cdot 10^3)^2/8{,}13=1{,}21\cdot 10^7$ m. Se puede ver que es menor que $6{,}37\cdot 10^6+630\cdot 10^3 = 7\cdot 10^7$ m, ya que se trata del perigeo.

2024-Modelo

A.1. a) Se trata de una órbita elíptica. El eje mayor de la elipse es la suma de la distancia del Sol al afelio y al perihelio, por lo que su semieje mayor es
$a=(1{,}1\cdot 10^{11}+7{,}6\cdot 10^9)/2=5{,}88\cdot 10^{10}$ m

En una órbita circular se puede deducir la expresión de la 3ª ley de Kepler $T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_O^3$, que para el caso de una órbita elíptica es válida cambiando el radio por el semieje mayor

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}a^3}=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}}\cdot(5{,}88\cdot 10^{10})^3}=7{,}78\cdot 10^6\,s\approx 90\,días$$

b) La velocidad en ambos puntos se puede plantear usando la conservación del momento angular. Según la 2ª Ley de Kepler, la velocidad areolar es constante, dA/dt=L/2m.

Al mismo tiempo, dA/dt es igual al área de toda la elipse entre el periodo, calculado en a.
El área de la elipse es πab, siendo b el semieje menor, que se puede obtener con varias expresiones
$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{(5{,}88\cdot 10^{10})^2-(5{,}88\cdot 10^{10}-7{,}6\cdot 10^9)^2}=2{,}89\cdot 10^{10}\,m$ c es la semidistancia focal, el semieje mayor menos la distancia al perihelio.
$b=\sqrt{r_a\cdot r_p}=\sqrt{1{,}1\cdot 10^{11}\cdot 7{,}6\cdot 10^9}=2{,}89\cdot 10^{10}\,m$
Por lo tanto la velocidad areolar es $dA/dt=\pi\cdot 5{,}88\cdot 10^{10}\cdot 2{,}89\cdot 10^{10}/7{,}78\cdot 10^6=6{,}85\cdot 10^{14}\ m^2/s$
Por lo tanto $L/m=2\cdot 6{,}85\cdot 10^{14}=1{,}37\cdot 10^{15}\ m^2/s$
Como el momento angular es constante, si igualamos módulos en perihelio y afelio, instantes en los que el vector posición y el momento lineal forman 90º, llegamos a
$r_a\cdot \cancel{m}\cdot v_a=r_p\cdot \cancel{m}\cdot v_p$
Tras simplificar ambas expresiones son L/m, por lo que podemos plantear
En afelio $r_a\cdot v_a=L/m\Rightarrow v_a=1{,}37\cdot 10^{15}/1{,}1\cdot 10^{11}=1{,}25\cdot 10^4\,m/s$
En perihelio $r_p\cdot v_p=L/m\Rightarrow v_p=1{,}37\cdot 10^{15}/7{,}6\cdot 10^9=1{,}8\cdot 10^5\,m/s$
También se puede plantear combinando la conservación de energía mecánica y la conservación del momento angular en ambos puntos, afelio y perihelio.
$-G\frac{M\cancel{m}}{r_a}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_a^2=-G\frac{M\cancel{m}}{r_p}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_p^2$ Si combinamos con $r_a\cdot v_a=r_p\cdot v_p\Rightarrow v_a=\frac{r_p}{r_a}v_p$
$-G\frac{M}{r_a}+\frac{1}{2}\frac{r_p^2}{r_a^2}v_p^2=-G\frac{M}{r_p}+\frac{1}{2}v_p^2$ De donde podemos despejar v_p al ser r_a, r_p y M conocidos.

B.1. a) Como la distancia recorrida desde el punto de caída al suelo es mucho menor que radio del planeta, podemos asumir que la aceleración de la gravedad es constante y se trata de un MRUA con velocidad inicial cero. Tomamos referencia x=0 en el punto en el que se deja caer y x positivas hacia el sentido del movimiento, por lo que la aceleración es positiva
$x=½at^2 \rightarrow 2=0{,}5\cdot a\cdot 1{,}5^2 \rightarrow a=2/(0{,}5\cdot 1{,}5^2)=1{,}78\ m/s^2$
La aceleración de la gravedad será un vector de módulo 1,78 m/s², dirección radial y sentido hacia el centro del planeta.
El módulo de la gravedad es $g=GM/R^2$, luego $M=g\cdot R^2/G=1{,}78\cdot(1800\cdot 10^3)^2/6{,}67\cdot 10^{-11}=8{,}64\cdot 10^{22}$ kg
b) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A a una distancia R a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.
A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}mv_e^2$
B (∞): $E_p=0;E_c=0$
Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape
$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$
Numéricamente $v_e=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 8{,}64\cdot 10^{22}}{1800\cdot 10^3}}=2{,}53\cdot 10^3\,m/s$
Como la velocidad de lanzamiento es mayor, sí escapa del planeta.
Planteando la conservación de energía mecánica, pero ahora considerando cierta velocidad inicial no igual a la de escape y cierta velocidad final en el punto infinitamente alejado
A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}mv_i^2$
B (∞): $E_p=0;E_c=\frac{1}{2}mv_f^2$
Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape
$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_i^2=\frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2\Rightarrow v_f=\sqrt{v_i^2-2G\frac{M}{R}}=\sqrt{v_i^2-v_e^2}=\sqrt{(3\cdot 10^3)^2-(2{,}53\cdot 10^3)^2}=1{,}61\cdot 10^3\,m/s$

2023-Julio

A.1. a) En la órbita circular es $R_O=R_T+h$ y $v=2\pi R/T$.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_O}\Rightarrow\frac{4\pi^2R_O^2}{T^2}=\frac{GM}{R_O}\Rightarrow R_O=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot5710^2}{4\pi^2}}=6{,}902\cdot10^6\,m$$

$h=R_O-R_T=6{,}90210^6-6{,}37\cdot10^6=5{,}32\cdot10^5$ m

Planteamos la conservación de energía entre la situación en el punto de lanzamiento de la superficie terrestre (A) y la situación en la que está en órbita (B)

Al tratarse de una órbita circular igualando Fc=Fg llegamos a $v^2=GM/R_B$ y $Em(B)=Ep(B)+Ec(B)=-½GMm/R_B$ siendo $R_B=R_T+h$

$$E_{aportada}=E_m(B)-E_m(A)$$

$$E_{aportada}=\frac{-1}{2}G\frac{M\,m}{R_T+h}-(-G\frac{M\,m}{R_T})=GMm(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2(R_T+h)})$$

$$E_{aportada}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot50(\frac{1}{6{,}37\cdot10^6}-\frac{1}{2(6{,}902\cdot10^6)})=1{,}68\cdot10^9\,J$$

b) La velocidad en la órbita es $v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{6{,}902\cdot10^6}}=7{,}60\cdot10^3\,m/s$

La aceleración centrípeta es un vector radial y sentido hacia el centro de módulo igual al campo gravitatorio, que también se puede calcular como

$g=GM/R_O^2=a_n=v^2/R_O=(7{,}60\cdot10^3)^2/6{,}902\cdot10^6=8{,}37$ m/s²

B.1. a) La componente x de la fuerza ejercida sobre la nave se debe solamente a la atracción gravitatoria del satélite, ya que el planeta solo genera fuerza en el eje y, por lo que podemos plantear

$$|\vec{F}_x|=|\vec{F}_{Satélite}|\cdot sen(\alpha)=G\frac{M'}{R'^2}\cdot sen(\alpha)\Rightarrow9{,}5=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{2\cdot10^{20}\cdot8\cdot10^3}{R'^2}\cdot sen(53{,}13^o)$$

$$R'=\sqrt{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{2\cdot10^{20}\cdot8\cdot10^3}{9{,}5}\cdot sen(53{,}13^o)}=3{,}00\cdot10^6\,m$$

b) La componente y de la fuerza ejercida sobre la nave se tanto a la atracción gravitatoria del satélite como a la atracción gravitatoria del planeta, por lo que podemos plantear usando superposición

$$|\vec{F}_y|=|\vec{F}_{Satélite}|\cdot\cos(\alpha)+|\vec{F}_{Planeta}|=G\frac{M'}{R'^2}\cdot\cos(\alpha)+G\frac{M}{R^2}$$

$$66{,}4=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{2\cdot10^{20}\cdot8\cdot10^3}{(3{,}00\cdot10^6)^2}\cdot\cos(53{,}13^o)+6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{4\cdot10^{23}\cdot8\cdot10^3}{R^2}$$

$$R=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4\cdot10^{23}\cdot8\cdot10^3}{(66{,}4-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{2\cdot10^{20}\cdot8\cdot10^3}{(3{,}00\cdot10^6)^2}\cdot\cos(53{,}13^o))}}=6{,}00\cdot10^7\,m$$

2023-Junio-Coincidentes

A.1. a) En la órbita circular es $R_O=R_T+h$ y $v=2\pi R/T$.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_O}\Rightarrow\frac{4\pi^2R_O^2}{T^2}=\frac{GM}{R_O}\Rightarrow R_O=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4\cdot10^{23}\cdot(4{,}36\cdot3600)^2}{4\pi^2}}=5{,}501\cdot10^6\,m$$

$h=R_O-R_T=5{,}501\cdot10^6-5{,}00\cdot10^6=5{,}01\cdot10^5$ m

b) Si planteamos la conservación de la energía, Em órbita + E escape = E infinito = 0

Para la energía mecánica en órbita circular igualando Fc=Fg llegamos a $v^2=GM/R_O$ y $Em(O)=Ep(O)+Ec(O)=-½GMm/R_O$, siendo m la masa conjunta de Rocannon y su nave.

Numéricamente $-½\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4\cdot10^{23}\cdot m/5{,}501\cdot10^6+1{,}5\cdot10^{10}=0$

$m=2\cdot1{,}5\cdot10^{10}\cdot5{,}501\cdot10^6/6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4\cdot10^{23}=6{,}19\cdot10^3$ kg

B.1. *Similar a 2022-Junio-A1, pero invirtiendo (es 6,8 en lugar 8,6, unidades en cm, masa en A)*

a) Llamamos A al punto (6, 8) cm. La distancia entre la masa en A y el origen A usando Pitágoras es $\sqrt{6^2+8^2}=10\,cm$. El ángulo que forma con la horizontal lo llamamos α, y el vector campo estará dirigido hacia el punto A.

$$\vec{g}=g_x\vec{i}+g_y\vec{j}=g\cdot\cos(\alpha)\vec{i}+g\,sen(\alpha)\vec{j}$$

El módulo es $g=GM/R^2=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5\cdot10^4/0{,}1^2=3{,}335\cdot10^{-4}$ m/s²

$$\vec{g}=3{,}335\cdot10^{-4}\left(\frac{6}{10}\vec{i}+\frac{8}{10}\vec{j}\right)=2{,}00\cdot10^{-4}\vec{i}+2{,}67\cdot10^{-4}\vec{j}\,m/s^2$$

b) Solamente actúa la fuerza gravitatoria y se conserva la energía mecánica. Llamamos B al punto en el que se detiene, en el que la energía cinética será nula.

$$E_m(A)=E_m(B)\Rightarrow E_p(A)+E_c(A)=E_p(B)\Rightarrow -G\frac{Mm}{R_A}+\frac{1}{2}mv^2=-G\frac{Mm}{R_B}$$

$$-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5\cdot10^4\cdot25\cdot10^{-6}}{0{,}1}+\frac{1}{2}\cdot25\cdot10^{-6}\cdot(5\cdot10^{-3})^2=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5\cdot10^4\cdot25\cdot10^{-6}}{R_B}$$

$$R_B=\frac{-8{,}3375\cdot10^{-11}}{-8{,}3375\cdot10^{-10}+3{,}125\cdot10^{-10}}=0{,}160\,m=16\,cm$$

Se pide la distancia máxima respecto de la primera, no las coordenadas del punto.

2023-Junio

A.1. a) La energía potencial en la órbita circular es $R_O=R_T+h$

$$E_p=-G\frac{M_T\cdot m}{R_T+h}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot10^{24}\cdot150}{6{,}37\cdot10^6+1200\cdot10^3}=-7{,}89\cdot10^9\,J$$

Utilizamos directamente la relación entre energía cinética y energía potencial en órbita circular, que habría que deducir. Ec = -½Ep=$3{,}95\cdot10^9$ J

También se podría calcular la velocidad igualando Fc=Fg llegando a a $v^2=GM/R_O$

b) Planteamos la conservación de energía entre la situación en el punto de lanzamiento de la superficie terrestre (A) y la situación en la que está en órbita (B)

Al tratarse de una órbita circular igualando Fc=Fg llegamos a $v^2=GM/R_B$ y Em(B)=Ep(B)+Ec(B)=-½GMm/R_B siendo $R_B=R_T+h$

$$E_{aportada}=E_m(B)-E_m(A)$$

$$E_{aportada}=\frac{-1}{2}G\frac{M\,m}{R_T+h}-\left(-G\frac{M\,m}{R_T}\right)=GMm\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2(R_T+h)}\right)$$

$$E_{aportada}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot150\left(\frac{1}{6{,}37\cdot10^6}-\frac{1}{2(6{,}37\cdot10^6+1200\cdot10^3)}\right)=5{,}43\cdot10^9\,J$$

B.1. a) $F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_O}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_O}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^6+1{,}6\cdot10^6}}=7{,}07\cdot10^3\,m/s$

$$v=\frac{2\pi R_O}{T}\Rightarrow T=2\pi(6{,}37\cdot10^6+1{,}6\cdot10^6)=7{,}08\cdot10^3\,s$$

b) Igualamos módulos de fuerzas gravitatorias de la Tierra y la Luna, que tendrán sentido opuesto.

$$G\frac{M_T\cancel{m}}{x^2}=G\frac{M_L\cancel{m}}{(d-x)^2}\Rightarrow\frac{M_T}{M_L}=\frac{x^2}{(d-x)^2}\Rightarrow\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}=\frac{x}{d-x}\Rightarrow x\cdot\left(1+\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}\right)=d\cdot\sqrt{\frac{M_T}{M_L}}$$

$$x=3{,}84\cdot10^8\cdot\frac{\sqrt{\frac{5{,}97\cdot10^{24}}{7{,}35\cdot10^{22}}}}{1+\sqrt{\frac{5{,}97\cdot10^{24}}{7{,}35\cdot10^{22}}}}=3{,}46\cdot10^8\,m$$

2023-Modelo

A.1. a) Planteamos la conservación de energía entre la situación en el punto de lanzamiento de la superficie terrestre (A) y la situación en la que está en órbita (B)

Al tratarse de una órbita circular igualando Fc=Fg llegamos a $v^2=GM/R_B$ y Em(B)=Ep(B)+Ec(B)=-½GMm/R_B siendo $R_B=R_T+h$

$$E_{aportada}=E_m(B)-E_m(A)$$
$$E_{aportada}=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_T+h}-(-G\frac{Mm}{R_T})=GMm(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2(R_T+h)})$$
$$E_{aportada}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot400(\frac{1}{6{,}37\cdot10^{6}}-\frac{1}{2(6{,}37\cdot10^{6}+15000\cdot10^{3})})=2{,}13\cdot10^{10}\,J$$

Se pide también el periodo: conociendo el radio se puede obtener a partir de 3ª ley de Kepler, que se puede deducir

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R_B^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R_B}\Rightarrow R_B^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2$$
$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}\cdot R_B^3}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}\cdot(6{,}37\cdot10^{6}+1{,}5\cdot10^{7})^3}=3{,}11\cdot10^{4}\,s$$

b) Planteamos la conservación de energía entre la situación en órbita (B) y un punto infinitamente alejado, que es infinito, donde la energía potencial es cero, al que llegue con velocidad nula (para que la energía aportada sea la mínima como se pide)

$$E_{aportada}=E_m(\infty)-E_m(B)$$
$$E_{aportada}=0-(\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_T+h})$$
$$E_{aportada}=\frac{1}{2}6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot10^{24}\cdot400}{2(6{,}37\cdot10^{6}+15000\cdot10^{3})}=3{,}73\cdot10^{9}\,J$$

B.1. *Similar a 2008-Mod-C1 pero con 2 masas en lugar de con cuatro.*

a) La fuerza total será la suma de las fuerzas aplicadas por cada masa, aplicando superposición, o también el campo total, calculado por superposición, multiplicado por la masa.

La masa 1 genera una fuerza atractiva solo en el eje y, de módulo

$$|\vec{F}_{2y}|=\frac{GMm}{r^2}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot15\cdot5}{1^2}=5{,}00\cdot10^{-9}\,N$$

La masa 2 genera una fuerza atractiva con componente x y componente y, ambas negativas, que podemos calcular de dos maneras:

A. Por trigonometría, utilizando el ángulo que forma r_1 con el eje x, cuya tangente es ½

La distancia de la masa 1 al punto (2, 1) usando Pitágoras es $d_1=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}\,m$

$$|\vec{F}_{1x}|=\frac{GMm}{r^2}\cos(\arctan(\frac{1}{2}))=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot10\cdot5}{5}\cdot0{,}894=5{,}97\cdot10^{-10}\,N$$
$$|\vec{F}_{1y}|=\frac{GMm}{r^2}sen(\arctan(\frac{1}{2}))=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot10\cdot5}{5}\cdot0{,}447=2{,}98\cdot10^{-10}\,N$$

Sumando vectores tomando signos del diagrama, la fuerza total es

$$\vec{F}=-5{,}97\cdot10^{-10}\vec{i}-5{,}30\cdot10^{-9}\vec{j}\,N$$

B. Teniendo presente que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|r|}$ y $\vec{F}=\frac{-GMm}{r^2}\vec{u}_r$

$$\vec{F}_T=\vec{F}_1+\vec{F}_3=\frac{-GM_1\cdot m}{r_1^2}\vec{u}_{r1}-\frac{GM_3\cdot m}{r_2^2}\vec{u}_{r2}$$
$$\vec{F}_T=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot10\cdot5}{5}\frac{(2\vec{i}+1\vec{j})}{\sqrt{5}}+\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot15\cdot5}{1^2}\vec{j}$$

Se llega al mismo resultado $\vec{F}=-5{,}97\cdot10^{-10}\vec{i}-5{,}30\cdot10^{-9}\vec{j}\,N$

b) El trabajo realizado por el campo gravitatorio, que es conservativo, solo depende del punto inicial y final, no de la trayectoria, así que es el mismo por los tres caminos A, B y C del diagrama. Sin estar la masa de 5 kg presente, el campo lo genera m_1 y se mueve m_2.

$$W_{campo\,(2,0)\rightarrow(0,1)}=-\Delta E_p=-m_2\Delta V=-m_2\left(-G\frac{m_1}{d_{(0,0)-(0,1)}}-\left(-G\frac{m_1}{d_{(0,0)-(2,0)}}\right)\right)$$

$$W_{campo\,(2,0)\rightarrow(0,1)}=15\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 10\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)=5{,}00\cdot 10^{-9}\,J$$

El trabajo realizado por el campo es positivo y es a favor del campo: la masa pasa a una posición más cercana.

2022-Julio-Coincidentes

A.1. a) Calculamos el radio de la órbita planteando la tercera ley de Kepler igualando fuerza gravitatoria y centrípeta en órbita circular y usando v=2πR/T. Al ser geoestacionario T=24 h.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow R^3=\frac{G\,M}{4\pi^2}T^2$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}{4\pi^2}(24\cdot 3600)^2}=4{,}22\cdot 10^7\,m$$

b) Planteamos la conservación de energía entre ambas órbitas: la diferencia será la energía aportada. Llamamos A a la órbita inicial y B a la órbita con radio 3 veces mayor.
En la órbita la energía es la suma de potencial y cinética: E_m=-GMm/R + ½mv^2, y teniendo en cuenta que v^2=GM/R, llegamos a E_m= - ½GMm/R.

$$E_m(A)+E_{aportada}=E_m(B)\Rightarrow E_{aportada}=E_m(B)-E_m(A)$$

$$E_{aportada}=\frac{-1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 500}{3\cdot 4{,}22\cdot 10^7}-\left(\frac{-1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 500}{4{,}22\cdot 10^7}\right)$$

$$E_{aportada}=\frac{-1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 500}{4{,}22\cdot 10^7}\left(\frac{1}{3}-1\right)=1{,}57\cdot 10^9\,J$$

B.1. a) Conociendo la energía mecánica y la velocidad podemos calcular la energía potencial.
Ep=Em-Ec=$9{,}9\cdot 10^{-10}$- ½ $\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot(10^{-3})^2=-10^{-11}$ J
El potencial es la energía potencial por unidad de masa, V=Ep/m=$-10^{-11}/2\cdot 10^{-3}=-5\cdot 10^{-9}$ J/kg
b) El potencial calculado en apartado a está generado por la única masa M
V=-GM/d → M=-V·d/G=$-(-5\cdot 10^{-9}\cdot 5)/6{,}67\cdot 10^{-11}$=375 kg

2022-Julio

A.1. a) Planteamos la deducción de la tercera ley de Kepler igualando fuerza gravitatoria y centrípeta y usando v=2πr/T ya que es una trayectoria circular (usamos r como en enunciado)

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{r^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{r}\Rightarrow r^3=\frac{G\,M}{4\pi^2}T^2$$

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}\cdot r^3}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}\cdot(6{,}37\cdot 10^6+700\cdot 10^3)^3}=5{,}92\cdot 10^3\,s\approx 1{,}64\,h$$

b) En la órbita la energía es la suma de potencial y cinética: E_m=-GMm/R + ½mv^2, y teniendo en cuenta que v^2=GM/R, llegamos a E_m= - ½GMm/R.
Numéricamente

$$E_m=\frac{-1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 2300}{6{,}37\cdot 10^6+700\cdot 10^3}=-6{,}48\cdot 10^{10}\,J$$

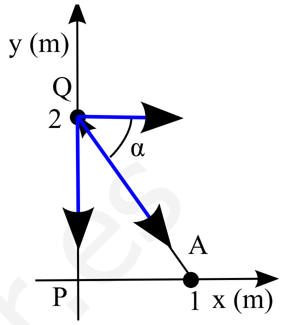
B.1. a) Llamamos P al origen (0, 0) y Q al punto (0, 2). Solamente actúa la fuerza gravitatoria y se conserva la energía mecánica. La distancia del punto A al Q es $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}\,m$ y la distancia del punto A al P es 1 m.

$$W_{campo\,P\rightarrow Q}=-\Delta E_p=-m_B\Delta V=-m_B(-G\frac{m_A}{d_{AQ}}-(-G\frac{m_A}{d_{AP}}))$$

$$-2{,}95\cdot 10^{-10}=-m_B(-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{1}))$$

$$m_B=\frac{-2{,}95\cdot 10^{-10}}{-6{,}67\cdot 10^{-11}2\cdot(\frac{1}{\sqrt{5}}-1)}=4{,}0\,kg$$

b) a) El campo en el punto Q estará dirigido hacia el punto A. El vector que va desde el punto Q a A es (1, -2) m y su módulo usando Pitágoras es $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}\,m$. El ángulo que forma el vector campo con la horizontal lo llamamos α, y tendrá componente x positiva e y negativa.



$$\vec{g}=g_x\vec{i}-g_y\vec{j}=g\cdot\cos(\alpha)\vec{i}-g\,sen(\alpha)\vec{j}$$

El módulo es $g=GM/R^2=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2/5=2{,}67\cdot 10^{-11}$ m/s^2

$$\vec{g}=2{,}67\cdot 10^{-11}(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j})=1{,}19\cdot 10^{-11}\vec{i}-2{,}39\cdot 10^{-11}\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$$

2022-Junio-Coincidentes

A.1. a) Calculamos el radio de la órbita planteando la tercera ley de Kepler igualando fuerza gravitatoria y centrípeta en órbita circular y usando v=2πR/T

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}39\cdot 10^{23}}{4\pi^2}(12\cdot 3600)^2}=1{,}263\cdot 10^7\,m$$

Se pide altura $h=R-R_M=1{,}263\cdot 10^7-3{,}39\cdot 10^6=9{,}24\cdot 10^6$ m

b) Planteamos la conservación de energía mecánica entre la situación en la que la velocidad orbital es cero (mientras están funcionando los retrocohetes no se conserva) y el momento de impacto en el suelo lunar. En el punto superior (A) solo tiene energía potencial, y en el punto inferior (B), tiene energía potencial y energía cinética.

$$E_m(A)=E_m(B)\Rightarrow E_p(A)=E_p(B)+E_c(B)\Rightarrow -G\frac{M\cancel{m}}{R_A}=-G\frac{M\cancel{m}}{R_B}+\frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6{,}39\cdot 10^{23}}{1{,}263\cdot 10^7}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6{,}39\cdot 10^{23}}{3{,}39\cdot 10^6}+\frac{1}{2}v^2$$

$$v=\sqrt{2(-3{,}375\cdot 10^6+1{,}257\cdot 10^7)}=4{,}29\cdot 10^3\,m/s$$

B.1. a) El campo en el punto Q estará dirigido hacia el punto P. El vector que va desde el punto P a Q es (100, -20) m y su módulo usando Pitágoras es $\sqrt{100^2+20^2}=102\,m$. El ángulo que forma el vector campo con la horizontal lo llamamos α, y tendrá componente x negativa e y positiva.

$$\vec{g}=-g_x\vec{i}+g_y\vec{j}=-g\cdot\cos(\alpha)\vec{i}+g\,sen(\alpha)\vec{j}$$

El módulo es $g=GM/R^2=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5/102^2=3{,}2\cdot 10^{-14}$ m/s^2

$$\vec{g}=3{,}2\cdot 10^{-14}(\frac{-100}{102}\vec{i}+\frac{20}{102}\vec{j})=-3{,}14\cdot 10^{-14}\vec{i}+6{,}28\cdot 10^{-15}\vec{j}\,m/s^2$$

b) El punto (50, 10) m está en la recta que une los puntos P y Q: el vector velocidad estará contenido en dicha recta y su vector unitario será el mismo que el vector unitario del campo. Solamente actúa la fuerza gravitatoria y se conserva la energía mecánica. Llamamos R al punto en (50, 10) m.

$$E_m(Q)=E_m(R)\Rightarrow E_p(Q)=E_p(R)+E_c(R)\Rightarrow -G\frac{M\cancel{m}}{R_Q}=-G\frac{M\cancel{m}}{R_R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5}{102}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5}{51}+\frac{1}{2}v^2$$

$$v=\sqrt{2(-3{,}27\cdot 10^{-12}+6{,}54\cdot 10^{-12})}=2{,}56\cdot 10^{-6}\,m/s$$

Se pide vector, así que no basta solo el módulo v, hay que dar coordenadas.

$$\vec{v}=2{,}56\cdot10^{-6}\left(\frac{-100}{102}\vec{i}+\frac{20}{102}\vec{j}\right)=-2{,}51\cdot10^{-6}\vec{i}+5{,}01\cdot10^{-7}\vec{j}\,m/s$$

2022-Junio

A.1. *Apartado a similar a 2021-Junio-A1*

a) Llamamos A al punto (8, 6) m. La distancia entre la masa en el origen y el punto A usando Pitágoras es $\sqrt{6^2+8^2}=10\,m$. El ángulo que forma con la horizontal lo llamamos α, y el vector campo estará dirigido hacia el origen.

$$\vec{g}=-g_x\vec{i}-g_y\vec{j}=-g\cdot\cos(\alpha)\vec{i}-g\,sen(\alpha)\vec{j}$$

El módulo es $g=GM/R^2=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot20/10^2=1{,}334\cdot10^{-11}$ m/s^2

$$\vec{g}=-1{,}334\cdot10^{-11}\left(\frac{8}{10}\vec{i}+\frac{6}{10}\vec{j}\right)=-1{,}07\cdot10^{-11}\vec{i}-8{,}00\cdot10^{-12}\vec{j}\,m/s^2$$

$$\vec{F}=m\cdot\vec{g}=-3{,}21\cdot10^{-11}\vec{i}-2{,}4\cdot10^{-11}\vec{j}\,N$$

b) Solamente actúa la fuerza gravitatoria y se conserva la energía mecánica. Llamamos B al punto en el que se detiene, en el que la energía cinética será nula.

$$E_m(A)=E_m(B)\Rightarrow E_p(A)+E_c(A)=E_p(B)\Rightarrow -G\frac{Mm}{R_A}+\frac{1}{2}mv^2=-G\frac{Mm}{R_B}$$

$$-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{20\cdot3}{10}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot(1{,}2\cdot10^{-5})^2=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{20\cdot3}{R_B}$$

$$R_B=\frac{-4\cdot10^{-9}}{-4\cdot10^{-10}+2{,}16\cdot10^{-10}}=21{,}74\,m$$

R_B es distancia al origen y se pide el punto: será (21,74·8/10; 21,74·6/10) → B=(17,4 ; 13,04) m

B.1. a) Utilizamos directamente la expresión de velocidad de escape, que habría que deducir.
Si el diámetro de Marte es la mitad que el de la Tierra, su radio también es la mitad.

$$\frac{v_{eT}}{v_{eM}}=\frac{\sqrt{\cancel{2G}\frac{M_T}{R_T}}}{\sqrt{\cancel{2G}\frac{M_M}{R_M}}}=\sqrt{\frac{M_T}{M_M}\cdot\frac{R_M}{R_T}}=\sqrt{10\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{5}\Rightarrow v_{eT}=\sqrt{5}\,v_{eM}$$

b) Solamente actúa la fuerza gravitatoria y se conserva la energía mecánica. Usamos directamente expresión de velocidad de escape que habría que deducir.
A (superficie antes del lanzamiento):

$$E_p=-G\frac{Mm}{R_T};\,E_c=\frac{1}{2}mv_{eM}^2=\frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}G\frac{M_M}{R_M}=G\frac{(M_T/10)m}{R_T/2}=\frac{1}{5}G\frac{M_T m}{R_T}$$

Se puede usar resultado de apartado para llegar a misma expresión para la energía cinética

$$E_c=\frac{1}{2}mv_{eM}^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\sqrt{5}}v_{eT}\right)^2=\frac{1}{\cancel{2}}m\cancel{2}\frac{1}{5}G\frac{M_T}{R_T}=\frac{1}{5}G\frac{M_T m}{R_T}$$

B (máxima altura): $E_p=-G\frac{Mm}{R_{máx}};E_c=0$

$$E_m(A)=E_m(B)\Rightarrow -\cancel{G}\frac{\cancel{M_T m}}{R_T}+\frac{1}{5}\cancel{G}\frac{\cancel{M_T m}}{R_T}=-\cancel{G}\frac{\cancel{M_T m}}{R_{máx}}\Rightarrow -\frac{4}{5}\frac{1}{R_T}=\frac{-1}{R_{máx}}\Rightarrow R_{máx}=\frac{5}{4}R_T$$

Se pide altura $h=R_{máx}-R_T=(5/4-1)R_T=R_T/4=1{,}59\cdot10^6$ m

2022-Modelo

A.1. a) Llamamos A al afelio y B al perihelio

$W_{\text{realizado campo } A\rightarrow B}=-\Delta E_p=-M\cdot\Delta V=-M\cdot(V(B)-V(A))$

$$V(B)=\frac{-GM}{R}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1{,}99\cdot10^{30}}{1{,}47\cdot10^{11}}=-9{,}03\cdot10^8\,J/kg$$

$$V(A)=\frac{-GM}{R}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1{,}99\cdot10^{30}}{1{,}52\cdot10^{11}}=-8{,}73\cdot10^8\,J/kg$$

$$W_{realizado\,campo\,A\rightarrow B}=-5{,}97\cdot10^{24}\cdot(-9{,}03\cdot10^{8}-(-8{,}73\cdot10^{8}))=1{,}79\cdot10^{32}\,J$$

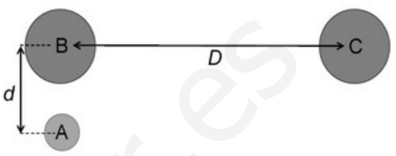
b) La energía mecánica se conserva durante toda la órbita, y es la suma de energía cinética y potencial. La energía potencial es máxima en el afelio y mínima en el perihelio, por lo que la energía cinética es mínima en el afelio y máxima en el perihelio. Planteamos en perihelio

$$E_m=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=M\cdot V(B)+\frac{1}{2}mv^2$$

$$-2{,}65\cdot10^{33}=-5{,}97\cdot10^{24}\cdot9{,}03\cdot10^{8}+\frac{1}{2}5{,}97\cdot10^{24}v^2$$

$$v=\sqrt{2\cdot\frac{(-2{,}65\cdot10^{33}+5{,}97\cdot10^{24}\cdot9{,}03\cdot10^{8})}{5{,}97\cdot10^{24}}}=3{,}03\cdot10^{4}\,m/s$$

B.1. a) Planteamos usando la ley de gravitación universal, aplicando Pitágoras para calcular la distancia entre C y A



$$F_{CA}=\frac{1}{10}F_{BA}\Rightarrow\cancel{G}\frac{M_C\cancel{M_A}}{d_{CA}^2}=0{,}1\cancel{G}\frac{M_B\cancel{M_A}}{d_{BA}^2}\Rightarrow\frac{M_C}{d^2+D^2}=0{,}1\frac{M_B}{d^2}$$

Aplicando la condición del enunciado $M_B=M_C$

$$d^2=0{,}1(d^2+D^2)\Rightarrow0{,}9d^2=0{,}1D^2\Rightarrow D=3d$$

b) El peso de A sobre la superficie terrestre es la fuerza gravitatoria usando la masa de la Tierra y su radio, datos del enunciado.

$$F_{BA}=10^{-9}F_{Tierra\,sobre\,10\,kg}\Rightarrow\cancel{G}\frac{M_B\cancel{M_A}}{d^2}=10^{-9}\cancel{G}\frac{M_T\cdot\cancel{M_A}}{R_T^2}\Rightarrow\frac{10}{d^2}=10^{-9}\frac{5{,}97\cdot10^{24}}{(6{,}37\cdot10^{6})^2}$$

$$d=\sqrt{\frac{10\cdot(6{,}37\cdot10^{6})^2}{10^{-9}5{,}97\cdot10^{24}}}=0{,}26\,m$$

2021-Julio

A.1. a) Calculamos el radio de la órbita, sabiendo que describe un movimiento circular uniforme

v=2πR/T → R=v·T/2π=(25000/3,6)·5·3600/2π=1,9894·10^7 m

Planteamos la tercera ley de Kepler igualando fuerza gravitatoria y centrípeta y usando v=2πR/T

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2$$

$$M=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2\cdot(1{,}9894\cdot10^{7})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(5\cdot3600)^2}=1{,}4383\cdot10^{25}\,kg$$

b) $$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho\Rightarrow\rho=R=\sqrt[3]{\frac{M}{\frac{4}{3}\pi\rho}}=\sqrt[3]{\frac{1{,}4383\cdot10^{25}}{\frac{4}{3}\pi\,16150}}=5{,}9685\cdot10^{6}m$$

$$g=G\frac{M}{R^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1{,}4383\cdot10^{25}}{(5{,}9685\cdot10^{6})^2}=26{,}931\frac{m}{s^2}$$

B.1. a) El vector campo está dirigido hacia la masa en el centro de coordenadas.

La distancia entre la masa y el punto (2, 2) usando Pitágoras es $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\,m\approx2{,}83\,m$

El módulo de la componente x del campo será $|g_x|=|g|\cos45^o=G\frac{m}{d^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$1{,}18\cdot\cancel{10^{-11}}=6{,}67\cdot\cancel{10^{-11}}\cdot\frac{m}{(2\sqrt{2})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow m=\frac{1{,}18}{6{,}67}\cdot4\cdot2\cdot\sqrt{2}\approx2{,}00\,kg$$

b) Llamamos A al punto (4, 0) y B al punto (2, 2)

$W_{realizado\,campo\,A\rightarrow B}$ = -ΔE_p=-M·ΔV=-M·(V(B)-V(A))

$$V(B)=\frac{-GM}{R}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{-6{,}67}{\sqrt{2}}\cdot10^{-11}\,J/kg$$

$$V(A)=\frac{-GM}{R}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{2}{4}=-3{,}335\cdot10^{-11}\,J/kg$$

$$W_{realizado\,campo\,A\rightarrow B}=-5\cdot\left(\frac{-6{,}67}{\sqrt{2}}\cdot 10^{-11}-\left(-3{,}335\cdot 10^{-11}\right)\right)=6{,}91\cdot 10^{-11}\,J$$

Trabajo realizado por el campo positivo, es a favor del campo: estamos llevando una masa a potenciales menores, la acercamos a la única masa que genera el campo.

2021-Junio-Coincidentes

A.1. a) Planteamos la tercera ley de Kepler igualando fuerza gravitatoria y centrípeta y usando v=2πR/T ya que es una trayectoria circular

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2$$

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}\cdot R^3}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6}\cdot(2{,}5)^3}=1{,}24\cdot 10^6\,s$$

b) La energía mínima a suministrar al perdigón para que escape del campo gravitatorio de la bola (llega a una posición infinitamente alejada con velocidad nula) es la diferencia de energía entre ambas situaciones: E órbita + E suministrada = E infinito

En el infinito la energía potencia y cinética es nula.

En la órbita la energía es la suma de potencial y cinética: Em=-GMm/R + ½mv^2, y teniendo en cuenta que v^2=GM/R, llegamos a Em= - ½GMm/R, de modo que la energía a suministrar, positiva, será ½GM/R=0,5·6,67·10^{-11}·6·0,35·10^{-3}/2,5=2,8·10^{-14} J

B.1. a) Planteamos la tercera ley de Kepler igualando fuerza gravitatoria y centrípeta y usando v=2πR/T para trayectorias circulares

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2$$

Como se indica el periodo de revolución de Júpiter y la masa del Sol, podemos calcular el radio de la órbita de Júpiter, para obtener a partir de él el radio de 51 Pegasus b. Tomamos 1 año = 365 días.

$$R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}}{4\pi^2}\cdot(12\cdot 365\cdot 24\cdot 3600)^2}=7{,}838\cdot 10^{11}\,m$$

Aplicamos ahora la 3ª ley para calcular la masa de la estrella respecto a la que orbita 51 Pegasus b, del que ya conocemos radio, 100 veces menor que el de Júpiter calculado, y periodo, dato, 4 días.

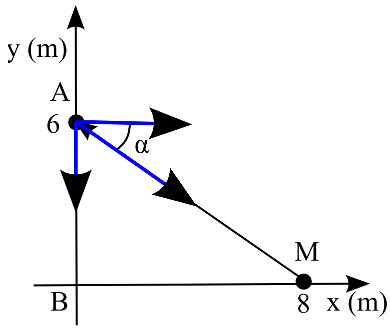
$$M=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2(7{,}838\cdot 10^{11}/100)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(4\cdot 24\cdot 3600)^2}=2{,}39\cdot 10^{30}\,kg$$

b) En la órbita la energía es la suma de potencial y cinética: E_m=-GMm/R + ½mv^2, y teniendo en cuenta que v^2=GM/R, llegamos a E_m= - ½GMm/R. Numéricamente

$$E_m=\frac{-1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{2{,}39\cdot 10^{30}\cdot(51\cdot 1{,}90\cdot 10^{27})}{7{,}838\cdot 10^{11}/100}=-9{,}85\cdot 10^{38}\,J$$

2021-Junio

A.1. a) La distancia entre la masa y el punto A usando Pitágoras es $\sqrt{6^2+8^2}=10\,m$



V(A)=-GM/R=-6,67·10^{-11}·50·10^{-3}/10=-3,34·10^{-13} J/kg

$$\vec{g}=g_x\vec{i}-g_y\vec{j}=g\cdot\cos(\alpha)\vec{i}-g\,sen(\alpha)\vec{j}$$

El módulo es g=GM/R^2=-6,67·10^{-11}·50·10^{-3}/10^2=-3,34·10^{-14} m/s^2

$$\vec{g}=-3{,}34\cdot 10^{-14}\left(\frac{8}{10}\vec{i}-\frac{6}{10}\vec{j}\right)=2{,}67\cdot 10^{-14}\vec{i}-2{,}00\cdot 10^{-14}\vec{j}\,m/s^2$$

b) $W_{realizado\,campo\,A\rightarrow B}$ = -ΔE_p=-m·ΔV=-m·(V(B)-V(A))

V(B)=-GM/R=-6,67·10^{-11}·50·10^{-3}/8=-4,17·10^{-13} J/kg

$W_{realizado\,campo\,A\rightarrow B}$ = -20·10^{-3}·(-4,17·10^{-13} -(-3,34·10^{-13}))=1,66·10^{-15} J

Trabajo realizado por el campo positivo, es a favor del campo: estamos llevando una masa a potenciales menores, la acercamos a la única masa que genera el campo.

B.1. a) Calculamos el radio de la órbita, planteamos la tercera ley de Kepler igualando fuerza gravitatoria y centrípeta y considerando órbita circular por lo que v=2πR/T

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}68\cdot 10^{26}}{4\pi^2}(36\cdot 3600)^2}\approx 2{,}53\cdot 10^8\,m$$

$$v=\frac{2\pi R}{T}=\frac{2\pi 2{,}53\cdot 10^8}{36\cdot 3600}=1{,}23\cdot 10^4\,m/s$$

Dado que en órbita circular v^2=GM/R

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R} \Rightarrow E_m=-E_c$$

Numéricamente $E_m=-E_c=\frac{-1}{2}3500\cdot(1{,}23\cdot 10^4)^2\approx -2{,}65\cdot 10^{11}\,J$

b) La energía a suministrar es la diferencia de energía entre ambas situaciones. La situación final sería un punto infinitamente alejado en el que no tendría energía potencial ni cinética, por lo que su energía mecánica sería cero. La energía a aportar para que la energía total sea cero, teniendo energía mecánica en órbita negativa, es el mismo valor numérico pero en positivo.

$E_{suministrada}=E_{final}-E_{inicial} \rightarrow$ Esuministrada=0-$E_{m\ órbita}$=$2{,}65\cdot 10^{11}$ J

2021-Modelo

A.1. a) Asumiendo órbita circular, y al ser un periodo tan largo de tiempo consideramos los años de 365,25 días (para contabilizar bisiestos) $v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\pi 2{,}4\cdot 10^{20}}{203\cdot 10^6\cdot 365{,}25\cdot 24\cdot 3600}=2{,}35\cdot 10^5\,m/s$

b) Planteamos la tercera ley de Kepler igualando fuerza gravitatoria y centrípeta y llamamos M a la masa del centro galáctico y m a la del Sol.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \Rightarrow M=\frac{v^2R}{G}=\frac{(2{,}35\cdot 10^5)^2\cdot 2{,}4\cdot 10^{20}}{6{,}67\cdot 10^{-11}}=1{,}99\cdot 10^{41}\,kg$$

B.1. a) Utilizamos directamente la expresión de velocidad de escape, que habría que deducir.

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}} \Rightarrow R=2\frac{GM}{v_e^2} \qquad \frac{R_P}{R_T}=\frac{2\frac{GM_P}{v_{ep}^2}}{2\frac{GM_T}{v_{eT}^2}}=\frac{M_p}{M_T}\frac{v_{eT}^2}{v_{eP}^2}=360\cdot\frac{1}{6^2}=10$$

b) $$\frac{g_P}{g_T}=\frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_p}{M_T}\frac{R_T^2}{R_P^2}=360\cdot\frac{1}{10^2}=3{,}6$$

2020-Septiembre

A.1. a) Para calcular masa nos basta con el dato de densidad y el dato de radio que nos permite calcular el volumen asumiendo que es esféricos. Pasamos datos a Sistema Internacional.

$$M_{Calisto}=\rho\cdot V=\rho\frac{4}{3}\pi R_{Calisto}^3=1830\cdot\frac{4}{3}\pi(2410\cdot 10^3)^3\approx 1{,}07\cdot 10^{23}\,kg$$

La aceleración de la gravedad es un vector, que será radial, dirigido hacia el centro, y su módulo será $g_{Calisto}=G\frac{M_{Calisto}}{R_{Calisto}^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1{,}07\cdot 10^{23}}{(2410\cdot 10^3)^2}\approx 1{,}23\,m/s^2$

b) Para calcular el radio de la órbita, planteamos la tercera ley de Kepler igualando fuerza gravitatoria y centrípeta y considerando órbita circular por lo que v=2πR/T

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}90\cdot 10^{27}}{4\pi^2}(16{,}89\cdot 24\cdot 3600)^2}\approx 1{,}898\cdot 10^9\,m$$

Dado que en órbita circular v^2=GM/R

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R}\Rightarrow E_m=-E_c$$

Numéricamente

$$E_m=-E_c=\frac{-1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1{,}90\cdot 10^{27}\cdot 1{,}07\cdot 10^{23}}{1{,}898\cdot 10^{9}}\approx -3{,}57\cdot 10^{30}\,J$$

B.1. a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria que es centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3$$

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}42\cdot 10^{23}}(3{,}39\cdot 10^6+290\cdot 10^3)^3}\approx 6{,}68\cdot 10^3\,s$$

Al ser la órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}=\frac{2\pi(3{,}39\cdot 10^6+290\cdot 10^3)}{(6{,}68\cdot 10^3)}\approx 3{,}46\cdot 10^3\,m/s$

b) La energía a suministrar es la diferencia de energía entre los dos puntos

A (órbita, antes de suministrar la energía): $E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R}$

B (∞): $E_p=0\,;E_c=0$

La diferencia es $E(B)-E(A)=0-(\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R})=\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}$

Numéricamente $E(B)-E(A)=\frac{1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6{,}42\cdot 10^{23}\cdot 1031}{2\cdot(3{,}39\cdot 10^6+290\cdot 10^3)}\approx 6{,}0\cdot 10^9\,J$

2020-Julio-Coincidentes

A.1. a) Usamos la definición de g, y simplificamos sabiendo que $M_P=M_T$.

$$g_P=2g_T\Rightarrow \cancel{G}\frac{\cancel{M_P}}{R_P^2}=2\cancel{G}\frac{\cancel{M_T}}{R_T^2}\Rightarrow R_P^2=\frac{1}{2}R_T^2\Rightarrow R_P=\frac{1}{\sqrt{2}}R_T=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 6370\cdot 10^3\approx 4{,}5\cdot 10^6\,m$$

b) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A a una distancia R a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R}\,;E_c=\frac{1}{2}mv_e^2$

B (∞): $E_p=0\,;E_c=0$

Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Numéricamente $v_e=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}{4{,}5\cdot 10^6}}=1{,}33\cdot 10^4\,m/s$

B.1. a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria que es centrípeta. Al ser la órbita circular v=2πR/T

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow G=\frac{4\pi^2R^3}{MT^2}=\frac{4\pi^2(6{,}97\cdot 10^6)^3}{5{,}98\cdot 10^{24}\cdot(96{,}5\cdot 60)^2}\approx 6{,}67\cdot 10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$$

b) Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

Numéricamente $E_m=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 6000}{2\cdot 6{,}97\cdot 10^6}=-1{,}72\cdot 10^{11}\,J$

2020-Julio

A.1. a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria que es centrípeta

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \Rightarrow v=\sqrt{G\frac{M}{R}}=\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1{,}90\cdot 10^{27}}{1{,}59\cdot 10^5\cdot 10^3}}=2{,}82\cdot 10^4\, m/s$$

b) Al ser una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T} \Rightarrow T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi 1{,}59\cdot 10^5\cdot 10^3}{2{,}82\cdot 10^4}=3{,}54\cdot 10^4 s$

Al ser una órbita sincrónica, el periodo del satélite calculado es el periodo de rotación pedido.

B.1. a) $g=G\frac{M}{R^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1{,}95\cdot 10^{25}}{(5500\cdot 10^3)^2}\approx 43\, m/s^2$

b) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A a una distancia R a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R}; E_c=\frac{1}{2}m v_e^2$

B (∞): $E_p=0; E_c=0$

Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m} v_e^2=0 \Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Numéricamente $v_e=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}95\cdot 10^{25}}{5500\cdot 10^3}}=2{,}17\cdot 10^4\, m/s$

2020-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa el satélite es la gravitatoria y es radial si asumimos órbita circular.
Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \qquad v=\frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2 \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

Si completa 15 órbitas en 24 h, el periodo es T=24/15 h. Sustituyendo valores numéricos

$$R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}{4\pi^2}\left(\frac{24\cdot 3600}{15}\right)^2}=6{,}94\cdot 10^6 m$$

Como se pide altura, $h=R-R_T=6{,}94\cdot 10^6-6371\cdot 10^3=5{,}69\cdot 10^5$ m

b) Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m v^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

Numéricamente $E_m=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 5800}{2\cdot 6{,}94\cdot 10^6}=-1{,}66\cdot 10^{11} J$

B. Pregunta 1.-.

a) La única fuerza que actúa el planeta es la gravitatoria y es radial al ser la órbita circular.
Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \qquad v=\frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2 \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

Si completa 1 vuelta en 3 años terrestres, el periodo son los 3 años terrestres (usamos 365,25 días)

Sustituyendo valores numéricos $R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}0\cdot 10^{30}}{4\pi^2}(3*365{,}25\cdot 24\cdot 3600)^2}=4{,}5\cdot 10^{11} m$

b) Usando la definición de campo gravitatorio $g=G\frac{M_p}{R_{superficie}^2} \Rightarrow R_{superficie}^2=\frac{GM_p}{g}$

Usamos directamente la expresión de velocidad de escape, que se podría deducir

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM_p}{R_{superficie}}}\Rightarrow M_p=\frac{v_e^2\cdot R_{superficie}}{2G}$$

Sustituyendo M_p $R_{\cancel{superficie}}^{2}=\cancel{G}\frac{v_e^2\cdot \cancel{R_{superficie}}}{2g\cancel{G}}=\frac{(11{,}2\cdot 10^3)^2}{2\cdot 15}=4{,}18\cdot 10^6\, m$

$$M_p=\frac{g\,R_{superficie}^2}{G}=\frac{15\cdot(4{,}18\cdot 10^6)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}}=3{,}93\cdot 10^{24}\, kg$$

2019-Julio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa la nave es la gravitatoria y es radial en una órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R} \qquad v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

En un satélite geoestacionario el periodo son 24 h. Sustituyendo valores numéricos

$$R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}{4\pi^2}(24\cdot 3600)^2}=4{,}22\cdot 10^7\, m$$

La velocidad orbital es $v=\frac{2\cdot\pi\cdot 4{,}22\cdot 10^7}{(24\cdot 3600)}=3{,}1\cdot 10^3\, m/s$

b) En la nueva órbita varía radio, periodo y velocidad. Se puede resolver de varias maneras, todas son válidas.

-La más rápida sería utilizar $v^2=\frac{GM}{R}\Rightarrow v=\sqrt{G\frac{M}{R}}=\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot 10^{24}}{2\cdot 4{,}22\cdot 10^7}}=2{,}17\cdot 10^3\, m/s$

Otra opción, sabiendo radio, es calcular periodo, que se puede hacer de varias maneras
-Con el mismo planteamiento del apartado anterior:

$$v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R^3}$$

Numéricamente $T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}(2\cdot 4{,}22\cdot 10^7)^3}=2{,}44\cdot 10^5\, s$

-Usando la tercera ley de Kepler teniendo en cuenta que ambas órbitas son sobre mismo objeto centrales

$$\frac{T_1^2}{R_1^3}=\frac{T_2^2}{R_2^3}\Rightarrow T_2=T_1\sqrt{\frac{R_2^3}{R_1^3}}=24\cdot 3600\cdot\sqrt{2^3}=2{,}44\cdot 10^5\, s$$

La nueva velocidad orbital es $v=\frac{2\cdot\pi\cdot 2\cdot 4{,}22\cdot 10^7}{(2{,}44\cdot 10^5)}=2{,}17\cdot 10^3\, m/s$

B. Pregunta 1.-

a) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A a una distancia R a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}m v_e^2$

B (∞): $E_p=0;E_c=0$

Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Numéricamente para R=2R$_T$ $v_e=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}{2\cdot 6{,}37\cdot 10^{6}}}=7{,}906\cdot 10^{3}\,m/s$

b) La energía adicional requerida es la diferencia de energía entre los dos puntos

A (órbita, antes de aportar la energía): $E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m v^2=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R}$

B (∞): $E_p=0\,;E_c=0$

La diferencia es $E(B)-E(A)=0-(\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R})=\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}$

Numéricamente $E(B)-E(A)=\frac{1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 10^{3}}{2\cdot 6{,}37\cdot 10^{6}}=1{,}56\cdot 10^{10}\,J$

2019-Julio

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial al ser la órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\qquad v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R^3}$$

Sustituyendo valores numéricos $T=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(6{,}37\cdot 10^6+5900\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}}=1{,}35\cdot 10^4\,s$

b) La energía requerida es la energía a aportar, que es la diferencia de energía entre ambas situaciones.

A (superficie antes del lanzamiento): $E_p=-G\frac{Mm}{R_T}\,;E_c=0$

B (órbita): De igualar fuerza gravitatoria y centrípeta en una órbita circular se llega a

$$E_m=E_m+E_p=\frac{-GMm}{R_O}+\frac{1}{2}m v^2=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_O}$$

La diferencia es $E(B)-E(A)=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_O}-(\frac{-GMm}{R_T})=GMm(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{2R_O})$

Numéricamente

$$E(B)-E(A)=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 405(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{2(6{,}37\cdot 10^6+5900\cdot 10^3)})=1{,}87\cdot 10^{10}\,J$$

B. Pregunta 1-.

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial al ser la órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\qquad v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2\Rightarrow M=\frac{4\pi^2 R^3}{G T^2}$$

Sustituyendo valores numéricos (radio de órbita) $M=\frac{4\pi^2\cdot(671100\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(3{,}55\cdot 24\cdot 3600)^2}=1{,}9\cdot 10^{27}\,kg$

b) Deducimos la expresión de la velocidad de escape aplicando el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A en la superficie del planeta a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R}\,;E_c=\frac{1}{2}m v_e^2$

B (∞): $E_p=0\,;E_c=0$

Igualando energía mecánica en A y en B y despejando la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Numéricamente (radio de planeta) $v_e=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}9\cdot10^{27}}{69911\cdot10^3}}=6\cdot10^4\,m/s$

2019-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta en órbita circular.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{1737\cdot10^3+250\cdot10^3}}=1{,}57\cdot10^3\,m/s$$

La energía total del satélite en órbita es la energía mecánica

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}=\frac{-1}{2}mv^2$$

Numéricamente $E_m=\frac{-1}{2}\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}\cdot1{,}6\cdot10^4}{1737\cdot10^3+250\cdot10^3}=-1{,}97\cdot10^{10}\,J$

b) Deducimos la expresión de la velocidad de escape aplicando el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A en la superficie del planeta a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}mv_e^2$

B (∞): $E_p=0;E_c=0$

Igualando energía mecánica en A y en B y despejando la velocidad de escape

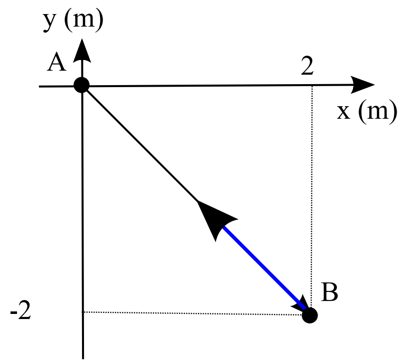
$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Numéricamente $v_e=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{1737\cdot10^3}}=2{,}38\cdot10^3\,m/s$

Usando la definición de gravedad como fuerza por unidad de masa y la ley de gravitación universal

$$g_L=G\frac{M_L}{R_L^2}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{(1737\cdot10^3)^2}=1{,}62\,m/s^2$$

B. Pregunta 1.-



a) La distancia desde el punto A (0, 0) al punto B (2, -2) es
$\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}m$

Se pide fuerza que masa en A ejerce sobre masa en B. Lo podemos plantear de dos maneras.

A. Por trigonometría, utilizando el ángulo que forma r con el eje x, que son 45º

$$|\vec{F}|=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{3\cdot5}{8}=1{,}25\cdot10^{-10}\,N$$

Calculamos las componentes multiplicando módulo por coseno y seno, tomando signos de diagrama

$$\vec{F}=-|\vec{F}|\cos45\,\vec{i}+|\vec{F}|sen\,45\,\vec{j}=-1{,}25\cdot10^{-10}\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+1{,}25\cdot10^{-10}\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}=-8{,}84\cdot10^{-11}\vec{i}+8{,}84\cdot10^{-11}\vec{j}\,N$$

B. Usando la definición vectorial de la ley de gravitación universal $\vec{F}=-G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$

El vector unitario que va desde el punto A (0, 0) al punto B (2, -2) es $\vec{u}_r=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}\vec{j}$

$$\vec{F}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{3\cdot5}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)=-8{,}84\cdot10^{-11}\vec{i}+8{,}84\cdot10^{-11}\vec{j}\,N$$

b) Consideramos el trabajo realizado por el campo y llamamos C al punto (2, 0)

$$W_{B\rightarrow C}=-m\Delta V=-m(V(C)-V(B))=-5\cdot(-6{,}67\cdot10^{-11}\frac{3}{2}-(-6{,}67\cdot10^{-11}\frac{3}{2\sqrt{2}}))=1{,}47^{-10}J$$

El trabajo realizado por el campo es positivo: es favor del campo atraer la masa de 5 kg desde la posición B a la posición C más cercana a la masa A

2019-Junio

A. Pregunta 1.-

a) La distancia desde el punto (4, 3) al origen es $\sqrt{4^2+3^2}=5m$

Lo podemos plantear de dos maneras

A. Por trigonometría, utilizando el ángulo que forma r con el eje x, cuyo coseno 4/5 y seno 3/5.

$$|\vec{g}|=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5}{5^2}=1{,}33\cdot10^{-11}m/s^2 ó\ N/kg$$

Calculamos las componentes multiplicando módulo por coseno y seno, tomando signos de diagrama

$$\vec{g}=|\vec{g}|\cos\alpha\,\vec{i}+|\vec{g}|sen\,\alpha\,\vec{j}=1{,}33\cdot10^{-11}\frac{4}{5}\vec{i}+1{,}33\cdot10^{-11}\frac{3}{5}\vec{j}=1{,}07\cdot10^{-11}\vec{i}+8{,}00\cdot10^{-12}\vec{j}\,m/s^2 ó\ N/kg$$

B. Usando la definición vectorial $\vec{g}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$

El vector unitario que va desde el punto (4,3) al origen es $\vec{u}_r=\frac{-4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}$

Usando la definición vectorial de campo

$$\vec{g}=-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5}{5^2}(\frac{-4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j})=1{,}07\cdot10^{-11}\vec{i}+8{,}00\cdot10^{-12}\vec{j}\,m/s^2 ó\ N/kg$$

Consideramos el trabajo realizado por el campo

$$W_{\infty\rightarrow origen}=-m\Delta V=-m(V(origen)-\cancel{V(\infty)})=-0{,}5\cdot(-6{,}67\cdot10^{-11}\frac{5}{5})=3{,}34\cdot10^{-11}J$$

El trabajo realizado por el campo es positivo: es favor del campo atraer una masa desde el infinito acercándola a otra masa.

b) Llamando x a la distancia medida desde el origen en la línea que une el origen con el punto (4, 3), podemos plantear que ambos campos tendrán misma dirección en esa línea pero sentido opuesto, y para que el campo total resultante por superposición sea nulo, deben tener ambos el mismo módulo.

$$|\vec{g}_{origen}|=|\vec{g}_{(4,3)}|\Rightarrow G\frac{m_{origen}}{x^2}=G\frac{m_{(4,3)}}{(d_{(4,3)}-x)^2}\Rightarrow\frac{0{,}5}{x^2}=\frac{5}{(5-x)^2}$$

$$0{,}1(5-x)^2=x^2\Rightarrow\sqrt{0{,}1}(5-x)=x\Rightarrow(1+\sqrt{0{,}1})x=5\sqrt{0{,}1}\Rightarrow x=\frac{5\sqrt{0{,}1}}{1+\sqrt{0{,}1}}\approx1{,}2m$$

Matemáticamente hay dos soluciones, pero solamente tiene sentido la que está más cerca de la masa de 0,5 kg.

B. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial en una órbita circular. Deducimos la tercera ley de Kepler, planteando la segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, y considerando órbita circular.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\qquad v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R^3=\frac{GM}{4\cdot\pi^2}T^2\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$$

En un satélite geoestacionario el periodo son 24 h. Sustituyendo valores numéricos

$$R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{4\pi^2}(24\cdot3600)^2}=4{,}22\cdot10^7m$$

Como se pide altura, $h=R-R_T=4{,}22\cdot10^7-6{,}37\cdot10^6=3{,}58\cdot10^7$ m

La velocidad orbital es $v=\frac{2\cdot\pi\cdot4{,}22\cdot10^7}{(24\cdot3600)}=3{,}1\cdot10^3m/s$

b) La fuerza centrípeta es $F_c=m\frac{v^2}{R}=5900\cdot\frac{(3,1\cdot10^3)^2}{4,22\cdot10^7}=1,34\cdot10^3 N$

La energía total del satélite en órbita es la energía mecánica

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

Numéricamente $E_m=\frac{-1}{2}\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{23}\cdot5900}{4,22\cdot10^7}=-2,78\cdot10^{10} J$

2019-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow M=\frac{v^2R}{G}$$

Al ser de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow R=\frac{v\cdot T}{2\cdot\pi}$

Sustituyendo $M=\frac{v^3T}{2\cdot\pi G}=\frac{(2,3\cdot10^4)^3\cdot30\cdot60}{2\cdot\pi\cdot6,67\cdot10^{-11}}=5,226\cdot10^{25} kg$

b) Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

Numéricamente $E_m=\frac{-1}{\cancel{2}}\frac{GMm\cdot\cancel{2}\cdot\pi}{v\cdot T}=\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot5,226\cdot10^{25}\cdot150\cdot\pi}{2,3\cdot10^4\cdot30\cdot60}=-3,97\cdot10^{10} J$

B. Pregunta 1.-

a) Planteamos que en una caída de una altura de 10 m con un radio de $8,5\cdot10^6$ m el valor de la gravedad es constante, y describe un MRUA

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2\Rightarrow10=\frac{1}{2}g_C1,58^2\Rightarrow g_C=\frac{20}{1,58^2}=8,01 m/s^2$$

Conociendo la gravedad y utilizando la ley de gravitación universal

$$g_C=G\frac{M_C}{R^2}\Rightarrow M_C=\frac{g_CR^2}{G}=\frac{8,01\cdot(8,5\cdot10^6)^2}{6,67\cdot10^{-11}}=8,68\cdot10^{24} kg$$

b) La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M_A\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow M_A=\frac{v^2R}{G}$$

Al ser de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}$

$$M_A=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2(1,8\cdot10^{11})^3}{6,67\cdot10^{-11}\cdot(395\cdot24\cdot3600)^2}=2,96\cdot10^{30} kg$$

2018-Julio

A. Pregunta 1.-

a) La masa del objeto no depende del punto en el que se encuentra, y en este caso sigue siendo de 50 kg.

El peso del objeto en la superficie de Mercurio es la fuerza gravitatoria que realiza Mercurio: será un vector en la dirección de la línea que pasa por el centro de Mercurio y con sentido dirigido hacia Mercurio al ser la fuerza gravitatoria atractiva. Su módulo según la ley de gravitación universal será

$$P_{superficie}=m\cdot g_M=G\frac{M_M\cdot m}{R_M^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3{,}30\cdot 10^{23}\cdot 50}{(2{,}44\cdot 10^6)^2}=184{,}85\,N$$

b) Si llamamos $R=R_M+h$ a la distancia a la la que el peso se reduce a la tercera parte, planteamos con módulos

$$P_R=\frac{1}{3}P_{superficie}\Rightarrow G\frac{\cancel{M_M}\cdot\cancel{m}}{R^2}=\frac{1}{3}G\frac{\cancel{M_M}\cdot\cancel{m}}{R_M^2}\Rightarrow 3R_M^2=R^2\Rightarrow\sqrt{3}\cdot R_M=R_M+h$$
$$\Rightarrow h=(\sqrt{3}-1)R_M=1{,}78\cdot 10^6\,m$$

Validamos que módulo del peso a esa distancia y es ⅓ del calculado en a). También se podría haber planteado numéricamente partiendo de ese valor 184,85/3=61,6

$$P_R=G\frac{M_M\cdot m}{R^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3{,}30\cdot 10^{23}\cdot 50}{(2{,}44\cdot 10^6+1{,}78\cdot 10^6)^2}=61{,}8\,N$$

B. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre el satélite artificial es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R}$$

El radio de la órbita es $R=R_T+h=6{,}37\cdot 10^6+694\cdot 10^3=7{,}064\cdot 10^6$ m

$$v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}}{7{,}064\cdot 10^6}}=7508\,m/s$$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}\Rightarrow T=\frac{2\cdot\pi\cdot 7{,}064\cdot 10^6}{7508}=5912\,s$

b) La energía necesaria a aportar para trasladarlo es la diferencia de energías mecánicas entre ambas órbitas, que son la suma de energía cinética y potencial. Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

La diferencia solicitada es

$$\Delta E=E_{m,\acute{o}rbita\,1000\,km}-E_{m,\acute{o}rbita\,694\,km}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_{1000km}}-\left(\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_{694\,km}}\right)=\frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{R_{694\,km}}-\frac{1}{R_{1000\,km}}\right)$$

Sustituyendo $\Delta E=\frac{1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 712\left(\frac{1}{7{,}064\cdot 10^6}-\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6+1000\cdot 10^3}\right)=8{,}33\cdot 10^8\,J$

2018-Junio-coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) La única fuerza que actúa sobre la nave (que pasa a ser un satélite al orbitar) es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow R=\frac{GM}{v^2}$$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}$, que sustituyendo nos lleva a la expresión asociada a la tercera ley de Kepler $R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R^3}$

Numéricamente $T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}42\cdot 10^{23}}\cdot(5000\cdot 10^3)^3}=10735\,s$

Considerando años de 365 días, 10·365·24·3600/10735=29377 vueltas.

b) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A en la superficie del planeta a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R};E_c=\frac{1}{2}mv_e^2$

B (∞): $E_p=0;E_c=0$

Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Numéricamente $v_e=\sqrt{2\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot6,42\cdot10^{23}}{3397,5\cdot10^3}}=5,02\cdot10^3\,m/s$

B. Pregunta 1.-

a) El campo generado por una única masa puntual es radial $\vec{g}=-G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$ siendo el vector unitario saliente desde la masa. Si llamamos Q al punto (4, 0) en el que se encuentra la masa, el vector unitario lo que lo podemos plantear como el vector QP (-4, 3) dividido por su módulo, que es 5 m, de modo que $\vec{u}_r=\frac{-4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$

Por lo tanto $\vec{g}=-6,67\cdot10^{-11}\frac{4}{5^2}(\frac{-4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j})m\cdot s^{-2}=8,5376\cdot10^{-12}\vec{i}-6,4032\cdot10^{-12}\vec{j}\,m\cdot s^{-2}$

b) Planteamos el trabajo realizado por el campo (no el trabajo externo), por lo que usamos la definición de energía potencial $W_{campo,origen\rightarrow P}=-\Delta E_p=-m\Delta V=-m(V_P-V_{origen})$

$$W_{campo,origen\rightarrow P}=-m(-G\frac{M}{d_{QP}}-(-G\frac{M}{d_{QP}}))=10\cdot(6,67\cdot10^{-11}4(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}))=-1,334\cdot10^{-10}J$$

El trabajo realizado por el campo es negativo: se trata de un trabajo que hay que aportar externamente, es en contra del campo, porque estamos alejando una masa (inicialmente estaba a 4 m y luego está a 5 m), llevándola a potenciales mayores.

2018-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Según la ley de gravitación universal, la fuerza es un vector $\vec{F}_{12}=-G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{u}_r$ dirección la línea que une ambas masas, sentido atractivo: al ser la fuerza que m_1 ejerce sobre m_2 está dirigida desde m_2 hacia m_1. (el vector unitario va desde m_1 a m_2). Su módulo es

$$|\vec{F}_{12}|=6,67\cdot10^{-11}\frac{10\cdot20}{1^2}=1,33\cdot10^{-8}N$$

El peso $\vec{P}_2$ es la fuerza que la Tierra ejerce sobre m_2, tendrá dirección la línea que une el centro de masas de m_2 con el centro de la Tierra, sentido dirigido hacia el centro de la Tierra, y módulo (tomamos como distancia la del radio de la Tierra)

$$|\vec{P}_2|=6,67\cdot10^{-11}\frac{5,97\cdot10^{24}\cdot20}{(6,37\cdot10^6)^2}=196\,N$$

Aunque no es dato g, podemos validar el resultado, es aproximadamente P=m·g=20·9,8=196 N

b) La fuerza gravitatoria depende de las masas (linealmente) y de la distancia (con el inverso del cuadrado). Aunque entre m_1 y m_2 la distancia sea mucho menor (1 m frente a $6,37\cdot10^6$ m), que entre m_2 y la Tierra, la masa de la Tierra es mucho mayor que la de m_1. ($5,97\cdot10^{24}$ kg frente a 10 kg)

B. Pregunta 1.-

a) Si la órbita es geoestacionaria, su periodo es T=24 h, por lo que si queremos que el periodo sea el doble será de 48 h.

Al indicarse radio asumimos órbita circular. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow R=\frac{GM}{v^2}$$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}$, que sustituyendo nos lleva a la expresión asociada a la tercera ley de Kepler $R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2 \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$

Sustituyendo valores numéricos $R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{4\pi^2}(48\cdot3600)^2}=6{,}7\cdot10^7\,m$

b) Planteamos la diferencia de energías mecánicas, que son la suma de energía cinética y potencial. Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

La diferencia solicitada es

$$\Delta E=E_{m,\,órbita T=48h}-E_{m,\,órbita T=24h}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_{T=48h}}-\left(\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R_{T=24h}}\right)=\frac{1}{2}GMm\left(\frac{1}{R_{T=24h}}-\frac{1}{R_{T=48h}}\right)$$

El radio de la órbita con T=24 h no lo tenemos calculado pero lo hacemos con el mismo planteamiento de apartado a

$$R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}}{4\pi^2}(24\cdot3600)^2}=4{,}2\cdot10^7\,m$$

Sustituyendo

$$\Delta E=\frac{1}{2}6{,}67\cdot10^{-11}5{,}97\cdot10^{24}\cdot10^3\left(\frac{1}{4{,}2\cdot10^7}-\frac{1}{6{,}7\cdot10^7}\right)=1{,}77\cdot10^9\,J$$

El valor es positivo, ya que es energía aportada al tener más energía en la segunda órbita (el radio es mayor y tiene una energía mecánica mayor, número negativo de menor valor absoluto).

2018-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) Al tener dos masas utilizamos el principio de superposición. En el eje x entre las masas se puede ver que el campo tiene sentidos opuestos y hay un punto intermedio en el que se cancelará, más cercano a x_1 que a x_2 al ser m_2 mayor que m_1. Lo planteamos como módulos, llamamos x para la coordenada del punto donde se cancelan medida desde $x_1=0$. Asumimos x_2-x positivo (x entre las dos masas) $\vec{g}_1+\vec{g}_2=0 \Rightarrow g_1=g_2 \Rightarrow G\frac{m_1}{x^2}=G\frac{m_2}{(x_2-x)^2}\Rightarrow\frac{m_2}{m_1}=\left(\frac{x_2-x}{x}\right)^2\Rightarrow\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}=\frac{x_2-x}{x}$

Sutituyendo y expresando con cuatro cifras significativas $\sqrt{5}x=5-x\Rightarrow x=\frac{5}{\sqrt{5}+1}\approx1{,}545\,m$

Nota: enunciado pide "el punto en el eje X", y podríamos plantear si hay puntos fuera del segmento que une las masas en las que también se cancela. Podemos ver que en el eje X fuera de ese segmento los campos gravitatorios tienen mismo sentido, por lo que no se cancela.

b) Aplicando el principio de superposición

$$V_{total}=V_1+V_2=-G\frac{m_1}{d_1}-G\frac{m_2}{d_2}=-6{,}67\cdot10^{-11}\left(\frac{2}{1{,}545}+\frac{10}{5-1{,}545}\right)=-2{,}79\cdot10^{-10}\,J/kg$$

B. Pregunta 1.-

a) En una órbita circular la única fuerza que actúa sobre el planeta es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow R=\frac{GM}{v^2}$$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}$, que sustituyendo nos lleva a la expresión asociada a la tercera ley de Kepler $R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2 \Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$

Sustituyendo valores numéricos $R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}3\cdot 10^{30}}{4\pi^2}(210\cdot 24\cdot 3600)^2}=8{,}98\cdot 10^{10}\,m$

b) El campo gravitatorio en un punto intermedio lo obtenemos por superposición. Tendrá sentidos opuestos, calculamos los módulos y comprobamos cual es mayor a esa distancia (aunque a priori podemos asumir que el campo de la estrella será mayor)

$$g_{estrella}=G\frac{M}{d_{estrella}^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{1{,}3\cdot 10^{30}}{(8{,}98\cdot 10^{10}-4{,}6\cdot 10^8)^2}=0{,}0108637\,m/s^2\text{ ó } N/kg$$

$$g_{planeta}=G\frac{M_{planeta}}{d_{planeta}^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5\cdot 10^{-6}\cdot 1{,}3\cdot 10^{30}}{(4{,}6\cdot 10^8)^2}=0{,}0020489\,m/s^2\text{ ó } N/kg$$

Vemos que es mayor el gampo generado por la estrella en ese punto, luego tendrá sentido hacia dentro de la estrella, y el módulo será la diferencia. Definimos como vector unitario el dirigido hacia fuera de la estrella

$$\vec{g}_{total}=\vec{g}_{estrella}+\vec{g}_{planeta}=-(0{,}0108637-0{,}0020489)\vec{u}_r\approx -0{,}00881\vec{u}_r\,m/s^2\text{ ó } N/kg$$

2017-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A en la superficie del planeta a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R}; E_c=\frac{1}{2}mv_e^2$

B (∞): $E_p=0; E_c=0$

Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

b) Utilizamos la definición de aceleración de la gravedad para averiguar el radio

$$g=G\frac{M}{R^2}\Rightarrow R=\sqrt{\frac{GM}{g}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3{,}30\cdot 10^{23}}{3{,}70}}=2{,}44\cdot 10^6\,m$$

$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3{,}30\cdot 10^{23}}{2{,}44\cdot 10^6}}=4{,}25\cdot 10^3\,m/s$ a) La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para llegar a un punto infinitamente alejado con velocidad nula. Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica en un lanzamiento desde un punto A en la superficie del planeta a un punto B infinitamente alejado: la energía mecánica se conserva dado que no hay fuerzas no conservativas como el rozamiento.

A (superficie): $E_p=-G\frac{Mm}{R}; E_c=\frac{1}{2}mv_e^2$

B (∞): $E_p=0; E_c=0$

Como se conserva la energía mecánica, igualamos en A y en B y despejamos la velocidad de escape

$$-G\frac{M\cancel{m}}{R}+\frac{1}{2}\cancel{m}v_e^2=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

b) Utilizamos la definición de aceleración de la gravedad para averiguar el radio

$$g=G\frac{M}{R^2}\Rightarrow R=\sqrt{\frac{GM}{g}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3{,}30\cdot 10^{23}}{3{,}70}}=2{,}44\cdot 10^6\,m$$

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3{,}30\cdot 10^{23}}{2{,}44\cdot 10^6}}=4{,}25\cdot 10^3\,m/s$$

B. Pregunta 1.-

a) En una órbita circular la única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravitatoria y es radial. Planteamos la ley fundamental de la dinámica, segunda ley de Newton, en modo escalar con los módulos, igualando fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta.

$$F_g=F_c\Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{R^2}=\cancel{m}\frac{v^2}{R}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

b) Utilizando el mismo desarrollo de apartado a $R=\frac{GM}{v^2}$

Al tratarse de una órbita circular $v=\frac{2\pi R}{T}$, que sustituyendo nos lleva a la expresión asociada a la tercera ley de Kepler $R^3=\frac{GM}{4\pi^2}T^2\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2}$

Sustituyendo valores numéricos $R=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot6,42\cdot10^{23}}{4\pi^2}(24,62\cdot3600)^2}=2,042\cdot10^7 m$

La energía mecánica es la suma de energía cinética y potencial. Usamos directamente la expresión de energía potencial gravitatoria (la deducción implica integrar) y obtenemos la expresión de energía mecánica en órbita y el valor pedido

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=\frac{-GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=\frac{-1}{2}\frac{GMm}{R}$$

$$E_m=\frac{-1}{2}\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot6,42\cdot10^{23}\cdot21}{2,042\cdot10^7}=-2,202\cdot10^7 J$$

2017-Junio-coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Planteamos conservación de energía mecánica entre los dos puntos

A. Punto de lanzamiento $E_c=\frac{1}{2}mv^2_{lanzamiento}; E_p=-G\frac{Mm}{R_{Tierra}}$

B. Punto de altura h $E_c=0; E_p=-G\frac{Mm}{R_{Tierra}+h}$

$$E_m(A)=E_m(B)\Rightarrow\frac{1}{2}\cancel{m}v^2_{lanzamiento}-G\frac{M\cancel{m}}{R_{Tierra}}=-G\frac{M\cancel{m}}{R_{Tierra}+h}$$

$$v_{lanzamiento}=\sqrt{2GM(\frac{1}{R_{Tierra}}-\frac{1}{R_{Tierra}+h})}$$

$$v_{lanzamiento}=\sqrt{2\cdot6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}\cdot(\frac{1}{6,37\cdot10^6}-\frac{1}{6,37\cdot10^6+150\cdot10^3})}=1696 m/s$$

b) La energía adicional a aportar es la energía cinética asociada a la velocidad que tiene que tener para tener una órbita estable a esa altura.
Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular estable

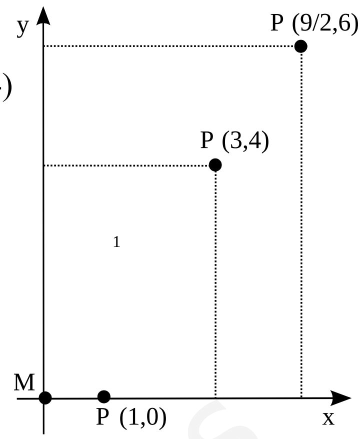
$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}$$

La energía cinética adicional a aportar será $E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_o}$

(se podría haber llegado a la misma expresión restando la energía mecánica en una órbita circular con ese radio y la energía potencial esa altura)

Sustituyendo $E=\frac{1}{2}\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}\cdot120}{6,37\cdot10^6+150\cdot10^3}=3,66\cdot10^9 J$

B. Pregunta 1.-



Aunque los puntos se dan con 3 coordenadas (x, y, z) la coordenada z siempre es 0, por lo que se trata de un problema en el plano XY.
Realizamos un diagrama en z=0 representando los puntos $P_1(1,0)$, $P_2(3,4)$ y $P_3(9/2,6)$

a) Se plantea utilizando la relación $\Delta E_p = m \cdot \Delta V$ aunque se podría haber usando directamente ΔE_p.
El trabajo realizado por el campo para mover m_1 es

$$W_{P_1 \to P_2} = -m_1 \Delta V = -m_1 (V_{P_2} - V_{P_1})$$

$$W_{P_1 \to P_2} = -2 \cdot \left(-G\frac{M}{d_2} - \left(-G\frac{M}{d_1}\right)\right)$$

$$W_{P_1 \to P_2} = 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50\left(\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} - \frac{1}{1}\right) = -5{,}336 \cdot 10^{-9} J$$

El trabajo es negativo, es en contra del campo: estamos alejando una masa de M y el campo tendería a atraerla.

b) Se pide la energía cinética de la partícula partiendo del reposo, que por el teorema de las fuerzas vivas es igual al trabajo total realizado $\Delta E_c = W_{total}$
(También se puede plantear mediante conservación de E mecánica). En este caso el único trabajo lo realiza el campo, y el trabajo realizado por el campo para mover m_2 es

$$W_{P_3 \to P_2} = -3 \cdot \left(-G\frac{M}{d_2} - \left(-G\frac{M}{d_3}\right)\right) = 3 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 50\left(\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} - \frac{1}{\sqrt{(9/2)^2+6^2}}\right) = 6{,}67 \cdot 10^{-10} J$$

El trabajo es positivo, es a favor del campo: estamos acerando una masa a M, la masa m_2 está ganando energía cinética.

2017-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie del asteroide en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el punto de lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente.

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = 3000 \cdot \frac{4}{3}\pi 3000^3 = 3{,}39 \cdot 10^{14} kg$$

La densidad y el radio los expresamos en unidades del Sistema Internacional como G . La densidad es 3000 kg/m³ y el radio 3000 m. $v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2 \cdot \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3{,}39 \cdot 10^{14}}{3000}} = 3{,}88 m/s$

b) Planteamos la conservación de energía mecánica entre el punto de lanzamiento en superficie a la velocidad de escape y el punto a 1000 m de altura.

A. Punto de lanzamiento $E_c = \frac{1}{2} m v_e^2 ; E_p = -G\frac{Mm}{R_{asteroide}}$

B. Punto a 1 km de altura $E_c = \frac{1}{2} m v^2 ; E_p = -G\frac{Mm}{(R_{asteroide}+1000)}$

$$E_m(A) = E_m(B) \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_e^2 - G\frac{M\cancel{m}}{R_{asteroide}} = \frac{1}{2}\cancel{m} v^2 - G\frac{M\cancel{m}}{(R_{asteroide}+1000)}$$

$$\frac{1}{2}(3{,}88)^2 - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3{,}39 \cdot 10^{14}}{3000} = \frac{1}{2}v^2 - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{3{,}39 \cdot 10^{14}}{(3000+1000)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 5{,}642925} \approx 3{,}36 m/s$$

B. Pregunta 1.-

a) $g = G\frac{M_{estrella}}{R_{estrella}^2} = G\frac{0{,}12 \cdot M_S}{(0{,}14 \cdot R_S)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{0{,}12 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{(0{,}14 \cdot 7 \cdot 10^8)^2} \approx 1658 m/s^2$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular, y usando $v=\frac{2\pi r}{T}$

$$G\frac{M_{Próxima\,Centauri}\cancel{m}}{R_{órbita}^2}=\cancel{m}\frac{4\pi^2 R_{órbita}^2}{T^2 R_{órbita}}\Rightarrow R_{órbita}=\sqrt[3]{\frac{G\cdot 0{,}12\cdot M_S T^2}{4\pi^2}}$$

$$R_{órbita}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 0{,}12\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\cdot(11{,}2\cdot 24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=7{,}23\cdot 10^9 m$$

Comentario: son datos reales aproximados del exoplaneta Próxima Centauri b

2017-Modelo

A. Pregunta 1.-

Resolución idéntica a 2016-Modelo-A1

B. Pregunta 1.-

Resolución idéntica a 2016-Modelo-B1

2016-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) Planteamos conservación de energía mecánica entre los dos puntos

A. Punto de lanzamiento $E_c=\frac{1}{2}m v_{lanzamiento}^2 ; E_p=-G\frac{Mm}{R_{planeta}}$

B. Punto de altura máxima $E_c=0 ; E_p=-G\frac{Mm}{r_{máx}} ; r_{máx}=R_{planeta}+h_{máx}$

$$E_m(A)=E_m(B)\Rightarrow\frac{1}{2}\cancel{m}v_{lanzamiento}^2-G\frac{M\cancel{m}}{R_{planeta}}=-G\frac{M\cancel{m}}{r_{máx}}$$

$$\frac{1}{2}(2\cdot 10^3)^2-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6{,}42\cdot 10^{23}}{4500\cdot 10^3}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{6{,}42\cdot 10^{23}}{r_{máx}}$$

$$r_{máx}=5{,}697\cdot 10^6 m\Rightarrow h_{máx}=1{,}197\cdot 10^6 m$$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular

$$G\frac{M\cancel{m}}{r_{órbita}^2}=\cancel{m}\frac{v_{órbita}^2}{r_{órbita}}\Rightarrow v_{órbita}=\sqrt{\frac{GM}{r_{órbita}}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}42\cdot 10^{23}}{5{,}697\cdot 10^6}}=2741{,}6\, m/s$$

>Comentario: la masa del enunciado es aproximadamente la de Marte, que tiene una velocidad de escape de unos 5 km/s

B. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular, y usando $v=\frac{2\pi r}{T}$

$$G\frac{M\cancel{m}}{r_{órbita}^2}=\cancel{m}\frac{4\pi^2 r_{órbita}^2}{T^2 r_{órbita}}\Rightarrow M=\frac{4\pi^2 r_{órbita}^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2(0{,}45\cdot 10^8\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(28\cdot 24\cdot 3600)^2}=9{,}2\cdot 10^{30} kg$$

b) Si diámetro=200 km, R=100 km $|g|=G\frac{M}{R^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{9{,}2\cdot 10^{30}}{(100\cdot 10^3)^2}=6{,}14\cdot 10^{10} m/s^2$

>Comentario: si calculamos la velocidad de escape podemos ver que es próxima a la velocidad de la luz, sin llegar a ser un agujero negro $v=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2\cdot\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 9{,}2\cdot 10^{30}}{100\cdot 10^3}}=1{,}11\cdot 10^8 m/s$

2016-Junio

A. Pregunta 1.-

a) En la órbita elíptica el momento angular se conserva, por lo que su módulo es el mismo en todos los puntos. Dado que en en perihelio y afelio vector posición y velocidad forman 90º, podemos igualar los módulos y llegamos a

$$|\vec{L}_{perihelio}|=|\vec{L}_{perihelio}|\Rightarrow r_{perihelio}\cdot \cancel{m}\cdot v_{perihelio}=r_{afelio}\cdot \cancel{m}\cdot v_{afelio}\Rightarrow v_{afelio}=v_{perihelio}\cdot \frac{r_{perihelio}}{r_{afelio}}$$

$$v_{afelio}=26{,}50\cdot 10^3\cdot \frac{206{,}7\cdot 10^9}{249{,}2\cdot 10^9}\approx 21980\, m\, s^{-1}$$

Se puede citar que la velocidad es un vector tangente a la trayectoria y se indica solamente su módulo. Validación física: en afelio debe llevar una velocidad menor que en perihelio.

b) Con datos de afelio obtenidos en a)

$$E_{ma}=E_{pa}+E_{ca}=-G\frac{M_S M_M}{r_a}+\frac{1}{2}M_M v_a^2$$

$$E_{ma}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot \frac{1{,}99\cdot 10^{30}\cdot 6{,}42\cdot 10^{23}}{249{,}2\cdot 10^9}+\frac{1}{2}6{,}42\cdot 10^{23}(21{,}98\cdot 10^3)^2=-1{,}869\cdot 10^{32}\, J$$

Con esto bastaría, pero hacemos validaciones:

-La energía mecánica también es constante en la órbita, la podemos calcular en cualquier punto. Para el perihelio con los datos del enunciado

$$E_{mp}=E_{pp}+E_{cp}=-G\frac{M_S M_M}{r_p}+\frac{1}{2}M_M v_p^2$$

$$E_{mp}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot \frac{1{,}99\cdot 10^{30}\cdot 6{,}42\cdot 10^{23}}{206{,}7\cdot 10^9}+\frac{1}{2}6{,}42\cdot 10^{23}(26{,}50\cdot 10^3)^2=-1{,}869\cdot 10^{32}\, J$$

-Si usamos expresión general para la energía mecánica en órbita elíptica, en la que se usa el valor del semieje mayor que es $a=(206{,}7\cdot 10^9+249{,}2\cdot 10^9)/2=2{,}2795\cdot 10^{11}$ m

$$E_m=\frac{-1}{2}G\frac{M_S M_M}{a}$$

$$E_{mp}=\frac{-1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot \frac{1{,}99\cdot 10^{30}\cdot 6{,}42\cdot 10^{23}}{2{,}2795\cdot 10^{11}}=-1{,}869\cdot 10^{32}\, J$$

B. Pregunta 1.-

a) Usamos la ley de Hooke F=kΔL, y como el muelle es el mismo, el cociente entre pesos que son las fuerzas que realizan la deformación, es igual que el cociente entre alargamientos

$$\frac{P_T}{P_M}=\frac{\cancel{k}\Delta L_T}{\cancel{k}\Delta L_M}\Rightarrow P_T=\frac{\Delta L_T}{\Delta L_M}P_M=\frac{3}{1{,}13}P_M$$

Al ser P=mg y haberse usado la misma masa, la relación es la misma entre los valores de aceleraciones de la gravedad.

Si queremos que una masa tenga en Marte el mismo peso que en la Tierra, la masa total hay que aumentarla en el mismo factor que la diferencia de pesos $m=\frac{3}{1{,}13}90\approx 239\, kg$. Como se pide la masa adicional, serían 239-90=149 kg.

Planteamiento directo $m g_T=(m+M_{adicional})g_M\Rightarrow M_{adicional}=m\frac{g_T}{g_M}-m=90(\frac{3}{1{,}13}-1)\approx 149\, kg$

b) Utilizando la constante elástica del muelle, calculamos el valor de la gravedad en la Tierra

$$g=\frac{P}{m}=\frac{F}{m}=\frac{k\cdot\Delta L}{m}=\frac{327\cdot 0{,}03}{1}=9{,}81\, m/s^2$$

Usamos la definición de gravedad

$$|g|=G\frac{M}{R_T^2}\Rightarrow M=\frac{g R_T^2}{G}=\frac{9{,}81\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}}=5{,}97\cdot 10^{24}\, kg$$

2016-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) La distancia entre los centros de ambos cuerpos es la suma del radio de Urano (R_U) más la distancia entre sus superficies, más el radio de Titania (R_t).

Los radios de Urano y Titania los podemos calcular a partir de g y los datos dados:

$$g_U=G\frac{M_U}{R_U^2}\Rightarrow R_U=\sqrt{G\frac{M_U}{g_U}}=\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{8{,}69\cdot 10^{25}}{8{,}69}}=2{,}58\cdot 10^7 m$$

$$g_t=G\frac{M_t}{R_t^2}\Rightarrow R_t=\sqrt{G\frac{M_t}{g_t}}=\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3{,}53\cdot 10^{21}}{0{,}37}}=7{,}98\cdot 10^5 m$$

La distancia entre ambas superficies es $d=c\cdot t=3{,}0\cdot 10^8\cdot 1{,}366=4{,}10\cdot 10^8 m$

El radio de la órbita de Titania es $R_{órbita\ Titania}=2{,}58\cdot 10^7+7{,}98\cdot 10^5+4{,}10\cdot 10^8=4{,}37\cdot 10^8 m$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular de Titania:

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3$$

$$T=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 8{,}69\cdot 10^{25}}\cdot(4{,}37\cdot 10^8)^3}=7{,}54\cdot 10^5 s$$

$$T=7{,}54\cdot 10^5 s\cdot\frac{1\,día\ terrestre}{24\cdot 3600\,s}=8{,}73\,días\ terrestres$$

B. Pregunta 1.-

a) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie de un planeta en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente:

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

Sustituyendo y teniendo en cuenta que $M_{Planeta}=2M_{Tierra}$, y que $R_{Planeta}=\frac{1}{2}R_{Tierra}$

$$\frac{v_{e_{Planeta}}}{v_{e_{Tierra}}}=\frac{\sqrt{2\frac{GM_{Planeta}}{R_{Planeta}}}}{\sqrt{2\frac{GM_{Tierra}}{R_{Tierra}}}}=\sqrt{\frac{2M_{Tierra}}{M_{Tierra}}\frac{R_{Tierra}}{\frac{1}{2}R_{Tierra}}}=\sqrt{4}=2$$

b) $$\frac{g_{Planeta}}{g_{Tierra}}=\frac{G\frac{M_{Planeta}}{R_{Planeta}^2}}{G\frac{M_{Tierra}}{R_{Tierra}^2}}=\frac{2M_{Tierra}}{M_{Tierra}}\frac{(R_{Tierra})^2}{(\frac{1}{2}R_{Tierra})^2}=8\Rightarrow g_{Planeta}=8\,g_{Tierra}=8\cdot 9{,}81=78{,}5\,m/s^2$$

La aceleración de la gravedad es un vector: la dirección es una línea radial a partir del centro del Planeta, y el sentido dirigido hacia el centro del planeta.

2015-Septiembre

A. Pregunta 1.-

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow M=g_{superficie}\cdot\frac{R_{superficie}^2}{G}$$

a) $$2\cdot 10^8=2\pi R_{superficie}\Rightarrow R_{superficie}=\frac{2\cdot 10^8}{2\pi}$$

$$M=3\cdot\frac{(\frac{10^8}{\pi})^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}}=4{,}56\cdot 10^{25} kg$$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular del planeta:

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3$$

$$T=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4{,}56\cdot 10^{25}}\cdot\left(\frac{10^8}{\pi}+30\cdot 10^6\right)^3}=5{,}54\cdot 10^4 s=15{,}4\,h$$

B. Pregunta 1.-

a) $$g_{superficie}=G\frac{M}{R_{superficie}^2}=G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{superficie}^3}{R_{superficie}^2}=G\rho\frac{4}{3}\pi R_{superficie}$$

$$g_{superficie}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5500\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot5\cdot10^3=7{,}68\cdot10^{-3}\,m/s^2$$

b) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie de un planeta en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente:

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2\frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R}}=\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5500\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot(5\cdot10^3)^2}=8{,}77\,m/s$$

2015-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Planteamos la diferencia de energía entre los dos puntos, asumiendo velocidad nula en ambos, y esa diferencia será la energía mínima a aportar (enunciado habla de energía cinética a aportar; se puede asumir que se trata de un lanzamiento vertical)

1. Superficie: $E_p=-G\frac{Mm}{R_T}$

2. Altura h: $E_p=-G\frac{Mm}{R_T+h}$

La energía a aportar será

$$\Delta E=-G\frac{Mm}{R_T+h}-(-G\frac{Mm}{R_T})=GMm(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_T+h})=GMm\frac{h}{(R_T)(R_T+h)}$$

Para el caso h=R_T la expresión queda $\Delta E=\frac{GMm}{2R_T}$

Sustituyendo $\Delta E=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot10^3}{2\cdot6{,}37\cdot10^6}=3{,}13\cdot10^{10}\,J$

b) La energía adicional a aportar es la energía cinética asociada a la velocidad que tiene que tener para tener una órbita estable a esa altura.
Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular estable

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}$$

La energía cinética adicional a aportar será $E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}G\frac{Mm}{R_o}$ En este caso R_o=R_T+h = 2R_T

Sustituyendo $E=\frac{1}{2}\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot10^3}{2\cdot6{,}37\cdot10^6}=1{,}56\cdot10^{10}\,J$

B. Pregunta 1.-

a) $$g_{planeta}=G\frac{M_{planeta}}{R_{planeta}^2}=G\frac{M_{planeta}}{(2\cdot R_T)^2}\cdot\frac{M_{Tierra}}{M_{Tierra}}=G\frac{M_{Tierra}}{R_T^2}\cdot\frac{M_{planeta}}{4M_{Tierra}}=g_{Tierra}\frac{M_{planeta}}{4M_{Tierra}}$$

Como según enunciado la aceleración de la gravedad es la misma

$$1=\frac{M_{planeta}}{4M_{Tierra}}\Rightarrow M_{planeta}=4M_{Tierra}$$

b) Planteamos la diferencia de energía entre los dos puntos, asumiendo velocidad nula en ambos, y esa diferencia será la energía mínima a aportar

1. Superficie: $E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}}$

2. Altura h: $E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}+h}$

La energía a aportar será

$$\Delta E=-G\frac{Mm}{R_{superficie}+h}-(-G\frac{Mm}{R_{superficie}})=GMm(\frac{1}{R_{superficie}}-\frac{1}{R_{superficie}+h})=GMm\frac{h}{(R_{superficie})(R_{superficie}+h)}$$

Comparando para h $=R_T$ $\frac{\Delta E_{planeta}}{\Delta E_{Tierra}}=\frac{G4M_{Tierra}m\frac{R_T}{(2R_T)(3R_T)}}{GM_{Tierra}m\frac{R_T}{(R_T)(2R_T)}}=\frac{4}{3}$

2015-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Para calcular la velocidad en una órbita circular, si el diámetro es $2{,}14\cdot10^6$ km, el radio es $1{,}07\cdot10^9$ m

$$v_{exterior}=\frac{2\cdot\pi\cdot R_{exterior}}{T_{exterior}}=\frac{2\cdot\pi\cdot1{,}07\cdot10^9}{171{,}6\cdot3600}=1{,}09\cdot10^4\,m/s$$

Utilizando la tercera ley de Kepler podemos plantear (no es necesario cambiar de unidades los periodos mientras expresemos ambos con las mismas unidades)

$$\frac{R_{exterior}^3}{R_{interior}^3}=\frac{T_{exterior}^2}{T_{interior}^2}\Rightarrow R_{interior}=R_{exterior}\sqrt[3]{\frac{T_{interior}^2}{T_{exterior}^2}}\Rightarrow R_{interior}=1{,}07\cdot10^9\cdot\sqrt[3]{\frac{42^2}{171{,}6^2}}=4{,}19\cdot10^8\,m$$

b) Si igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular para el planeta exterior:

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow M=\frac{v^2\cdot R}{G}=\frac{(1{,}09\cdot10^4)^2\cdot1{,}07\cdot10^9}{6{,}67\cdot10^{-11}}=1{,}91\cdot10^{27}\,kg$$

Si el diámetro del planeta es $2{,}4\cdot10^4$ km, su radio es $1{,}2\cdot10^7$ m

La aceleración de la gravedad en superficie es $g=G\frac{M}{R^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{1{,}91\cdot10^{27}}{(1{,}2\cdot10^7)^2}=885\,m/s^2$

B. Pregunta 1.-

a) Si el diámetro son $6{,}0\cdot10^5$ km, el radio son $3{,}0\cdot10^8$ m

$$g=G\frac{M}{R^2}\Rightarrow M=\frac{gR^2}{G}=\frac{125\cdot(3{,}0\cdot10^8)^2}{6{,}67\cdot10^{-11}}=1{,}7\cdot10^{29}\,kg$$

b) Si igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular llegamos a la expresión para la tercera ley de Kepler, con la que obtenemos el radio de la órbita usando periodo y masa.

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow\frac{GM}{R}=(\frac{2\pi R}{T})^2\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3\Rightarrow R=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}7\cdot10^{29}\cdot(12\cdot3600)^2}{4\pi^2}}=8{,}1\cdot10^8\,m$$

2015-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) Llamamos M=Masa estrella, m=masa del planeta, T=Periodo revolución planeta

Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular del planeta:

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{v^2}{R_p}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R}\Rightarrow\frac{(2\pi R)^2}{T^2}=\frac{GM}{R}\Rightarrow R^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$$ (R es radio órbita del planeta)

Esta relación es la 3ª ley de Kepler para órbitas circulares.

b) La expresión anterior es válida tanto para el planeta como para la Tierra: planteamos ambas

Planeta: $R^3=G\frac{MT^2}{4\pi^2}$

Tierra: $R_{órbita\,Tierra}^3=G\frac{M_{Sol}T_{Tierra}^2}{4\pi^2}$ (indicamos $R_{\text{órbita Tierra}}$ para no confundir con R_{Tierra})

Por el enunciado tenemos que $M=3\cdot M_{Sol}$, y $T=T_{Tierra}$. Sustituyendo y dividiendo ambas expresiones

$$\frac{R^3}{R^3_{órbita\,Tierra}}=\frac{\cancel{G}\frac{3\cdot \cancel{M_{Sol}}\cdot \cancel{T^2}}{\cancel{4\pi^2}}}{\cancel{G}\frac{\cancel{M_{Sol}}\cancel{T^2}}{\cancel{4\pi^2}}}=3\Rightarrow R=\sqrt[3]{3}\,R_{órbita\,Tierra}$$

B. Pregunta 1.-

a) Se indica solamente radio: asumimos planetas esféricos y de densidad uniforme.

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R^2_{planeta}};\ M=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3_{planeta}\Rightarrow g_{superficie}=G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3_{planeta}}{R^2_{planeta}}=G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}$$

$$\frac{g_{superficie\,A}}{g_{superficie\,B}}=\frac{\cancel{G}\cdot\rho_A\cdot\cancel{\frac{4}{3}\pi}R_A}{\cancel{G}\cdot\rho_B\cdot\cancel{\frac{4}{3}\pi}R_B}\Rightarrow\frac{\rho_A}{\rho_B}=\frac{g_{superficie\,A}}{g_{superficie\,B}}\cdot\frac{R_B}{R_A}=3\cdot 1=3$$

b) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie de un planeta para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_{superficie}}=0;\ v_{escape}=\sqrt{2\frac{GM}{R_{superficie}}}=\sqrt{2\cdot g_{superficie}\cdot R_{superficie}}$$

$$\frac{v_{escape\,A}}{v_{escape\,B}}=\frac{\sqrt{\cancel{2}\cdot g_{superficie\,A}\cdot\cancel{R_A}}}{\sqrt{\cancel{2}\cdot g_{superficie\,B}\cdot\cancel{R_B}}}=\sqrt{3\cdot 1}=\sqrt{3}$$

$$v_{escape\,B}=\frac{v_{escape\,A}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 10^3\,m/s\approx 1155\,m/s$$

Validación lógica: si ambos tienen el mismo radio, pero A tiene más aceleración gravitatoria en superficie, la velocidad de escape de B tiene que ser menor que la de A.

2014-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular:

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

No tenemos como datos G y M,pero tenemos como dato la gravedad en su superficie y su radio, por lo podemos plantear

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R^2_{planeta}}\Rightarrow GM=g_{superficie}\cdot R^2_{planeta}$$

Sustituyendo

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{3{,}71\cdot(3393\cdot 10^3)^2\cdot(24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=2{,}01\cdot 10^7\,m$$

b) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie de un planeta para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_{superficie}}=0;\ v_{escape}=\sqrt{2\frac{GM}{R_{superficie}}}=\sqrt{2\cdot g_{superficie}\cdot R_{superficie}}=\sqrt{2\cdot 3{,}71\cdot 3393\cdot 10^3}=5018\,m/s$$

Comentario: por los datos de gravedad en superficie y radio, el planeta es Marte.

B. Pregunta 1.-

a) Utilizando el dato de planeta esférico, densidad uniforme, y realizando los cambios de unidades necesarios al Sistema Internacional

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R_{planeta}^2};M=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}^3$$

$$g_{superficie}=G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}^3}{R_{planeta}^2}=G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot1{,}33\cdot10^3\cdot71500\cdot10^3=26{,}57\,m/s^2$$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular, calculamos el radio de la órbita

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}=\frac{g_{superficie}\cdot R_{planeta}^2\cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{26{,}57\cdot(71500\cdot10^3)^2\cdot(73\cdot3600)^2}{4\pi^2}}=6{,}19\cdot10^8\,m$$

En una órbita circular

$$v=\frac{2\pi R_o}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot6{,}19\cdot10^8}{73\cdot3600}=1{,}48\cdot10^4\,m/s$$

2014-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

No tenemos G y M como dato, pero utilizando el dato de energía mecánica y la expresión para la energía mecánica para una órbita circular

$$E_m=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_o}\Rightarrow GM=-2\frac{E_m R_o}{m}$$

Sustituyendo

$$R_o^3=-2\frac{E_m R_o}{m}\frac{T^2}{4\pi^2}\Rightarrow R_o=\sqrt{-2\frac{E_m}{m}\frac{T^2}{4\pi^2}}=\sqrt{-2\cdot\frac{(-5\cdot10^7)}{100}\frac{(24\cdot3600)^2}{4\pi^2}}=1{,}38\cdot10^7\,m$$

b) $M=-2\frac{E_m R_o}{Gm}=-2\cdot\frac{(-5\cdot10^7\cdot1{,}38\cdot10^7)}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot100}=2{,}01\cdot10^{23}\,kg$

B. Pregunta 1.-

a) Si el diámetro de la Tierra es 2,48 veces mayor, el radio es también 2,48 veces mayor.

$$g_{Titán}=G\frac{M_{Titán}}{R_{Titán}^2}=G\frac{\frac{M_{Tierra}}{44{,}3}}{\left(\frac{R_{Tierra}}{2{,}48}\right)^2}=G\frac{M_{Tierra}}{R_{Tierra}^2}\frac{2{,}48^2}{44{,}3}=g_{Tierra}\cdot\frac{2{,}48^2}{44{,}3}=9{,}81\cdot\frac{2{,}48^2}{44{,}3}\approx1{,}36\,m/s^2$$

b) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie de un planeta en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente:

$$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$$

$$\frac{v_{e_{Tierra}}}{v_{e_{Titán}}}=\frac{\sqrt{2\frac{GM_{Tierra}}{R_{Tierra}}}}{\sqrt{2\frac{GM_{Titán}}{R_{Titán}}}}=\sqrt{\frac{M_{Tierra}}{M_{Titán}}\frac{R_{Titán}}{R_{Tierra}}}=\sqrt{44{,}3\cdot\frac{1}{2{,}48}}\approx4{,}23$$

2014-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie de un planeta en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente:

$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$ La combinamos con los datos del enunciado: $M_A/M_B=3$ y $R_A/R_B=4$

$$\frac{v_{e_A}}{v_{e_B}}=\frac{\sqrt{2\frac{GM_A}{R_A}}}{\sqrt{2\frac{GM_B}{R_B}}}=\sqrt{\frac{M_A}{M_B}\frac{R_B}{R_A}}=\sqrt{3\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $$\frac{g_{A,superficie}}{g_{B,superficie}}=\frac{G\frac{M_A}{R_A^2}}{G\frac{M_B}{R_B^2}}=\frac{M_A}{M_B}\frac{R_B^2}{R_A^2}=3\cdot\frac{1}{4^2}=\frac{3}{16}$$

B. Pregunta 1.-

a) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de lanzamiento para alcanzar una altura h en la superficie de un planeta en función de su masa, su radio y la altura alcanzada, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y la posición de máxima altura, pero la usamos directamente:

$v_L=\sqrt{2GM(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})}$ La velocidad de escape es una particularización de esta velocidad para el caso de h=∞, con lo que se tiene $v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$

Sustituimos los datos datos y calculamos valores numéricos:

$$v_L=\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}(\frac{1}{6{,}37\cdot10^6}-\frac{1}{6{,}37\cdot10^6+500\cdot10^3})}=3{,}02\cdot10^3\,m/s$$

$$v_e=\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}(\frac{1}{6{,}37\cdot10^6})}=1{,}12\cdot10^4\,m/s$$

Como se indica comparar, lo hacemos cualitativamente: la velocidad de escape tiene que ser mucho mayor que la velocidad de lanzamiento para alcanzar esa altura, ya que supone "llevar la masa más lejos, aportarle más energía potencial".

Ni la velocidad de lanzamiento ni la velocidad de escape dependen de la masa del objeto, que son 2 kg según el enunciado. Esa masa influirá en la energía gastada en proporcionar a ese cuerpo esa velocidad, que supone aportarle esa energía cinética.

b) Aunque se podría hacer numéricamente para la velocidad de lanzamiento calculada en a, y sería válido y más corto, lo hacemos analíticamente para expresar esa distancia en función de R y h.

Utilizamos la conservación de la energía mecánica, llamando

A: Situación de lanzamiento: la energía mecánica es la cinética y la potencial gravitatoria asociada al radio de la Tierra. Al mismo tiempo, y por conservación de energía mecánica en la situación del apartado a, será la energía mecánica en el punto de altura máxima

$$E_m(A)=\frac{1}{2}mv_L^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}m2GM(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})-G\frac{Mm}{R}=-G\frac{Mm}{R+h}$$

B: Situación donde la velocidad se ha reducido un 10% (pasa a ser el 90% de la inicial) con respecto a la velocidad de lanzamiento: la energía mecánica es la cinética asociada al 90% de velocidad y la potencial gravitatoria asociada a la altura que queremos averiguar, que llamamos x.

$$E_m(B)=\frac{1}{2}m(v_L\cdot0{,}9)^2-G\frac{Mm}{R+x}=0{,}9^2mGM(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})-G\frac{Mm}{R+x}=GMm(\frac{0{,}81}{R}-\frac{0{,}81}{R+h}-\frac{1}{R+x})$$

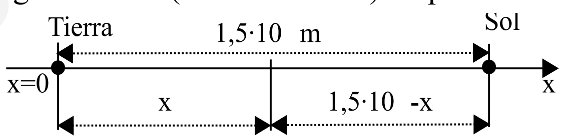
Igualando y operando

$$-G\frac{Mm}{R+h}=G\,Mm\left(\frac{0,81}{R}-\frac{0,81}{R+h}-\frac{1}{R+x}\right)$$
$$\frac{-1}{R+h}=\frac{0,81(R+h)(R+x)-0,81\,R(R+x)-R(R+h)}{R(R+h)(R+x)}$$
$$-R^2-Rx=0,81\,R^2+0,81\,Rh+0,81\,Rx+0,81\,hx-0,81\,R^2-0,81\,Rx-R^2-Rh$$
$$(-1-0,81+0,81+1)R^2+(-R-0,81\,R-0,81h+0,81\,R)\,x=(0,81-1)\,Rh$$
$$x=\frac{-0,19\,Rh}{-R-0,81\,h}=\frac{0,19\,h}{1+0,81\frac{h}{R}}$$
Físicamente podemos validar cierta consistencia: la expresión cumple que si h=0 entonces x=0.
Si h<<R, llegamos a que x=0,19h, que es la expresión a la que se llega si igualamos utilizando la expresión de energía potencial gravitatoria para h<<R, y en ese caso $v_L^2=2gh$
$$mgx+½m(0,9v)^2=mgh\Rightarrow gx+½0,81\cdot 2gh=gh\Rightarrow x=0,19\,h$$
Sustituyendo
$$x=\frac{-0,19\cdot 6,37\cdot 10^6\cdot 500\cdot 10^3}{-6,37\cdot 10^6-0,81\cdot 500\cdot 10^3}=8,93\cdot 10^4\,m=89\,km$$
Físicamente podemos validar cierta consistencia: es menor que 500 km, y que está más próximo al punto más de lanzamiento (donde se tiene el 100% de la velocidad inicial) que al punto de máxima altura donde la velocidad es nula.
Como enunciado pide "la distancia a la que se encuentra el cohete, con respecto al centro de la Tierra", el resultado pedido es $6,37\cdot10^6+8,93\cdot10^4\approx6,46\cdot10^6$ m

2014-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) Hay una manera elegante y simple de resolverlo sin ningún cálculo (idea de Juan G): el potencial gravitatorio solamente es 0 en el infinito, tanto para el potencial creado por una única masa como para el potencial creado por varias masas, ya que se suman siempre potenciales con el mismo signo, luego no puede haber ningún punto con coordenada finita donde se anule el potencial.



Resolviéndolo de manera numérica, tomamos como eje x la línea que une ambos centros, con el origen en la Tierra y x positivas dirigidas hacia el Sol, utilizando unidades en m. Con lo que la coordenada x de un punto será su distancia a la Tierra, y $1,5\cdot10^{11}$-x será la distancia de ese punto al Sol. Utilizando el principio de superposición, el potencial gravitatorio será la suma de potenciales gravitatorios asociados al Sol y a la Tierra. En la fórmula debemos utilizar distancias, no coordenadas, y usamos valor absoluto ya que las distancias siempre son positivas.
$$V=V_{Tierra}+V_{Sol}=-G\frac{M_{Tierra}}{|x|}-G\frac{M_{Sol}}{|1,5\cdot 10^{11}-x|}=0$$ Sustituyendo $M_{Sol}=333183\cdot M_{tierra}$,
$$0=\frac{1}{|x|}+\frac{333183}{|1,5\cdot 10^{11}-x|}\Rightarrow-\frac{1}{|x|}=\frac{333183}{|1,5\cdot 10^{11}-x|}$$ Resolvemos desglosando casos de valores absolutos:

Caso A: x<0 → |x|=-x, $|1,5\cdot10^{11}-x|=1,5\cdot10^{11}-x$ $\quad 333183\cdot x=1,5\cdot 10^{11}-x\Rightarrow x=\frac{1,5\cdot 10^{11}}{333184}=4,5\cdot 10^5\,m$
No es válido ya que la solución es positiva cuando la premisa es que fuera negativa.
Caso B: $0<x<1,5\cdot10^{11}$ → |x|=x, $|1,5\cdot10^{11}-x|=1,5\cdot10^{11}-x$
$$-333183\cdot x=1,5\cdot 10^{11}-x\Rightarrow x=\frac{1,5\cdot 10^{11}}{-333182}=-4,5\cdot 10^5\,m$$
No es válido ya que la solución es negativa cuando la premisa es que fuera positiva.
Caso C: $1,5\cdot10^{11}<x$→ |x|=x, $|1,5\cdot10^{11}-x|=-1,5\cdot10^{11}+x$
$$-333183\cdot x=-1,5\cdot 10^{11}+x\Rightarrow x=\frac{-1,5\cdot 10^{11}}{-333184}=4,5\cdot 10^5\,m$$
No es válido ya que la solución está fuera del rango establecido como premisa

Nota: Aunque los resultados fueran válidos, su valor es de 450 km, y tampoco serían válidos ya que quedaría en el interior de la Tierra (R_{Tierra} ≈6370 km) y dejaría de ser válido el modelo de masa puntual usado para la Tierra.
b) Tomando el mismo sistema de referencia del apartado a) y utilizando la ley de gravitación universal y el principio de superposición tenemos

$\vec{E}=\vec{E}_{Tierra}+\vec{E}_{Sol}=G\frac{M_{Tierra}}{x^2}(-\vec{i})+G\frac{M_{Sol}}{(1,5\cdot10^{11}-x)^2}\vec{i}=0$ Sustituyendo M_{Sol}=333183 ·M_{Tierra},

$$0=\frac{-1}{x^2}+\frac{333183}{(1,5\cdot10^{11}-x)^2}\Rightarrow 333183\cdot x^2=(1,5\cdot10^{11}-x)^2\Rightarrow\sqrt{333183}\cdot x=1,5\cdot10^{11}-x$$

$$x=\frac{1,5\cdot10^{11}}{\sqrt{333183}+1}=2,6\cdot10^8\,m$$

B. Pregunta 1.-

a) El momento angular es un vector pero se pide solamente el módulo.
Al estar los satélites geoestacionarios en el plano ecuatorial, el vector posición respecto al centro de la Tierra y el vector velocidad son perpendiculares, y podemos plantear

$$|\vec{L}|=R_{órbita}\cdot m_{satélite}\cdot v_{satélite}$$

Calculamos el radio de la órbita geoestacionaria. Al ser una órbita circular, podemos igualar fuerza gravitatoria y centrípeta, siendo al mismo tiempo $v=\frac{2\pi R_{órbita}}{T}$ con T=24·3600=86400 s

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,97\cdot10^{24}\cdot86400^2}{4\pi^2}}=4,22\cdot10^7\,m$$

$$|\vec{L}|=4,22\cdot10^7\cdot500\cdot\frac{2\pi4,22\cdot10^7}{86400}=6,48\cdot10^{13}\,kg\cdot m^2\cdot s^{-1}$$

Para calcular la altura respecto de la superficie terrestre, restamos el radio terrestre:
$h=R_{órbita}-R_{terrestre}=4,22\cdot10^7-6,37\cdot10^6=3,58\cdot10^7$ m

b) $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R_o}=-G\frac{Mm}{2R_o}=-6,67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5,97\cdot10^{24}\cdot500}{2\cdot4,22\cdot10^7}=-2,36\cdot10^9\,J$

2013-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) $g_{planeta}=G\frac{M_{planeta}}{R_{Planeta}^2}$

Como la órbita es circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria y expresamos en función de los datos para el primer satélite, teniendo $v_o=2\pi R_o/T$

$$m\frac{v_o^2}{R_o}=\frac{GM_{planeta}m}{R_o^2}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM_{planeta}}{R_o}\Rightarrow GM_{planeta}=\frac{4\pi^2R_o^3}{T^2}$$

Sustituyendo $g_{planeta}=\frac{4\pi^2R_o^3}{T^2R_{Planeta}^2}=\frac{4\pi^2((3+1)\cdot10^6)^3}{(2\cdot3600)^2\cdot(3\cdot10^6)^2}=5,4\,m/s^2$

b) Utilizando la tercera ley de Kepler, utilizamos subíndice 1 para datos primer satélite y 2 para segundo. Según enunciado T_1=2 h.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R_1^3}{R_2^3};T_2=T_1\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}=2\sqrt{\left(\frac{(3+1+0,5)\cdot10^6}{(3+1)\cdot10^6}\right)^3}=2,39\,h$$

B. Pregunta 1.-

a) $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{(4/3)\pi R^3}\Rightarrow M=\rho(4/3)\pi R^3$

$$\frac{g_A}{g_B}=\frac{G\frac{M_A}{R_A^2}}{G\frac{M_B}{R_B^2}}=\frac{M_A\cdot R_B^2}{M_B\cdot R_A^2}=\frac{\rho_A(4/3)\pi R_A^3 R_B^2}{\rho_B(4/3)\pi R_B^3 R_A^2}$$ Como enunciado indica misma densidad

$$\frac{g_A}{g_B}=\frac{R_A}{R_B}=\frac{3500}{3000}=7/6\approx 1{,}17 \qquad \frac{g_B}{g_A}=6/7\approx 0{,}86$$

b) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie de un planeta para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_{superficie}}=0\,;\,v_{escape}=\sqrt{2\frac{GM}{R_{superficie}}}\;.$$

$$\frac{v_{escapeA}}{v_{escapeB}}=\sqrt{\frac{2\frac{GM_A}{R_A}}{2\frac{GM_B}{R_B}}}=\sqrt{\frac{M_A R_B}{M_B R_A}}=\sqrt{\frac{\rho_A(4/3)\pi R_A^3 R_B}{\rho_B(4/3)\pi R_B^3 R_A}}=\frac{R_A}{R_B}=7/6$$

2013-Junio-Coincidentes

A. Pregunta 1.-

a) Se pide periodo $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4{,}33\cdot 10^{-4}}=1{,}45\cdot 10^4 s$

Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en una órbita circular, y expresando en función ω

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}=m\omega^2 R_0\Rightarrow R_o^3=\frac{GM}{\omega^2}\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

Sustituyendo $R_o=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}}{(4{,}33\cdot 10^{-4})^2}}=2{,}97\cdot 10^6 m$

Se nos pide altura desde la superficie $h=R_0-R_L=2{,}97\cdot 10^6-1{,}74\cdot 10^6=1{,}23\cdot 10^6$ m
b) Podemos deducir la expresión para la energía mecánica para una órbita circular

$$E_m=\frac{-1}{2}G\frac{Mm}{R_{órbita}}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{7{,}35\cdot 10^{22}\cdot 800}{2\cdot 2{,}97\cdot 10^6}=-6{,}60\cdot 10^8 J$$

B. Pregunta 1.-

a) $g_0=G\frac{M}{R_0^2}\Rightarrow G=\frac{g_0 R_0^2}{M}=\frac{9{,}81\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2}{5{,}97\cdot 10^{24}}=6{,}67\cdot 10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

Para un péndulo en régimen de pequeñas oscilaciones, se puede deducir la expresión $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$,

que sustituyendo nos da $T_0=2\pi\sqrt{\frac{2}{9{,}81}}\approx 2{,}84 s$

b) $g_1=G\frac{M}{R_1^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot 10^{24}}{(6{,}37\cdot 10^6+8\cdot 10^3)^2}=9{,}79 m/s^2$

$$T_0=T_1=2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g_1}}\Rightarrow L_1=g_1\cdot\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2=9{,}79\cdot\left(\frac{2{,}83}{2\pi}\right)^2=1{,}99 m$$

2013-Junio

A. Pregunta 3.-

a) $g_{Mercurio}=G\frac{M_{Mercurio}}{R_{Mercurio}^2}\Rightarrow M_{Mercurio}=\frac{g_{Mercurio}\cdot R_{Mercurio}^2}{G}=\frac{3{,}7\cdot(2440\cdot 10^3)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}}=3{,}3\cdot 10^{23} kg$

$$\rho_{Mercurio}=\frac{M_{Mercurio}}{V_{Mercurio}}=\frac{3{,}3\cdot 10^{23}}{(4/3)\pi(2440\cdot 10^3)^3}=5423\,kg/m^3$$

b) Si $g_{órbita}/g_{superfice}=1/4 \rightarrow R_{superfice}^2/R_{órbita}^2=1/4 \rightarrow R_{órbita} = 2\cdot R_{superficie}$

La energía necesaria es la diferencia de energía mecánica entre ambas situaciones:

-En superficie la energía es potencial:

$$E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3{,}3\cdot 10^{23}\cdot 5000}{2440\cdot 10^3}=-4{,}5\cdot 10^{10}\,J$$

-En órbita la energía es la suma de cinética y potencial. Si asumimos órbita circular estable, igualando fuerza centrípeta y gravedad podemos deducir la expresión para la energía mecánica

$E_m=-G\frac{Mm}{2}R_{órbita}$, y sustituyendo $R_{órbita} = 2\cdot R_{superficie}$, tenemos que

$$E_m=-G\frac{Mm}{2\cdot 2\cdot R_{superficie}}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3{,}3\cdot 10^{23}\cdot 5000}{2\cdot 2\cdot 2440\cdot 10^3}=-1{,}25\cdot 10^{10}\,J$$

La energía necesaria es $E_{m\ órbita} - E_{m\ superficie} = -1{,}25\cdot 10^{10} - (-4{,}5\cdot 10^{10}) = 3{,}25\cdot 10^{10}$ J

B. Pregunta 5.-

a) Falso. El momento angular, como vector y no solamente en módulo, es constante ya que la fuerza gravitatoria del Sol es una fuerza central. El momento lineal en el afelio es menor que en el perihelio, ya que en esos puntos, al ser vector posición r y momento lineal p perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y dado que $r_A > r_P$, tiene que cumplirse que $v_P > v_A$

b) Falso. La energía mecánica se conserva en toda la órbita ya que solamente actúa la fuerza gravitatoria del Sol que es conservativa. La energía potencial sí es mayor en el afelio que en el perihelio, ya que la distancia es mayor, y de acuerdo a la expresión para la Energía potencial E_p=-GMm/R, a valores mayores de R tendremos un número negativo más pequeño, que implicará un valor mayor.

2013-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) Al no existir rozamiento solamente actúa la fuerza de la gravedad que es conservativa y podemos plantear la conservación de la energía mecánica en el instante de lanzamiento y en el instante en el que alcanza la altura máxima.

1. Lanzamiento: $E_c=\frac{1}{2}mv^2$; $E_p=-G\frac{Mm}{R}$

2. Altura máxima (la altura es R+R/2= (3/2)·R): $E_c=0$; $E_p=-G\frac{Mm}{(3/2)\cdot R}=\frac{-2}{3}G\frac{Mm}{R}$

Igualando energía mecánica en puntos 1 y 2

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{-2}{3}G\frac{Mm}{R}\Rightarrow\frac{v^2}{2}=\frac{G}{3}\frac{M}{R}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2GM}{3R}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}25\cdot 10^{23}}{3\cdot 1{,}5\cdot 10^6}}=1924{,}98\,m/s$$

b) La aceleración es un vector. Calculamos su módulo e indicamos dirección y sentido cualitativamente: la dirección será radial y sentido dirigido hacia el centro del planeta.

$$|\vec{g}|=G\frac{M}{((3/2)\cdot R)^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{1{,}25\cdot 10^{23}}{(\frac{3}{2}\cdot 1{,}5\cdot 10^6)^2}=1{,}65\,m/s^2$$

B. Pregunta 1.-

a) Al ser una órbita circular, se puede deducir y manejar a la expresión $E_p=\frac{-GMm}{R}=2E_m$

Por lo tanto $M=\frac{2E_m R}{-Gm}=\frac{2\cdot(-3{,}27\cdot 10^8)\cdot 6\cdot 10^6}{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 800}=7{,}35\cdot 10^{22}\,kg$

b) La velocidad lineal en la órbita se puede obtener igualando fuerza centrípeta y gravitatoria, o también deducir y manejar la expresión $E_p= 2E_m$ y $E_m=-E_c$.

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow -(-3{,}27\cdot 10^8)=\frac{1}{2}\cdot 800\cdot v^2 \qquad v=\sqrt{\frac{3{,}27\cdot 10^8\cdot 2}{800}}=904\,m/s$$

$$\omega=\frac{v}{R}=\frac{904}{6\cdot 10^6}=1{,}5\cdot 10^{-4}\,rad/s$$

Si igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria, podríamos plantear

$$F_c=F_g \Rightarrow \cancel{m}\omega^2 R_O=G\frac{M\cancel{m}}{R_O^2} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{GM}{R_O^3}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}}{(6\cdot 10^6)^3}}=1{,}5\cdot 10^{-4}\,rad/s$$

2012-Septiembre

A. Pregunta 2.-

a) El trabajo a realizar lo podemos relacionar con la diferencia de energía entre ambas órbitas:
-El trabajo realizado es la variación de energía cinética (teorema de las fuerzas vivas)
-El trabajo realizado para ir de órbita A a órbita B es la variación de energía potencial cambiada de signo.
En órbita circular, igualando fuerza centrípeta y gravitatoria, podemos llegar a que la energía mecánica y la cinética son la mitad en valor absoluto que la energía potencial, siendo la energía cinética positiva.
Situación A. R_{oA}=5/2 R_T :

$$E_{pA}=-G\frac{M_T m}{5/2R_T}=-2G\frac{M_T m}{5R_T} \qquad E_{cA}=\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{5/2R_T}=G\frac{M_T m}{5R_T} \qquad E_{mA}=-G\frac{M_T m}{5R_T}$$

Situación B. R_{oB}=5 R_T :

$$E_{pB}=-G\frac{M_T m}{5R_T} \qquad E_{cB}=\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T} \qquad E_{mB}=\frac{-1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T}$$

-El trabajo realizado por el campo asociado asociado a la variación de energía potencial:

$$W_{FC\,A\to B}=-(E_{pB}-E_{pA})=-(-G\frac{M_T m}{5R_T}-(-2G\frac{M_T m}{5R_T}))=G\frac{M_T m}{5R_T}(1-2)$$

$$W_{FC\,A\to B}=-(E_{pB}-E_{pA})=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot\frac{400}{5\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=-5\cdot 10^9\,J$$

El resultado es negativo, trabajo no realizado por el campo sino aportado contra el campo (en sentido opuesto campo): estamos llevando el satélite a una "altura mayor", con más energía potencial, aportamos energía al sistema.
-El trabajo asociado asociado a la variación de energía cinética:

$$W_{Total\,A\to B}=E_{cB}-E_{cA}=\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T}-G\frac{M_T m}{5R_T}=G\frac{M_T m}{5R_T}(\frac{1}{2}-1)=\frac{-1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T}$$

$$W_{Total\,A\to B}=E_{cB}-E_{cA}=-0{,}5\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot\frac{400}{5\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=-2{,}5\cdot 10^9\,J$$

El resultado es negativo, en la órbita B la energía cinética es menor. Se extrae trabajo/energía del sistema, que "pierde" energía cinética.
El trabajo total a realizar será el trabajo aportado para aumentar la energía potencial (cambiamos el signo porque las expresiones son para el trabajo realizado por el campo, no externamente) menos el trabajo extraído para reducir la energía cinética:

$$W_{No\ conservativo\,A\to B}=\Delta E_m=\Delta E_p+\Delta E_c=5\cdot 10^9-2{,}5\cdot 10^9\,J=2{,}5\cdot 10^9\,J$$

Nota: podemos llegar a la misma expresión indicando que el trabajo aportado es la variación de energía mecánica. Como en las órbitas E_m=-E_c,

$$W_{No\ conservativo\,A\to B}=E_{mB}-E_{mA}=-(E_{cB}-E_{cA})=2{,}5\cdot 10^9\,J$$

b) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria, y $v_o=2\pi R_o/T$

$$m\frac{v_o^2}{R_o}=\frac{GM_T m}{R_o^2} \Rightarrow \frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM_T}{R_o} \Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2 R_o^3}{GM_T}}=T=\sqrt{\frac{4\pi^2(5\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}}=5{,}68\cdot 10^4\,s$$

B. Pregunta 2.- *(Similitudes con 2010-Junio-Coincidentes-B.Cuestión 1: 1/6≈0,166, 1/4≈0,273)*

a) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie terrestre para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=0\,;\,v_{escape}=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}\quad .$$

Se pide la velocidad de escape de la Luna y no disponemos de masa: intentamos relacionar masa de la Luna con la de la Tierra según la relación entre aceleraciones de la gravedad proporcionada:

$$\frac{|\vec{g}_L|}{|g_T|}=0{,}166=\frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{M_L}{M_T}\frac{R_T^2}{(0{,}273\,R_T)^2}\Rightarrow\frac{M_L}{M_T}=0{,}166\cdot 0{,}273^2$$

$$v_{e_L}=\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,0{,}166\cdot 0{,}273^2\cdot 5{,}98\cdot\frac{10^{24}}{0{,}273\cdot 6{,}37\cdot 10^6}}=2382\,m/s$$

b) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos la velocidad a m/s

$$m\frac{v_o^2}{R_o}=\frac{GM_Lm}{R_o^2}\Rightarrow R_o=\frac{GM_L}{v_o^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 0{,}166\cdot 0{,}273^2\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{1{,}5\cdot 10^{32}}=2{,}19\cdot 10^6\,m$$

2012-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos el radio de la órbita a metros.
$R_S=R_T+h=6{,}37\cdot 10^6+2\cdot 10^7=2{,}637\cdot 10^7$ m

$$m\frac{v_o^2}{R_S}=\frac{GM_Tm}{R_S^2}\Rightarrow v_o=\sqrt{\frac{GM_T}{R_S}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{2{,}637\cdot 10^7}}=3889\,m/s$$

b) Si la velocidad se anulase repentinamente, no tendría energía cinética y solamente tendría energía potencial asociada a la altura de la órbita, y caería verticalmente. Sin considerar el rozamiento del aire solamente actúa la fuerza de la gravedad conservativa y podemos considerar que hay conservación de la energía mecánica.

A. Órbita tras el frenado: $E_c=0, E_p=-G\frac{M_Tm}{R_S}$

B. Llegada a la superficie. $E_c=\frac{1}{2}mv_{suelo}^2, E_p=-G\frac{M_Tm}{R_T}$

Igualando energías mecánicas en A y B

$$-G\frac{M_Tm}{R_S}=\frac{1}{2}mv_{suelo}^2-G\frac{M_Tm}{R_T}\Rightarrow v_{suelo}=\sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_S}\right)}$$

$$v_{suelo}=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{2{,}637\cdot 10^7}\right)}=9746\,m/s$$

B. Pregunta 1.-

a) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos el radio de la órbita (R_O) a metros, y obtenemos periodo ya que $v_O=2\pi R_O/T$. Con datos enunciado
$R_O=R_T+h=6{,}37\cdot 10^6+2{,}5\cdot 10^7=3{,}137\cdot 10^7$ m

$$m\frac{\left(\frac{2\pi R_O}{T}\right)^2}{R_O}=\frac{GM_Tm}{R_O^2}\Rightarrow 4\pi^2R_O^3=GM_TT^2\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2R_O^3}{GM_T}}$$

$$T=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2\cdot(3{,}137\cdot 10^7)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}}=55276\,s$$

b) $E_p=-G\frac{M_T m}{R_S}=-6,67\cdot10^{-11}\frac{5,98\cdot10^{24}\cdot3000}{3,137\cdot10^7}=-3,81\cdot10^{10}J$

Para la energía cinética calculamos la velocidad con el periodo

$$E_c=\frac{1}{2}m(\frac{2\pi R_O}{T})^2=0,5\cdot3000\cdot(\frac{2\cdot\pi\cdot3,137\cdot10^7}{55276})^2=1,91\cdot10^{10}J$$

También podríamos saber que en una órbita circular estable la energía mecánica y la cinética son la mitad en valor absoluto que la energía potencial, siendo la energía cinética positiva.

$$E_c=\frac{|E_p|}{2}=\frac{|-3,81\cdot10^{10}|}{2}=1,91\cdot10^{10}J$$

2012-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) $g=G\frac{M}{R^2}; M=\frac{g\cdot R^2}{G}=\frac{7,2\cdot(4100\cdot10^3)^2}{6,67\cdot10^{-11}}=1,81\cdot10^{24}kg$

b) Calculamos la diferencia de energía entre ambas situaciones

$$Superficie: E_c=0; E_p=-G\frac{Mm}{R}=\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot1,81\cdot10^{24}\cdot3}{4100\cdot10^3}=-8,83\cdot10^7J$$

$$Órbita: E_c=\frac{1}{2}mv^2; E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$$

$$R_o=4100+1000=5100\,km$$

$$E_p=\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot1,81\cdot10^{24}\cdot3}{5100\cdot10^3}=-7,1\cdot10^7J$$

$$Calculamos\ velocidad\ en\ la\ órbita\ estable, donde\ F_g=F_c$$

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_0}; v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot1,81\cdot10^{24}}{5100\cdot10^3}}=4865\,m/s$$

$$E_c=0,5\cdot3\cdot4865^2=3,55\cdot10^7J$$

Energía mecánica total en superficie: E_s=-8,83·10^7 J

Energía mecánica total en órbita: E_o=-7,1·10^7 +3,55·10^7 = -3,55·10^7 J

Nota: en una órbita estable la E_m es la mitad en valor absoluto de la E_p , $E_m=\frac{-GMm}{2R}$

La energía a suministrar es la diferencia: E_o-E_s=-3,55·10^7 -(-8,83·10^7)=5,28·10^7 J

B. Pregunta 1.-

$$Órbita: E_c=\frac{1}{2}mv^2; E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$$

$$R_o=6370+2500=8870\,km$$

$$Calculamos\ velocidad\ en\ la\ órbita\ estable, donde\ F_g=F_c$$

a) $G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_0}; v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,98\cdot10^{24}}{8870\cdot10^3}}=6706\,m/s$

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=0,5\cdot1100\cdot6706^2=2,47\cdot10^{10}J$$

$$E_p=\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot5,98\cdot10^{24}\cdot1100}{8870\cdot10^3}=-4,95\cdot10^{10}J$$

$$E_m total=2,47\cdot10^{10}-4,95\cdot10^{10}=-2,48\cdot10^{10}J$$

b) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$

Al calcular el momento angular respecto al centro de la Tierra para una órbita circular, el vector posición siempre es perpendicular al vector velocidad, por lo que su módulo será

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|=8870\cdot10^3\cdot1100\cdot6706=6,54\cdot10^{13}kg\frac{m^2}{s}[también\ J\cdot s]$$

2011-Septiembre-Coincidentes

A. Problema 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales, por lo que su módulo es igual entre dos puntos cualquiera de la órbita. Como en perigeo y apogeo los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y despejar para obtener el módulo de la velocidad solicitado.

$$v_A = \frac{r_p v_p}{r_A} = \frac{7{,}02\cdot 10^6 \cdot 8{,}22\cdot 10^3}{10{,}30\cdot 10^6} = 5{,}60\cdot 10^3\, m/s$$

b) El módulo del momento angular es constante en la órbita, lo podemos calcular en perigeo o apogeo, tomamos uno de ellos.

$$|\vec{L}| = r_p m v_p = 7{,}02\cdot 10^6 \cdot 200 \cdot 8{,}22\cdot 10^3 = 1{,}15\cdot 10^{13}\, kg\, m^2 s^{-1} [también\, J\cdot s]$$

Su dirección es perpendicular al pano de la órbita, y su sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha al realizar el producto vectorial de los vectores r y p.

c) La velocidad areolar es constante según la 2ª ley de Kepler. Hay dos opciones

A.-Teniendo el periodo de la órbita, se puede utilizar la fórmula del área de la elipse y dividir por él (similar a resolución apartado a de 2011-Junio-A.Cuestión 1 para órbita circular). No se da T explícitamente, pero se puede obtener con la 3ª ley de Kepler $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ recordando que para órbitas elípticas en hay que usar como R el semieje mayor de la elipse "a", que podemos calcular como la mitad de la suma de radio en perigeo y apogeo.

$$a = \frac{r_{apogeo} + r_{perigeo}}{2} = \frac{10{,}30\cdot 10^6 + 7{,}02\cdot 10^6}{2} = 8{,}66\cdot 10^6\, m$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (8{,}66\cdot 10^6)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}} = 8017{,}6\, s$$

Para calcular el área de la elipse debemos calcular su semieje menor, "b"

Una vez conocido el semieje mayor y el apogeo, podemos calcular la distancia del centro al foco

$$f = r_{foco\, a\, centro} = a - r_{perigeo} = 8{,}66\cdot 10^6 - 7{,}02\cdot 10^6 = 1{,}64\cdot 10^6\, m$$

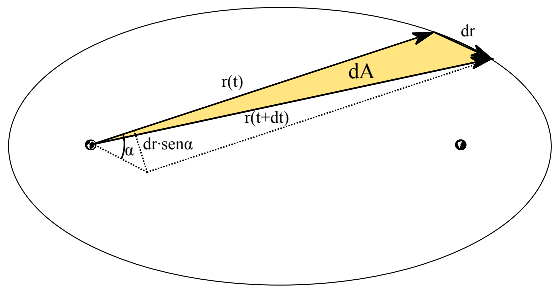
Sabiendo que por geometría de la elipse la suma de distancias entre un punto cualquiera y ambos focos es constante (mirando en apogeo es ra + (2f+ra) =2a), y tomando los puntos donde cortan semieje menor y mayor tenemos que la distancia total es 2a. Tomando un triángulo formado por f, centro y extremo semieje menor. $f^2 + b^2 = a^2$ luego $b = \sqrt{(8{,}66\cdot 10^6)^2 - (1{,}64\cdot 10^6)^2} = 8{,}5\cdot 10^6\, m$

El área es $A = \pi a b = \pi \cdot 8{,}66\cdot 10^6 \cdot 8{,}5\cdot 10^6 = 2{,}31\cdot 10^{14}\, m^2$

La velocidad areolar es $\frac{dA}{dt} = \frac{2{,}31\cdot 10^{14}}{8017{,}6} = 2{,}88\cdot 10^{10}\, \frac{m^2}{s}$

B.-Usar la relación de proporcionalidad entre el módulo del momento angular, que es constante en toda la órbita, y la velocidad areolar, también constante. La expresión o bien se conoce, o se deduce: Si planteamos la órbita elíptica y un área diferencial barrida

$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times d\vec{r}|$ (La mitad del área del paralelogramo formado por vectores r y dr)



Operando para obtener la velocidad areolar

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|$$

Como $|\vec{L}| = cte = m|\vec{r} \times \vec{v}|$ $\quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = cte$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1{,}15\cdot 10^{13}}{2\cdot 200} = 2{,}88\cdot 10^{10}\, \frac{m^2}{s}$$

d) La energía mecánica del satélite es constante en toda la órbita. La calculamos en uno de los puntos: perigeo.

$$E_{c\,perigeo}=\frac{1}{2}m\,v_{perigeo}^2=0{,}5\cdot200\cdot(8{,}22\cdot10^3)^2=6{,}76\cdot10^9\,J$$

$$E_{p\,perigeo}=-G\frac{M_T\cdot m}{r_{perigeo}}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200}{7{,}02\cdot10^6}=-1{,}136\cdot10^{10}\,J$$

$$E_m=E_{m\,perigeo}=6{,}76\cdot10^9-1{,}136\cdot10^{10}=-4{,}6\cdot10^9\,J$$

Nota: la expresión $E_m=-G\frac{Mm}{2r}$ que se conoce / deduce fácilmente para órbitas circulares es válida en órbitas elípticas si se sustituye el radio r por el semieje mayor de la elipse "a", calculado en una de las opciones de apartado c.

$$E_m=-G\frac{Mm}{2a}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200}{2\cdot8{,}66\cdot10^6}=-4{,}6\cdot10^9\,J$$

2011-Junio-Coincidentes

B. Cuestión 1 .-

a) $\text{Órbita circular, igualando } F_g=F_c \text{ se llega a } E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p=-E_c$

$$E_p=\frac{-GMm}{r}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot200}{3\cdot10^7}=-2{,}65\cdot10^9\,J$$

$$E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot200}{2\cdot3\cdot10^7}=-1{,}33\cdot10^9\,J$$

$$E_c=E_m-E_p=-1{,}33\cdot10^9-(-2{,}65\cdot10^9)=1{,}32\cdot10^9\,J$$

b) La energía a aportar es la diferencia de energía mecánica entre ambas situaciones

$$E_m(r=4\cdot10^7\,m)=\frac{-GMm}{2}r=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot200}{2\cdot4\cdot10^7}=-9{,}95\cdot10^8\,J$$

$$\Delta E=E_m(r=4\cdot10^7\,m)-E_m(r=3\cdot10^7\,m)=-9{,}95\cdot10^8-(-1{,}32\cdot10^9)=3{,}25\cdot10^8\,J$$

2011-Septiembre

A. Cuestión 1.-

a) $|\vec{g}|=\frac{|\vec{F}_g|}{m}=\frac{GM}{r^2}$ En la superficie, si el radio del plantea es R_p $|\vec{g}|=\frac{GM}{R_p^2}$

La aceleración de la gravedad es una magnitud vectorial; tomando el origen de coordenadas en el centro del planeta y considerando $\vec{u}_r$ un vector unitario que va desde el centro del planeta (lo asumimos homogéneo y su centro geométrico coincide con el centro de masas) hasta el punto de la superficie del planeta

$\vec{g}=-|\vec{g}|\vec{u}_r=\frac{-GM}{R_p^2}\vec{u}_r$ El signo menos indica que está dirigido hacia el centro del planeta.

b) Si $h=R_T$, $r_h=R_T+h=2R_T$; $\frac{|\vec{g}_{superfice}|}{|\vec{g}_h|}=\frac{\frac{GM}{R_T^2}}{\frac{GM}{(2R_T)^2}}=\frac{4R_T^2}{R_T^2}=4\Rightarrow|\vec{g}_h|=\frac{|\vec{g}_{superficie}|}{4}=\frac{9{,}8}{4}=2{,}45\,m\,s^{-2}$

B. Problema 1.-

a)
$$\text{En órbita circular estable, } F_g=F_c$$
$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_0};\ v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{2{,}26\cdot6{,}37\cdot10^6}}=5264\,m/s$$

Nota: la velocidad es independiente de la masa de la sonda.

b) $E_p=\frac{-GMm}{R_o}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot1000}{2{,}26\cdot6{,}37\cdot10^6}=-2{,}77\cdot10^{10}\,J$

c)
$$\text{Órbita circular, igualando } F_g=F_c \text{ se llega a } E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p=-E_c$$
$$E_m=\frac{-GMm}{2r}=0{,}5\cdot(-2{,}77\cdot 10^{10})=-1{,}39\cdot 10^{10}\,J$$

d) La energía a comunicar es la diferencia de energía entre ambas situaciones.
En el infinito la E_p y la E_c es cero, por lo que la E_m es cero.
$\Delta E = E_{infinito}-E_{órbita}=0-(-1{,}39\cdot 10^{10}) = 1{,}39\cdot 10^{10}$ J

2011-Junio

A. Cuestión 1.-

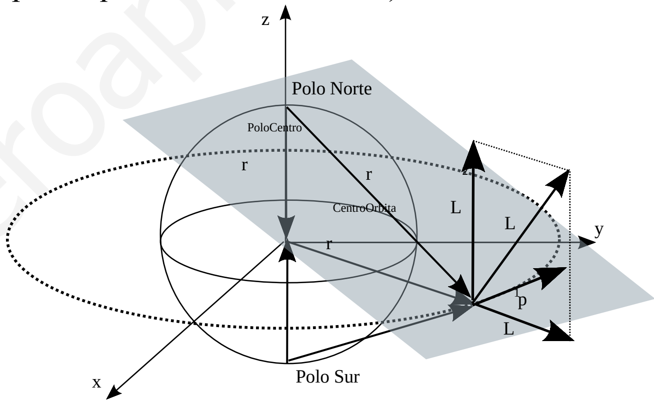
Nota: suponemos ciertos los datos (el radio real de una órbita geoestacionaria no es 3,6×10⁷ m, el dato suministrado es el valor real de la altura de una órbita geoestacionaria)

a) Como la órbita es circular y según la tercera ley de Kepler la velocidad areolar es constante

$$v_{areolar}=\frac{\pi\cdot r^2}{T}=\frac{\pi\cdot(3{,}6\cdot 10^7)^2}{24\cdot 3600}=4{,}7\cdot 10^{10}\,m^2/s$$

b) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$. Si es geoestacionario la órbita está en el plano ecuatorial, pero el momento angular es referido a un punto, por lo que no lo hacemos respecto al centro de la Tierra sino que utilizamos los dos puntos que indica el enunciado.
El momento angular respecto a los polos de la Tierra es respecto a dos puntos que están en el eje de giro, por lo que el vector posición siempre lo podemos descomponer en un vector que vaya desde el polo hasta el centro de la Tierra más un vector que vaya desde el centro de la Tierra hasta el punto de la órbita (y este último vector está en el mismo plano que el vector velocidad)

$$\vec{L}=(\vec{r}_{PoloCentro}+\vec{r}_{CentroOrbita})\times m\cdot\vec{v}$$
$$\vec{L}=\vec{r}_{PoloCentro}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}_{CentroOrbita}\times m\cdot\vec{v}=\vec{L}_1+\vec{L}_2$$



Para calcular el módulo de la la velocidad, podemos calcular de manera intermedia la velocidad angular, o sabiendo que es constante, utilizar el cociente entre espacio recorrido en la órbita circular

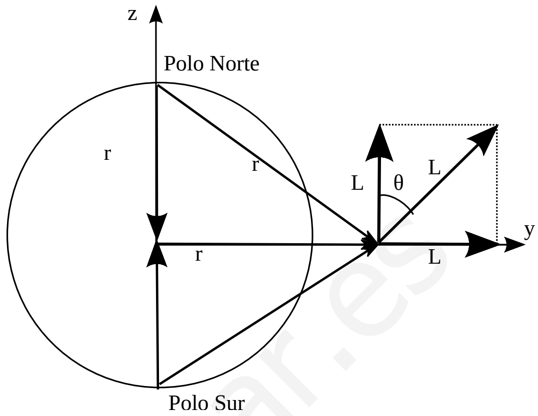
$$|\vec{v}|=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$$
$$|\vec{v}|=\frac{2\cdot\pi\cdot 3{,}6\cdot 10^7}{24\cdot 3600}=2618\,m/s$$

Si tomamos el plano ecuatorial como plano xy y el eje de giro en el que están los dos polos como eje z, tomando como sentido positivo el dirigido hacia el polo norte geográfico, tendremos:

- $\vec{L}_1=\vec{r}_{PoloCentro}\times m\cdot\vec{v}$
  - Dirección: perpendicular al plano formado por eje z y el vector velocidad: será dirección radial, misma dirección de vector posición.
  - Sentido: de acuerdo al sentido de giro del satélite, y según de qué polo se trate, será el mismo sentido que el vector posición (para polo norte) o sentido opuesto (polo sur).
  - Módulo: al ser siempre el vector perpendicular a la velocidad, será (no se proporciona como dato el radio de la Tierra, se toma 6370 km.
    $$6{,}37\cdot 10^6\cdot 5\cdot 10^3\cdot 2618=8{,}3\cdot 10^{13}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\, J\cdot s]$$
- $\vec{L}_2=\vec{r}_{CentroOrbita}\times m\cdot\vec{v}$
  - Dirección: perpendicular al plano xy
  - Sentido: de acuerdo al sentido de giro del satélite, que tiene que ser el mismo que el de la tierra, estará dirigido hacia z positivas.
  - Módulo: al ser siempre el vector perpendicular a la velocidad, será

$$3{,}6\cdot10^{7}\cdot5\cdot10^{3}\cdot2618=4{,}7\cdot10^{14}\frac{kg\cdot m^{2}}{s}[también\, J\cdot s]$$

Fijándonos en los que nos solicita el enunciado, indicamos de manera global el módulo, dirección y sentido. Realizamos un diagrama en 2 dimensiones más simplificado donde se ve el ángulo que forma con la vertical: no está a escala, ya que se ve que $|\vec{L}_2|\gg|\vec{L}_1|$, por lo que podríamos intentar aproximar $|\vec{L}|\approx|\vec{L}_2|$



- Módulo: Viendo que los dos vectores calculados antes son perpendiculares entre sí:

$$|\vec{L}|=\sqrt{|\vec{L}_1|^2+|\vec{L}_2|^2}$$
$$|\vec{L}|=\sqrt{(8{,}3\cdot10^{13})^2+(4{,}7\cdot10^{14})^2}$$
$$|\vec{L}|=4{,}8\cdot10^{14}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\, J\cdot s]$$

- Dirección: en una recta que está en el plano formado por el eje de la Tierra y el satélite, y que f orma con el eje z un ángulo θ, siendo

$$tg\theta=\frac{|\vec{L}_1|}{|\vec{L}_2|}=\frac{4{,}7\cdot10^{14}}{8{,}3\cdot10^{13}}\Rightarrow\theta=arctg(5{,}66)=1{,}4\,rad=80º$$

- Sentido: dirigido hacia z positivas (Polo Norte) o z negativas (Polo Sur),

B. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler para los datos de la Luna, y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la fórmula es la del objeto central respecto al que se orbita, en este caso la Tierra, y haciendo cambios de unidades

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM};G=\frac{4\pi^2\cdot R^3}{M\cdot T^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(3{,}84\cdot10^8)^3}{5{,}98\cdot10^{24}\cdot(27{,}32\cdot24\cdot3600)^2}=6{,}7\cdot10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$$

b) De acuerdo a la Ley de Gravitación universal, la fuerza será un vector, de dirección la línea que une los centros de gravedad de ambos cuerpos, de sentido atractivo, y de módulo (mismo módulo Tierra -Luna que Luna-Tierra pero sentido opuesto)

$$|\vec{F}|=G\frac{Mm}{r^2}=\frac{6{,}7\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{3{,}84\cdot10^{82}}=2\cdot10^{20}N$$

c) Para calcular el trabajo podríamos plantear una integral de la fuerza (variable según la posición) en el recorrido, o plantear que $W=-\Delta E_p$ teniendo en cuenta que el trabajo sería el realizado por el campo y que la masa a mover de 5000 kg tendrá Energía potencial respecto de la Tierra y de la Luna. Despreciamos el radio respecto de la distancia global, pero no para considerar el cuerpo sobre la superficie de cada planeta.

En el punto final (la Luna)

$$E_{p\,Final\,respecto\,Tierra}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot5000}{3{,}84\cdot10^{8}}=-5{,}2\cdot10^{9}J$$
$$E_{p\,Final\,respecto\,Luna}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}\cdot5000}{1{,}74\cdot10^{6}}=-1{,}4\cdot10^{10}J$$
$$E_{p\,Final}=-1{,}92\cdot10^{10}J$$

En el punto inicial (la Tierra)

$$E_{p\,Inicial\,respecto\,Luna}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot10^{-11}\cdot7{,}35\cdot10^{22}\cdot5000}{3{,}84\cdot10^{8}}=-6{,}4\cdot10^{7}J$$
$$E_{p\,Inicial\,respecto\,Tierra}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot5000}{6{,}37\cdot10^{6}}=-3{,}14\cdot10^{11}J$$
$$E_{p\,Inicial}=-6{,}4\cdot10^{7}-3{,}14\cdot10^{11}=-3{,}14064\cdot10^{11}J$$

Calculamos la variación para calcular el trabajo

$$W=-\Delta E_p=-(E_{p\,Final}-E_{p\,inicial})=-(-1{,}92\cdot10^{10}-(-3{,}14064\cdot10^{11}))=-2{,}95\cdot10^{11}J$$

El trabajo es negativo porque claramente no es realizado por el campo, sino que se realiza de manera externa a él.
d) Si la distancia a la Tierra es $R_L/4$, la distancia a la Luna será ¾ R_L

$$\frac{|\vec{F}_T|}{|\vec{F}_L|}=\frac{G\frac{M_T m}{r_T^2}}{G\frac{M_L m}{r_L^2}}=\frac{M_T(3/4\,R_L)^2}{M_L(1/4\,R_L)^2}=\frac{M_T}{M_L}\cdot 3^2=\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{7{,}35\cdot 10^{22}}\cdot 9=732$$

2011-Modelo

A. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler para los datos del planeta, y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la fórmula es la del objeto central respecto al que se orbita, en este caso la estrella, y haciendo cambios de unidades (se puede llegar también igualando F_g y F_c)

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM};\ M=\frac{4\pi^2\cdot R^3}{G\cdot T^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(10^8\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(3\cdot 365\cdot 24\cdot 3600)^2}=6{,}61\cdot 10^{28}\,kg$$

b)

$$E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r};[F_c=F_g\Rightarrow v^2=\frac{GM}{r}]=\frac{-GMm}{2r}$$

$$E_m=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}61\cdot 10^{28}\cdot 10^{24}}{2\cdot 10^8\cdot 10^3}=-2{,}2\cdot 10^{31}\,J$$

c) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$
Al calcular el momento angular respecto al centro de la estrella para una órbita circular, el vector posición siempre es perpendicular al vector velocidad, por lo que su módulo será

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|=10^8\cdot 10^3\cdot 10^{24}\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}61\cdot 10^{28}}{10^8\cdot 10^3}}=6{,}64\cdot 10^{38}\,\frac{kg\cdot m^2}{s}[también J\cdot s]$$

d)

$$r_2=2\cdot r_1;\ \omega_2=\frac{v_2}{r_2}=\frac{\sqrt{\frac{GM}{r_2}}}{r_2}=\sqrt{\frac{GM}{(2r_1)^3}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}61\cdot 10^{28}}{(2\cdot 10^8\cdot 10^3)^3}}=2{,}35\cdot 10^{-8}\,rad/s$$

B. Cuestión 1.-

a)

$$\text{Órbita circular } F_g=F_c;\ \frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};\ v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}}=\frac{\frac{1}{2}m_A v_A^2}{\frac{1}{2}m_B v_B^2}=\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2=\frac{\frac{GM}{r_A}}{\frac{GM}{r_B}}=\frac{r_B}{r_A}<1\text{, luego } E_{c_A}<E_{c_B}\text{. Tiene mayor } E_c \text{ el satélite B}$$

b)

$$\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}}=\frac{\frac{1}{2}m_A v_A^2}{\frac{1}{2}m_B v_B^2}=\frac{m_A}{m_B}\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2=\frac{m_A}{m_B}\frac{\frac{GM}{r_A}}{\frac{GM}{r_B}}=\frac{m_A}{m_B}<1\text{, luego } E_{c_A}<E_{c_B}\text{. Tiene mayor } E_c \text{ el satélite B}$$

2010-Septiembre-Fase General

A. Problema 1.-

Solución 100% idéntica a 2008-Septiembre-A-Problema 2, varía ligeramente enunciado apartado d

B. Cuestión 1.-

a)

$$\text{Órbita circular } F_g=F_c;\ \frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};\ v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$E_{c_L}=\frac{1}{2}m_L v_L^2=\frac{1}{2}m_L\frac{GM_T}{r}$$

$$E_{p_L}=-GM_T\frac{m_L}{r}$$

$$\frac{E_{c_L}}{E_{p_L}}=\frac{-1}{2};E_{p_L}=-2E_{c_L}$$

b) $$\acute{O}rbita\ circular\ v_L=\frac{2\pi r}{T};T=\frac{2\pi r}{v_L}=\frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}}=\frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}};T^2=4\frac{\pi^2}{GM}r^3(Tercer\ ley\ de\ Kepler)$$

2010-Septiembre-Fase Específica

A. Cuestión 1.-

a) (Similar a 2009-Septiembre-Cuestión 1-b) Se puede razonar de dos maneras

- El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y dado que $r_A > r_P$, tiene que cumplirse que $v_P > v_A$
- La Energía mecánica es constante en toda la órbita al ser fuerzas conservativas, por lo tanto en el punto donde la Ep es menor (perihelio deducible según expresión Ep, la Ep será mínima en valor absoluto pero máxima (es negativa)), la Energía cinética será mayor y por lo tanto también la velocidad.

b) Como sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica se conserva en toda la órbita, por lo que es la misma en toda ella, incluyendo afelio y perihelio $E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{r}+\frac{1}{2}mv^2$

B. Cuestión 1.-

$$\acute{O}rbita\ circular\ F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

a) $$E_{c_{asteroide}}=\frac{1}{2}m_{asteroide}v_{asteroide}^2=\frac{1}{2}m_{asteroide}\frac{GM_{estrella}}{r}$$

$$E_{p_{asteroide}}=-GM_{estrella}\frac{m_{asteroide}}{r}$$

$$\frac{E_{c_{asteroide}}}{E_{p_{asteroide}}}=\frac{-1}{2};E_{p_{asteroide}}=-2E_{c_{asteroide}}$$

b) $$E_m=E_p+E_c=-2E_c+E_c=-E_c$$

$$E_c=10^{10}J;E_p=-2\cdot 10^{10}J$$

2010-Junio-Coincidentes

A. Problema 1.-

a) Según la segunda ley de Kepler sabemos que la velocidad areolar es constante, por lo que podemos obtener el periodo del satélite A.

$$v_{areolar}=\frac{\acute{a}rea}{tiempo}=8210\cdot 10^6=\frac{\pi r_A^2}{T_A}\Rightarrow T_A=\frac{\pi\cdot(8400\cdot 10^3)^2}{8210\cdot 10^6}=27000\,s$$

b) Igualando Fc y Fg en órbita circular obtenemos expresión de la relación entre periodo, radio y masa del planeta, que es la tercera ley de Kepler

$$\acute{O}rbita\ circular\ F_g=F_c;v=\frac{2\pi R_o}{T};\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o};T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3$$

Despejando la masa y sustituyendo $M=\frac{4\pi^2 R_o^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2(8400\cdot 10^3)^3}{6,67\cdot 10^{-11}\cdot(27000)^2}=4,8\cdot 10^{23}kg$

c) $\acute{O}rbita\ circular,\ igualando\ F_g=F_c\ se\ llega\ a\ E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p=-E_c$

$$\frac{|\vec{F}_A|}{|F_B|}=37=\frac{\frac{GMm_A}{R_{oA}^2}}{\frac{GMm_B}{R_{oB}^2}}=\frac{m_A}{m_B}\frac{R_{oB}^2}{R_{oA}^2}\Rightarrow\frac{m_A}{m_B}=37\frac{R_{oA}^2}{R_{oB}^2}$$

$$\frac{E_{mA}}{E_{mB}}=\frac{\frac{-GMm_A}{2R_{oA}}}{\frac{-GMm_B}{2R_{oB}}}=\frac{m_A}{m_B}\frac{R_{oB}}{R_{oA}}=37\frac{R_{oA}^2}{R_{oB}^2}\frac{R_{oB}}{R_{oA}}=37\frac{8400}{23500}=13{,}2$$

d) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$. Si tomamos el origen de coordenadas en el centro de la órbita, el plano ecuatorial como plano xy, y el giro del planeta en el sentido de las agujas del reloj visto desde z positivas, tendremos que los vectores posición y momento lineal siempre estarán en el plano xy, y su producto vectorial tendrá dirección del eje z y sentido dirigido hacia z negativas.
El módulo lo podemos calcular teniendo en cuenta que la órbita es circular, por lo que vectores posición y momento lineal son siempre perpendiculares, y la expresión de la velocidad la podemos deducir de la expresión vista en apartado b.

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|=8400\cdot10^3\cdot1{,}08\cdot10^{16}\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4{,}8\cdot10^{23}}{8400\cdot10^3}}=1{,}77\cdot10^{26}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\,J\cdot s]$$

B. Cuestión 1.-
a) El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie terrestre para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=0;v_{escape}=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$ independiente de la masa del objeto. Lo que sí variará con la masa será la energía cinética del objeto lanzado a esa velocidad

b) $\frac{|\vec{g}_L|}{|g_T|}=\frac{1}{6}=\frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{M_L}{M_T}\frac{(4R_L)^2}{R_L}\Rightarrow\frac{M_L}{M_T}=\frac{1}{6\cdot16}=\frac{1}{96}$

$$\frac{v_{e_L}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T^2}}}=\sqrt{\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_L}}=\sqrt{\frac{1}{96}\frac{4R_L}{R_L}}=\sqrt{\frac{4}{96}}=0{,}2$$

2010-Junio-Fase General

***A.* Cuestión 1.-** *(Cuestiones de fechas anteriores donde se piden enunciados leyes Kepler: 2009-Modelo-Cuestión 1 (3ª), 2006-Modelo-Cuestión 1 (1ª, 2ª y 3ª), 2000-Junio-Cuestión 1 (1ª y 2ª))*
a) Ley de las áreas. El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector que une el Sol y el planeta, la velocidad areolar, es constante. En una órbita elíptica en la que el Sol está en uno de los focos según la primera ley, en el perihelio (punto más cercano al Sol, radiovector de valor mínimo) la velocidad debe ser máxima para que barra la misma cantidad de área por unidad de tiempo que en otros puntos de la órbita. De la misma manera la velocidad es mínima en el afelio (punto más alejado del Sol, radiovector de valor máximo), ya que con poco giro el radiovector barre más área que en otros puntos de la órbita donde el radiovector es menor.
b) Ley de los períodos. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas. $T^2 = C\cdot R^3$.

$$Órbita\ F_g=F_c; \frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}; v^2=\frac{GM}{r}; Circular\ v=\frac{2\pi r}{T}$$
$$\frac{GM}{r}=\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}; T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3=Cr^3\ donde\ C=\frac{4\pi^2}{GM}$$

B. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler para los datos de Io, y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la fórmula es la del objeto central respecto al que se orbita, en este caso Júpiter, y haciendo cambios de unidades (se puede llegar también igualando F_g y F_c)

$$\frac{T_{Io}^2}{R_{Io}^3}=\frac{4\pi^2}{GM_{Júpiter}}; M_{Júpiter}=\frac{4\pi^2\cdot R_{Io}^3}{G\cdot T_{Io}^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(4{,}22\cdot10^8)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(1{,}77\cdot24\cdot3600)^2}=1{,}9\cdot10^{27}\,kg$$

b) La intensidad de campo es un vector:

- su dirección será radial uniendo centro Júpiter y centro Io
- su sentido será dirigido hacia el centro de Júpiter
- su módulo $|g|=\frac{GM}{r^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{1{,}9\cdot10^{27}}{(4{,}22\cdot10^8)^2}=0{,}712\,m/s^2\ ó\ N/kg$

c) $E_c=\frac{1}{2}m_{Io}v_{Io}^2$ Necesitamos calcular v, y tenemos varias opciones:

$$1. Igualando\ F_g\ y\ F_c; v=\sqrt{\frac{GM_{Júpiter}}{R_{Io}}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}9\cdot10^{27}}{4{,}22\cdot10^8}}=17329\,m/s$$
$$2. Órbita\ circular\ v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\pi 4{,}22\cdot10^8}{1{,}77\cdot24\cdot3600}=17338\,m/s$$
$$E_c=0{,}5\cdot8{,}9\cdot10^{22}\cdot17338^2=1{,}34\cdot10^{31}J$$

d) Como es una órbita circular, el vector r y el vector v son perpendiculares en todo momento

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m|\vec{v}|sen\,90º=4{,}22\cdot10^8\cdot8{,}9\cdot10^{22}\cdot17338=6{,}51\cdot10^{35}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\ J\cdot s]$$

2010-Junio-Fase Específica

A. Cuestión 1.- *(Idéntico a 2005-Junio-Cuestión 2)*

B. Problema 1.-

a) R= $12\cdot10^3\cdot10^3=12\cdot10^6$ m

$$Órbita\ circular\ F_g=F_c; \frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}; v=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{12\cdot10^6}}=5765\,m/s$$
$$|\vec{p}|=mv=1000\cdot5765=5{,}765\cdot10^6\frac{kg\cdot m}{s}$$

Al ser una órbita circular los vectores r y v son perpendiculares en todo momento

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m|\vec{v}|sen\,90º=12\cdot10^6\cdot1000\cdot5765=6{,}918\cdot10^{13}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\ J\cdot s]$$

El vector momento lineal sí cambia de dirección continuamente, de manera cíclica: siempre es tangencial a la órbita circular.
El vector momento angular no cambia de dirección, se mantiene constante perpendicular al plano de la órbita: el vector globalmente es constante (módulo, dirección y sentido) al ser fuerzas centrales.

b) $Órbita\ circular\ v=\frac{2\pi r}{T}; T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi 12\cdot10^6}{5765}=13079\,s=3{,}63\,h$

$$E_m=\frac{-GMm}{2R}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot1000}{2\cdot12\cdot10^6}=-1{,}66\cdot10^{10}J$$

2010-Modelo

A. Problema 1.-

a) Consideramos sólo fuerzas conservativas por lo que se conserva la energía mecánica

Punto A, lanzamiento: $E_{c_A}=\frac{1}{2}mv^2\,;E_{p_A}=\frac{-GMm}{R_T}$

Punto B, altura 300 km: $E_{c_B}=0\,;E_{p_B}=\frac{-GMm}{(R_T+h)}$

Igualando energía mecánica en A y en B

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=\frac{-GMm}{(R_T+h)}\,;v=\sqrt{2\mathrm{GM}(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_T+h})}$$

$$v=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6+300\cdot 10^3})}=2373{,}3\,m/s$$

b) $E_{p_B}=\frac{-GMm}{(R_T+h)}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{6{,}37\cdot 10^6+300\cdot 10^3}=-5{,}98\cdot 10^9\,J$

c) Calculamos la energía que tendría en órbita, y luego restaremos la calculada anteriormente

$$E_{m\,\acute{o}rbita\,circular}=\frac{-GMm}{2(R_T+h)}=-2{,}99\cdot 10^9 J$$

La energía a suministrar sería $\Delta E=E_{m\ \text{órbita circular}}-E_{p\ a\ 300\ km}=-2{,}99\cdot 10^9-(-5{,}98\cdot 10^9)=2{,}99\cdot 10^9$ J

d) Igualando F_c y F_g, $v=\sqrt{\frac{GM}{R_T+h}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}37\cdot 10^6+300\cdot 10^3}}=7733\,m/s$

$$v=\frac{2\pi(R_T+h)}{T}\,;T=\frac{2\pi(R_T+h)}{v}=\frac{2\pi(6{,}37\cdot 10^6+300\cdot 10^3)}{7733}=5419{,}5\,s$$

El período también se puede calcular utilizando la tercera ley de Kepler

B. Cuestión 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_s^2}{T_L^2}=\frac{R_s^3}{R_L^3}\,;T_s=T_L\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}R_L}{R_L}\right)^3}=T_L\sqrt{\frac{1}{4^3}}=\frac{T_L}{2^3}\,;T_s=\frac{27{,}32}{8}=3{,}415\,días=3\,días\,,9\,horas\,,57{,}6\,min$$

b) Igualando F_c y F_g en órbita circular $v^2=\frac{GM}{R_{órbita}}$ $\frac{v_s}{v_L}=\frac{\sqrt{\frac{GM}{R_s}}}{\sqrt{\frac{GM}{R_L}}}=\sqrt{\frac{R_L}{R_s}}=\sqrt{\frac{R_L}{\frac{1}{4}R_L}}=2\,;v_s=2\cdot v_L$

También se puede hacer usando la relación entre períodos del apartado anterior.

$$\frac{v_s}{v_L}=\frac{\frac{2\pi R_s}{T_s}}{\frac{2\pi R_L}{T_L}}=\frac{R_s}{R_L}\frac{T_L}{T_s}=\frac{1}{4}8=2$$

2009-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Falso. La velocidad de escape es la velocidad que debe tener un objeto para escapar del campo gravitatorio llegando al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=0\,;v_{escape}=\sqrt{\frac{2\mathrm{GM}}{R_T}}$ independiente de la masa del objeto. Lo que sí variará con la masa será la energía cinética del objeto lanzado a esa velocidad.

b) Verdadero. Se puede razonar de dos maneras

- El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A=r_P m v_P$ y dado que $r_A>r_P$, tiene que cumplirse que $v_P>v_A$
- La Energía mecánica es constante en toda la órbita al ser fuerzas conservativas, por lo tanto

en el punto donde la E_p es menor (perihelio deducible según expresión Ep, la Ep será mínima en valor absoluto pero máxima (es negativa)), la Energía cinética será mayor y por lo tanto también la velocidad.

2009-Junio

Cuestión 1.-

a) $$\text{Órbita circular } F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v^2=\frac{GM}{r}$$

$$E_m=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=(\frac{1}{2}-1)mv^2=\frac{-1}{2}\cdot 500\cdot(6{,}5\cdot 10^3)^2=-1{,}056\cdot 10^{10}J$$

b) $$r=\frac{GM}{v^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(6{,}5\cdot 10^3)^2}=9{,}44\cdot 10^6 m$$

$$\text{Como se pide altura desde superficie, restamos radio de la Tierra:}$$

$$h=9{,}44\cdot 10^6-6{,}37\cdot 10^6=3{,}07\cdot 10^6 m$$

B. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler

$$\frac{T_{Venus}^2}{T_{Tierra}^2}=\frac{R_{Venus}^3}{R_{Tierra}^3};T_{Venus}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{R_{Venus}}{R_{Tierra}}\right)^3}=365\sqrt{\left(\frac{1{,}08\cdot 10^{11}}{1{,}49\cdot 10^{11}}\right)^3}=225\,días$$

b) $$\text{Órbita circular } v=\frac{2\pi r}{T}=\omega r$$

$$v_{Venus}=\frac{2\pi\, 1{,}08\cdot 10^{11}}{225\cdot 24\cdot 3600}=3{,}49\cdot 10^4 m/s;v_{Tierra}=\frac{2\pi\, 1{,}49\cdot 10^{11}}{365\cdot 24\cdot 3600}=2{,}97\cdot 10^4 m/s$$

2009-Modelo

Cuestión 1.- *(Cuestiones de fechas anteriores donde se piden enunciados leyes Kepler: 2006-Modelo-Cuestión 1 (1ª, 2ª y 3ª), 2000-Junio-Cuestión 1 (1ª y 2ª))*

a) Ley de los períodos. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas. $T^2 = C\cdot R^3$.

$$\text{Órbita } F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v^2=\frac{GM}{r};\text{Circular } v=\frac{2\pi r}{T}$$

$$\frac{GM}{r}=\frac{4\pi^2r^2}{T^2};T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3=Cr^3\text{ donde }C=\frac{4\pi^2}{GM}$$

b) No se indica el período de la Tierra explícitamente, por lo que consideramos un año como 365 días

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3;M=\frac{4\pi^2}{GT^2}r^3=\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(365\cdot 24\cdot 3600)^2}(1{,}49\cdot 10^8\cdot 10^3)^3=1{,}97\cdot 10^{30}kg$$

2008-Septiembre

Cuestión 1.-

a) En este caso el vector v tiene el mismo sentido que r, luego su producto vectorial es cero ya que el seno del ángulo que forman es cero $|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m\cdot|\vec{v}|\cdot sen\, 0º=0$

b) En esa órbita circular el vector v, que siempre es tangencial a la trayectoria y estará en el plano ecuatorial, siempre formará 90º con el vector r, luego el seno del ángulo que forman será siempre 1.

$$\text{Órbita circular } F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\text{Radio órbita}=6{,}37\cdot 10^6+600\cdot 10^3=6{,}97\cdot 10^6 m$$

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m\cdot|\vec{v}|\cdot sen\, 90º=6{,}97\cdot 10^6\cdot 1000\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}97\cdot 10^6}}=5{,}27\cdot 10^{13}\frac{kg\cdot m^2}{s}[\text{también } J\cdot s]$$

Cómo sólo se pide módulo, no hace falta indicar dirección ni sentido de momento angular.

A. Problema 2.-

a) $$\text{Órbita circular } F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};r=\frac{GM}{v^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(7{,}5\cdot 10^3)^2}=7{,}09\cdot 10^6 m=7090\,km$$

b) $E_p=\frac{-GMm}{r}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{7{,}09\cdot 10^{6}}=-5{,}63\cdot 10^{9}\,J$

c) $E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{2\cdot 7{,}09\cdot 10^{6}}=-2{,}81\cdot 10^{9}\,J$

d) Calculamos la energía mecánica en la nueva órbita, y luego calculamos la diferencia

$$r'=2r\,;\,E_m'=\frac{-GMm}{2r'}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{2\cdot 2\cdot 7{,}09\cdot 10^{6}}=-1{,}41\cdot 10^{9}\,J$$

$$\Delta E=E_m'-E_m=-1{,}41\cdot 10^{9}-(-2{,}81\cdot 10^{9})=1{,}4\cdot 10^{9}\,J$$

Nota: Dato de radio de la Tierra del enunciado no utilizado.

2008-Junio

Cuestión 2.-

a) Se pide momento angular, que es un vector, luego hay que dar módulo, dirección y sentido

- Dirección: perpendicular al plano de la órbita
- Sentido: el asociado al sentido de giro del satélite que fijará la dirección del vector v, tras aplicar el producto vectorial
- Módulo: como la órbita es circular, el vector r y el vector v siempre forman 90

$$\text{Órbita circular } F_c=F_g\,;\,\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\,;\,v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\text{Radio órbita}=R_T+h=R_T+1{,}5\,R_T=2{,}5\,R_T=2{,}5\cdot 6{,}37\cdot 10^{6}=1{,}59\cdot 10^{7}\,m$$

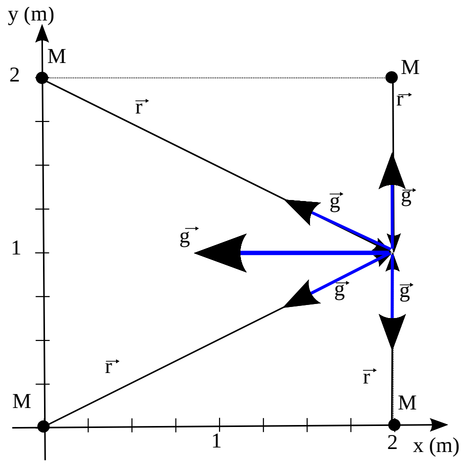
$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,90º=1{,}59\cdot 10^{7}\cdot 5000\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{1{,}59\cdot 10^{7}}}=3{,}98\cdot 10^{14}\frac{kg\cdot m^2}{s}[\text{también } J\cdot s]$$

b) Para que escape del campo gravitatorio, tiene que llegar al infinito, donde tendrá energía potencial y cinética nula sin llega con velocidad cero. Por conservación de la energía, la energía que tiene más la que le comuniquemos será la que tendría en el infinito.

$$\Delta E=E_m(\infty)-E_m(\text{órbita})=\frac{GMm}{2R}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 5000}{2\cdot 1{,}59\cdot 10^{7}}=6{,}27\cdot 10^{10}\,J$$

2008-Modelo

Cuestión 1.



a) Representamos en un diagrama para elegir x e y. Para cada lado del cuadrado (en diagrama representamos uno de los cuatro, entre masas M_2 y M4), los efectos de las dos masas más próximas tienen mismo módulo, dirección, pero sentido opuesto, por lo que se cancelan (en figura g_2 y g_4).
La distancia de cada una de las otras 2 masas (M_1 y M_3) al centro del lado es cuadrado es $\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$ m. El campo tendrá una componente en la dirección del lado que también se cancelará. El campo total será la suma de las dos componentes perpendiculares al lado en el sentido dirigido hacia el centro del cuadrado. Podemos calcular la componente x de g_1 y g_3 de dos maneras:

A. Por trigonometría, utilizando el ángulo que forma r_1 con el eje x, cuya tangente es 1/2

$$|\vec{g}_x|=\frac{GM}{r^2}\cos(\arctan(\frac{1}{2}))$$

$$|\vec{g}_x|=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6}{5}\cdot 0{,}894=7{,}16\cdot 10^{-11}\,m/s^2$$

Como se suma el efecto de dos masas, el valor es el doble, y teniendo en cuenta el signo

$$\vec{g}_T=-2\cdot 7{,}16\cdot 10^{-11}\vec{i}=-1{,}43\cdot 10^{-10}\vec{i}\,m/s^2\,ó\,N/kg$$

B. Teniendo presente que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|r|}$ y $\vec{g}=\frac{-GM}{r^2}\vec{u}_r$

$$\vec{g}_T=\vec{g}_1+\vec{g}_3=\frac{-GM_1}{r_1^2}\vec{u}_{r1}-\frac{GM_3}{r_3^2}\vec{u}_{r3}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6}{5}\frac{(2\vec{i}+1\vec{j})}{\sqrt{5}}+\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6}{5}\frac{(2\vec{i}-1\vec{j})}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{g}_T=2\cdot(\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6}{5\sqrt{5}})2\vec{i}=-1{,}43\cdot 10^{-10}\vec{i}\ m/s^2\ ó\ N/kg$$

Por simetría, ya que las cuatro masas son iguales, podemos indicar:
Punto entre M_1 y M_2 $\vec{g}_T=1{,}43\cdot 10^{-10}\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$
Punto entre M_1 y M_3 $\vec{g}_T=1{,}43\cdot 10^{-10}\vec{i}\,m/s^2\,ó\,N/kg$
Punto entre M_3 y M_4 $\vec{g}_T=-1{,}43\cdot 10^{-10}\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$
b) En el centro de cuadrado por simetría el campo es claramente cero, pero es no implica que el potencial sea también cero. Por el principio de superposición, dado que todas las masas están a la misma distancia $\sqrt{2}$ m del centro

$$V_{total}=4V=4(\frac{-GM}{r})=\frac{-4\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6}{\sqrt{2}}=-1{,}13\cdot 10^{-9}\,J/kg$$

B. Problema 1.
a) La fuerza es un vector, luego debemos indicar módulo, dirección y sentido
- Dirección radial, en la línea que une centro de la Tierra y centro de satélite.
- Sentido: hacia la Tierra, fuerza atractiva
- Módulo: $|\vec{F}|=\frac{GMm}{r^2}$ Necesitamos conocer r, radio de la órbita

  Utilizando la relación entre velocidades de escape (se pueden deducir la expresión para la velocidad de escape, pero la usamos directamente; para la órbita hay que tener presente que tiene energía potencial y cinética, la energía de escape no es idéntica a la que habría en una situación similar en superficie donde sólo hay energía potencial, pero la expresión de la velocidad de escape es independiente de si el punto inicial tiene velocidad de rotación o está en órbita, porque la velocidad de escape está asociada a la velocidad total que hay que tener para escapar)

$$\frac{v_{e\,órbita}}{v_{e\,superfice}}=\frac{\sqrt{2\frac{GM}{R_o}}}{\sqrt{2\frac{GM}{R_T}}}=\sqrt{\frac{R_T}{R_o}}=\frac{1}{2};R_o=4R_T$$

$$|\vec{F}|=\frac{GMm}{r^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 200}{(4\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^2}=122{,}87\,N$$

b) $V=\frac{-GM}{r}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(4\cdot 6{,}37\cdot 10^6)}=-1{,}565\cdot 10^7\,J/kg$

c) $E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 200}{(2\cdot 4\cdot 6{,}37\cdot 10^6)}=-1{,}565\cdot 10^9\,J$

d) Para que sea geoestacionario, el período del satélite debe ser de 24 horas, además de estar su órbita en el plano ecuatorial. Utilizando la tercera ley de Kepler

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3;T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}(4\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^3}=40464\,s\neq 24\,horas\Rightarrow no\,es\,estacionario$$

2007-Septiembre
Cuestión 1.
a) La aceleración es un vector: calculamos la relación entre módulos

$$\rho=\frac{M}{V};\ M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3;\ \rho_P=\rho_T;\ R_P=\frac{1}{2}R_T$$

$$\frac{|\vec{g}_P|}{|\vec{g}_T|}=\frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_P}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_P^2}=\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_P^3}{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_T^3}\cdot\frac{R_T^2}{R_P^2}=\frac{R_P}{R_T}=\frac{1}{2}\Rightarrow|\vec{g}_p|=\frac{1}{2}|\vec{g}_T|=\frac{1}{2}\cdot 9{,}8=4{,}9\,m/s^2$$

b) $\text{Órbita circular}\ F_c=F_g;\ \frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};\ v^2=\frac{GM}{R_o};\ v=\frac{2\pi R_o}{T}$

Utilizamos la tercera ley de Kepler, pero como no tenemos valor de M pero sí de g, lo dejamos en función de g, que depende de R_P, no de R_o

$$g_p=\frac{GM_P}{R_P^2};\ GM_P=g_p R_P^2$$

$$\left(\frac{2\pi R_o}{T}\right)^2=g_p\frac{R_P^2}{R_o}\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2 R_o^3}{g_P R_P^2}};\ R_o=\frac{6371\cdot 10^3}{2}+400\cdot 10^6=3{,}586\cdot 10^6\,m$$

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(3{,}586\cdot 10^6)^3}{4{,}9\cdot\left(\frac{6371\cdot 10^3}{2}\right)^2}}=6051\,s$$

A. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera Ley de Kepler, que podríamos deducir igualando Fc y Fg

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{T^2 GM}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{(24\cdot 3600)^2\, 6{,}67\cdot 10^{-11}\, 5{,}96\cdot 10^{24}}{4\pi^2}}=4{,}22\cdot 10^7\,m$$

$$\text{En altura, descontando el radio terrestre}\ h=4{,}22\cdot 10^7-6371\cdot 10^3=3{,}5829\cdot 10^7\approx 36000\,km$$

b) La energía a aportar es la diferencia de energía entre ambas situaciones.

$$\Delta E=E_m(\text{órbita})-E_m(\text{superfice})=\frac{-GMm}{2}R_o-\left(\frac{-GMm}{R_T}\right)=GMm\left(\frac{-1}{2R_o}+\frac{1}{R_T}\right)$$

$$\Delta E=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\cdot 20\cdot\left(\frac{-1}{2\cdot 4{,}22\cdot 10^7}+\frac{1}{6371\cdot 10^3}\right)=1{,}15\cdot 10^9\,J$$

2007-Junio

Cuestión 1.-

$$\rho=\frac{M}{V};\ M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3;\ R_L=0{,}27R_T;\ g_L=\frac{1}{6}g_T$$

a) $$\frac{g_L}{g_T}=\frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{\rho_L\cdot\frac{4}{3}\pi R_L^3}{\rho_T\cdot\frac{4}{3}\pi R_T^3}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{\rho_L}{\rho_T}\cdot\frac{R_L}{R_T}=\frac{\rho_L}{\rho_T}\cdot 0{,}27=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{\rho_L}{\rho_T}=\frac{1}{6\cdot 0{,}27}=0{,}62$$

b) La expresión para la velocidad de escape desde la superficie de un planeta se obtiene igualando energía en superficie (potencial y cinética) con energía en infinito (cero)

$$\frac{v_{e_L}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}=\sqrt{\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_L}}=\sqrt{\frac{\rho_L\frac{4}{3}\pi R_L^3 R_T}{\rho_T\frac{4}{3}\pi R_T^3 R_L}}=\sqrt{\frac{\rho_L R_L^2}{\rho_T R_T^2}}=\sqrt{0{,}62\cdot(0{,}27)^2}=0{,}213$$

B. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler con los datos de Fobos (también igualando F_c y F_g)

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3;\ M=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2\cdot(9380\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(7{,}65\cdot 3600)^2}=6{,}44\cdot 10^{23}\,kg$$

b) Utilizando la tercera ley

$$\frac{T_{Deimos}^2}{T_{Fobos}^2}=\frac{R_{Deimos}^3}{R_{Fobos}^3};T_{Deimos}=T_{Fobos}\sqrt{\left(\frac{R_{Deimos}}{R_{Fobos}}\right)^3}=7{,}65\sqrt{\left(\frac{23460}{9380}\right)^3}=30{,}26\,horas=1{,}26\,días$$

c) $E_{m\,Deimos}=\frac{-GM_M m_{Deimos}}{2R_{Deimos}}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}44\cdot10^{23}\cdot2{,}4\cdot10^{15}}{(2\cdot23460\cdot10^3)}=-2{,}2\cdot10^{21}\,J$

d) En órbita circular el vector v, que siempre es tangencial a la trayectoria y siempre formará 90º con el vector r, luego el seno del ángulo que forman será siempre 1.

$$Órbita\ circular\ F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,90º=23460\cdot10^3\cdot2{,}4\cdot10^{15}\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}44\cdot10^{23}}{23460\cdot10^3}}=7{,}62\cdot10^{25}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\,J\cdot s]$$

Nota: no se utiliza el dato proporcionado de masa de Fobos.

2007-Modelo

Cuestión 1.-

a)
$$Órbita\ circular\ F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v^2=\frac{GM}{r}$$
$$E_p=\frac{-GMm}{r}=-mv^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{-E_m}{m}}=\sqrt{\frac{-2\cdot10^8}{5}}=6325\,m/s$$

b)
$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=0{,}5\cdot5\cdot(9\cdot10^3)^2=2{,}025\cdot10^8\,J$$
$$E_m=E_p+E_c=-2\cdot10^8+2{,}025\cdot10^8=2{,}5\cdot10^6\,J$$

Si la energía mecánica es mayor que cero, el objeto se escapa del campo gravitatorio, y por tanto no describe ningún tipo de órbita.

2006-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Consideramos sólo fuerzas conservativas por lo que se conserva la energía mecánica

Punto A, lanzamiento: $E_{c_A}=\frac{1}{2}mv^2;E_{p_A}=\frac{-GMm}{R_T}$

Punto B, altura R_T=6370 km: $E_{c_B}=0;E_{p_B}=\frac{-GMm}{2R_T}$

Igualando energía mecánica en A y en B

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=\frac{-GMm}{2R_T};v=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{GM}{R_T}}$$
$$v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^6}}=7913\,m/s$$

b) Para escapar al campo gravitatorio terrestre tiene que aportarse como mínimo energía para que llegue al infinito con energía potencial y cinética nula, lo que igualando supone para la Tierra

$$\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{GMm}{R_T}=0;v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}=\sqrt{\frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^6}}=11191\,m/s$$

Por lo tanto si se lanza con una velocidad doble que la del apartado anterior, v = 2·7913=15826 m/s sí escapará del campo gravitatorio terrestre, llegando al infinito con cierta energía cinética.

2006-Junio

A. Problema 1.-

$$|\vec{p}|=m|\vec{v}|;necesitamos\ calcular\ m$$

a) $Órbita\ circular\ F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v^2=\frac{GM}{r}$

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{r}+\frac{1}{2}mv^2=(-1+\frac{1}{2})mv^2=\frac{-1}{2}mv^2$$
$$m=\frac{-2E_m}{v^2}=\frac{-2\cdot(-4{,}5\cdot10^9)}{7610^2}=155{,}4\,kg$$
$$|\vec{p}|=155{,}4\cdot7610=1{,}175\cdot10^6\,kg\frac{m}{s}$$
$$|\vec{L}|=|\vec{r}||\vec{p}|;\,necesitamos\,calcular\,r$$
$$Órbita\,circular\,F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};r=\frac{GM}{v^2}$$
$$|\vec{L}|=\frac{GM}{v^2}\cdot|\vec{p}|=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7610^2}\cdot1{,}175\cdot10^6=8{,}09\cdot10^{12}\,kg\frac{m^2}{s}[también\,J\cdot s]$$
$$Órbita\,circular\,v=\frac{2\pi r}{T};T=\frac{2\pi r}{v};antes\,ya\,deducido\,r=\frac{GM}{v^2}\,luego\,T=2\pi\frac{GM}{v^3}$$

b)
$$T=2\pi\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7610^3}=5687\,s$$
$$Altura:restamos\,al\,radio\,de\,la\,órbita\,el\,radio\,terrestre$$
$$h=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7610^2}-6{,}37\cdot10^6=5{,}17\cdot10^5\,m$$

Cuestión 1.-

a) $g_h=\frac{g_0}{2}\Rightarrow\frac{GM}{(R_T+h)^2}=\frac{GM}{2R_T^2}\Rightarrow R_T+h=\sqrt{2}R_T;h=(\sqrt{2}-1)R_T\approx0{,}41\,R_T$

b) $V_h=\frac{V_0}{2}\Rightarrow-\frac{GM}{(R_T+h)}=\frac{-GM}{2R_T}\Rightarrow R_T+h=2R_T;h=R_T$

2006-Modelo

Cuestión 1.- *(Cuestiones de fechas anteriores donde se piden enunciados leyes Kepler: 2000-Junio-Cuestión 1 (1ª y 2ª))*

a) 1. Ley de las órbitas. Planetas describen órbitas elípticas y el Sol está en uno de los focos.
2. Ley de las áreas. El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector que une Sol-Planeta / la velocidad areolar es constante.
3. Ley de los períodos. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.
b) Utilizando la tercera ley de Kepler, y tomando el período orbital de la Tierra como referencia

$$\frac{T_{Urano}^2}{T_{Tiera}^2}=\frac{R_{Urano}^3}{R_{Tierra}^3}\Rightarrow T_{urano}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{R_{Urano}}{R_{Tierra}}\right)^3}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{2{,}87\cdot10^{12}}{1{,}50\cdot10^{11}}\right)^3}=83{,}7\,años\,terrestres$$

A. Problema 1.-

a) Tomamos como eje x la línea que une los planetas 1 y 2, y tomamos el origen de coordenadas en el centro del planeta 1. Si llamamos x a la coordenada del punto P, dado que los sentidos de las fuerzas son opuestos, podemos plantear

$$F_1=F_2;GM_1\frac{m}{x^2}=GM_2\frac{m}{(D-x)^2};\frac{M_1}{x^2}=\frac{2M_1}{(D-x)^2};x=\frac{D-x}{\sqrt{2}};\sqrt{2}x+x=D;x=\frac{D}{1+\sqrt{2}}$$
$$x=\frac{4{,}83\cdot10^{10}}{1+\sqrt{2}}=2\cdot10^{10}\,m$$

b) Como sólo actúan fuerzas conservativas, se conserva la energía mecánica
Tenemos energía potencial de m respecto a ambos planetas, y las sumamos usando superposición
Punto inicial A, superficie planeta 1:

$$E_c=\frac{1}{2}m\,v^2=0{,}5\cdot 5\cdot 10^3\cdot(2\cdot 10^4)^2=10^{12}\,J$$

$$E_{p_1}=-GM_1\frac{m}{R_1}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4\cdot 10^{24}\cdot 5\cdot 10^3}{6\cdot 10^6}=-2{,}22\cdot 10^{11}\,J$$

$$E_{p_2}=-GM_2\frac{m}{D-R_1}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 4\cdot 10^{24}\cdot 5\cdot 10^3}{4{,}83\cdot 10^{10}-6\cdot 10^6}=-5{,}52\cdot 10^7\,J$$

$$E_{m_1}=10^{12}-2{,}22\cdot 10^{11}-5{,}52\cdot 10^7=7{,}78\cdot 10^{11}\,J$$

Punto final B, superficie planeta 2:

$$E'_c=\frac{1}{2}m(v')^2$$

$$E_{p_1}=-GM_1\frac{m}{D-R_2}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4\cdot 10^{24}\cdot 5\cdot 10^3}{4{,}83\cdot 10^{10}-6\cdot 10^6}=-2{,}76\cdot 10^7\,J$$

$$E_{p_2}=-GM_2\frac{m}{R_2}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 4\cdot 10^{24}\cdot 5\cdot 10^3}{6\cdot 10^6}=-4{,}45\cdot 10^{11}\,J$$

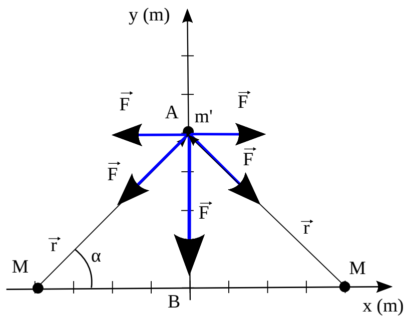
$$E'_m=E'_c-2{,}76\cdot 10^7-4{,}45\cdot 10^{11}=E'_c-4{,}45\cdot 10^{11}$$

$$E_{m_1}=E_{m_2};\,7{,}78\cdot 10^{11}=E'_c-4{,}45\cdot 10^{11};\,E'_c=1{,}22\cdot 10^{12}\,J$$

Comentario: se ven posibles aproximaciones:
Como D >> R_1 y D >> R_2 podríamos aproximar D-R_1 y D-R_2 a D
Como D >> R_1 y D >> R_2, en cada una de las dos situaciones prevalece la E_p respecto al objeto más lejano, ya que es mayor (un número negativo mucho más pequeño)

2005-Septiembre

Cuestión 2.-



a) Cualitativamente, por la configuración de la figura, tomando como eje x la línea que une las masas M, las componentes de la fuerza resultante en el eje x se cancelan, quedando sólo componente en el sentido de las y negativas. El valor absoluto de la fuerza de ambas masas sobre m' es el mismo ya que ambas tienen la misma masa y están a la misma distancia, por lo que su módulo será la contribución de una de ellas multiplicada por dos.
Podemos calcularlo de dos maneras:
A. Trigonometría. Calculamos la componente y multiplicando el módulo por el seno de α, y multiplicamos por dos para sumar el efecto de ambas masas.

$$\vec{F}=-2G\frac{Mm'}{r^2}sen\,\alpha\,\vec{j}=-2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{20\cdot 0{,}2}{2}sen\,45^o\,\vec{j}=-1{,}89\cdot 10^{-10}\vec{j}\,N$$

B. Teniendo presente que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|r|}$ y $\vec{g}=\frac{-GM}{r^2}\vec{u}_r$

El vector que va de M_1 a A es $\vec{i}+\vec{j}$ y la distancia entre ellos $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ m
El vector que va de M_2 a A es $-\vec{i}+\vec{j}$ y la distancia entre ellos $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ m

$$\vec{F}=-G\frac{M_1 m'}{2}\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}--G\frac{M_2 m'}{2}\frac{(-\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}=-2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{20\cdot 0{,}2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}=-1{,}89\cdot 10^{-10}\vec{j}\,N$$

b) $\vec{a}(A)=\frac{\vec{F}(A)}{m'}=\frac{-1{,}89\cdot 10^{-10}}{0{,}2}\vec{j}=-9{,}45\cdot 10^{-10}\vec{j}\,m/s^2$

$$\vec{a}(B)=\frac{\vec{F}(B)}{m'}=0\;ya\,que\,en\,B\;por\,simetría\,la\;fuerza\,total\,es\,nula$$

A. Problema 1.-

a) La intensidad de campo gravitatorio es un vector, indicamos módulo, dirección y Dirección radial, en la línea que une centro de la Tierra y centro de satélite.
Sentido: hacia la Tierra, fuerza atractiva

Módulo $g=\frac{GM}{R_o^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^2}=7{,}22\,m/s^2$

b) $\acute{O}rbita\,circular\;F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6}}=7326\,m/s$

$$\acute{O}rbita\,circular\;v=\frac{2\pi R_o}{T};T=\frac{2\pi R_o}{v}=\frac{2\pi\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6}{7326}=6374\,s$$

$$También\;T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}\cdot(\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^3}=6374\,s$$

c) $E_m=\frac{-GMm}{2R_o}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 400}{2\cdot\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=-1{,}07\cdot 10^{10}\,J$

d) Se pide variación de energía potencial, no de energía mecánica

$$\Delta E=E_{p_o}-E_{p_{superficie}}=\frac{-GMm}{R_o}-(\frac{-GMm}{R_T})$$

$$\Delta E=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 400\cdot(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6})=3{,}58\cdot 10^9\,J$$

2005-Junio

Cuestión 2.-

En ambos apartados, para órbita circular de radio órbita R_o $F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v^2=\frac{GM}{R_o}$

a) $E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{GM}{R_o}=\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_o}$

b) $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{GMm}{r}(\frac{1}{2}-1)=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p$

A. Problema 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler

$$R_o=R_T+h=6{,}37\cdot 10^6+655\cdot 10^3=7{,}025\cdot 10^6\,m$$

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3;T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}(7{,}025\cdot 10^6)^3}=5858\,s$$

b) $E_m=\frac{-GMm}{2R_o}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{2\cdot 7{,}025\cdot 10^6}=-2{,}84\cdot 10^9\,J$

c) Como es una órbita circular los vectores r y v forman siempre 90º

$$\acute{O}rbita\,circular\;F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|sen\,90^o=7{,}025\cdot 10^6\cdot 100\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{7{,}025\cdot 10^6}}=5{,}29\cdot 10^{12}\,kg\frac{m^2}{s}[también\;J\cdot s]$$

d) $\frac{g_o}{g_T}=\frac{\frac{GM_T}{R_o^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{R_T^2}{R_o^2}=\frac{(6{,}37\cdot 10^6)^2}{(7{,}025\cdot 10^6)^2}=0{,}82$

2005-Modelo

Cuestión 1.-

a) Falso. Para escapar al campo gravitatorio terrestre tiene que aportarse como mínimo energía para que llegue al infinito con energía potencial y cinética nula, lo que igualando supone para la Tierra un valor de velocidad independiente de la masa.

$$\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{GMm}{R_T}=0\,;v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$

b) Verdadero, haciendo los cálculos. El trabajo a realizar es la diferencia de energía entre la energía que tiene en órbita (el radio de la órbita es el mismo en los dos casos) y la energía que tiene en la superficie. Si hallamos la expresión para una masa cualquiera y una altura de órbita cualquiera

Energía en órbita: $E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{2R_o}$ Energía en superficie: $E_m=E_p=\frac{-GMm}{R_T}$

Energía a aportar, que es el trabajo a realizar, espresada en función de la masa del satélite, que es lo único que varía entre los dos casos.

$\Delta E=\frac{-GMm}{2R_o}-(\frac{-GMm}{R_T})=-GMm(\frac{1}{2R_o}-\frac{1}{R_T})=constante\cdot m$ Se ve que a mayor masa, mayor trabajo a realizar.

2004-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_{Venus}^2}{T_{Tierra}^2}=\frac{R_{Venus}^3}{R_{Tierra}^3}\,;T_{Venus}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{R_{Venus}}{R_{Tierra}}\right)^3}=365{,}25\sqrt{\left(\frac{c\cdot 6{,}01}{c\cdot 8{,}31}\right)^3}=224{,}65\,días\,terrestres$$

b) $v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot 3\cdot 10^8\cdot 6{,}01\cdot 60}{224{,}65\cdot 24\cdot 2600}=35019\,m/s$

A. Problema 1.-

a)

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,;g=\frac{GM}{R^2}\Rightarrow M=\frac{gR^2}{G}(R=radio\,del\;planeta\,,en\,superficie)$$

$$\rho=3\frac{gR^2}{4\pi GR^3}=3\frac{g}{4\pi GR}=\frac{3\cdot 6{,}2}{4\cdot\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3200\cdot 10^3}=6935\frac{kg}{m^3}$$

Se pide también la velocidad de escape, $v_e=\sqrt{2G\frac{M}{R}}$

Para no calcular la masa del planeta como dato intermedio ya que no se pide, expresamos el producto GM en función de los datos del enunciado

$g=\frac{GM}{R^2}\Rightarrow GM=gR^2$ $v_e=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot 6{,}2\cdot 3200\cdot 10^3}=6299\,m/s$

b) La energía a comunicar es la diferencia de energía entre la energía que tiene en órbita y la energía que tiene en la superficie.

Energía en órbita: $E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{2}R_o$ Energía en superficie: $E_m=E_p=\frac{-GMm}{R}$

Utilizamos la tercera ley de Kepler con los datos de que el período son dos horas y la masa para calcular el radio de la órbita.

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3=\frac{4\pi^2}{gR^2}R_o^3\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{T^2\cdot g\cdot R^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{(2\cdot 3600)^2\cdot 6{,}2\cdot(3200\cdot 10^3)^2}{4\pi^2}}=4{,}37\cdot 10^6\,m$$

Energía a comunicar

$$\Delta E=\frac{-GMm}{2}R_o-(\frac{-GMm}{R})=-GMm(\frac{1}{2}R_o-\frac{1}{R})=-gmR^2(\frac{1}{2}R_o-\frac{1}{R})$$

$$\Delta E=-6{,}2\cdot 50\cdot(3200\cdot 10^3)^2(\frac{1}{2\cdot 4{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{3200\cdot 10^3})=6{,}29\cdot 10^8\,J$$

2004-Junio

Cuestión 2.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales, y es el mismo en el afelio y perihelio.
b) El momento lineal y la velocidad es mayor en el perihelio. Se puede razonar de dos maneras

- El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y dado que $r_A > r_P$, tiene que cumplirse que $v_P > v_A$
- La Energía mecánica es constante en toda la órbita al ser fuerzas conservativas, por lo tanto en el punto donde la Ep es menor (perihelio deducible según expresión Ep, la Ep será mínima en valor absoluto pero máxima (es negativa)), la Energía cinética será mayor y por lo tanto también la velocidad.

c) La energía potencial es mayor en el afelio, ya que al ser la distancia mayor en afelio, según la expresión $E_p = \frac{-GMm}{R}$ será un número mayor (un número negativo de menor valor absoluto)
d) Al haber sólo fuerzas conservativas la energía mecánica se conserva en toda la órbita, y es la misma en afelio y perihelio.

2004-Modelo

Cuestión 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos plantear $r_A m v_A = r_P m v_P \Rightarrow \frac{r_P}{r_A} = \frac{v_A}{v_P} = \frac{14}{20} = 0{,}7$

b) $$\frac{E_{p_A}}{E_{p_P}} = \frac{\frac{-GMm}{r_A}}{\frac{-GMm}{r_P}} = \frac{r_P}{r_A} = \frac{14}{20} = 0{,}7$$

A. Problema 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler (habría que deducirla)

$$\frac{T^2_{sonda}}{T^2_{satélite}} = \frac{R^3_{sonda}}{R^3_{satélite}}; T_{sonda} = T_{satélite}\sqrt{\left(\frac{R_{sonda}}{R_{satélite}}\right)^3} = 7{,}7\cdot\sqrt{\left(\frac{3390\cdot10^3 + 400\cdot10^3}{9390\cdot10^3}\right)^3} = 1{,}97\,h$$

También se puede hacer antes apartado b y calcular primero masa, y luego T.
b) Utilizando la tercera ley de Kepler (habría que deducirla)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R^3 \Rightarrow M = \frac{4\pi^2 R^3}{G T^2} = \frac{4\pi^2(9390\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(7{,}7\cdot3600)^2} = 6{,}38\cdot10^{23}\,kg$$

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}38\cdot10^{23}}{(3390\cdot10^3)^2} = 3{,}7\frac{m}{s^2}$$

2003-Septiembre

A. Problema 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler, ya que conocemos período y radio órbita

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}R^3 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G\,M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(7100\cdot10^3)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}} = 5952\,s$$

b) El momento lineal es un vector; será siempre tangencial a la órbita, y su módulo será

$$|\vec{p}| = m|\vec{v}| = m\frac{2\pi R_o}{T} = \frac{100\cdot2\pi\,7100\cdot10^3}{5952} = 749506\frac{kg\cdot m}{s}$$

El momento angular es un vector; será perpendicular al plano de la órbita, formará siempre 90º con el vector r, y su módulo será

$$|\vec{L}| = |\vec{r}|m|\vec{v}|\,sen\,90º = R_o|\vec{p}| = 7100\cdot10^3\cdot749506 = 5{,}32\cdot10^{12}\,kg\frac{m^2}{s}[también\,J\cdot s]$$

c)
$$\Delta E_p = E_{p_{órbita}} - E_{p_{superficie}} = \frac{-GMm}{R_o^2} - \left(\frac{-GMm}{R_T^2}\right) = -GMm\left(\frac{1}{R_o^2} - \frac{1}{R_T^2}\right)$$
$$\Delta E_p = -6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100\left(\frac{1}{7100\cdot 10^3} - \frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}\right) = 6{,}4\cdot 10^8\, J$$

d)
$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi R_o}{T}\right)^2 = 0{,}5\cdot 100\cdot\left(\frac{2\pi 7100\cdot 10^3}{5952}\right)^2 = 2{,}8\cdot 10^9\, J$$
$$E_m = E_c + E_p = 2{,}8\cdot 10^9 - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{7100\cdot 10^3} = -2{,}8\cdot 10^9\, J$$

También podríamos haber razonado directamente que en órbita circular $E_m = -E_c = 1/2\, E_p$

2003-Junio

Cuestión 1.-

$$\rho = \frac{M}{V};\ M = \frac{\rho\cdot 4}{3}\pi R^3;\ R_P = \frac{1}{2} R_T;\ \rho_P = \rho_T$$

a)
$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}} = \frac{\rho_P\cdot \frac{4}{3}\pi R_P^3\cdot R_T^2}{\rho_T\cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3\cdot R_P^2} = \frac{R_P}{R_T} = \frac{1}{2} \Rightarrow g_P = \frac{1}{2} g_T = 0{,}5\cdot 9{,}81 = 4{,}905\frac{m}{s^2}$$

b) La velocidad de escape se obtiene igualando la energía mecánica en superficie con la energía mecánica en infinito (cero), con lo que se llega a la expresión

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{2\frac{GM}{R}} = \sqrt{2 g R}$$
$$\frac{v_{e_P}}{v_{e_T}} = \frac{\sqrt{2 g_P R_P}}{\sqrt{2 g_T R_T}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_{e_P} = 0{,}5\cdot 11{,}2\cdot 10^3 = 5{,}6\cdot 10^3\, m/s$$

A. Problema 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos plantear

$$r_A m v_A = r_P m v_P \Rightarrow v_P = \frac{r_A v_A}{r_P} = \frac{6{,}99\cdot 10^{10}\cdot 3{,}88\cdot 10^4}{4{,}60\cdot 10^{10}} = 5{,}9\cdot 10^4\, m/s$$

b)
$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = 0{,}5\cdot 3{,}18\cdot 10^{23}\cdot (5{,}9\cdot 10^4)^2 = 5{,}5\cdot 10^{32}\, J$$
$$E_p = \frac{-GMm}{R} = \frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\cdot 3{,}18\cdot 10^{23}}{4{,}6\cdot 10^{10}} = -9{,}18\cdot 10^{32}\, J$$
$$E_m = E_c + E_p = 5{,}5\cdot 10^{32} - 9{,}18\cdot 10^{32} = -3{,}68\cdot 10^{32}\, J$$

c)
$$|\vec{p}| = m|\vec{v}| = 3{,}18\cdot 10^{23}\cdot 5{,}9\cdot 10^4 = 1{,}88\cdot 10^{28}\, kg\frac{m}{s}$$
$$|\vec{L}| = |\vec{r}|m|\vec{v}|\, sen\, 90^\circ = R|\vec{p}| = 4{,}6\cdot 10^{10}\cdot 1{,}88\cdot 10^{28} = 8{,}65\cdot 10^{38}\, kg\frac{m^2}{s}[también\ J\cdot s]$$

d) Energía total: igual en afelio y perihelio, ya que se conserva al haber sólo fuerzas conservativas.
Momento angular: igual en afelio y perihelio, ya que se conserva al ser fuerzas centrales.
Energía cinética y potencial: distinta en afelio y perihelio al depender de la distancia.
Momento lineal: distinto en afelio y perihelio al haber distintas velocidades.

2003-Modelo

Cuestión 1.-

$$M_P=27\,M_T\,;\,v_{e_P}=3\,v_{e_T}$$

a) $$\frac{v_{e_P}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}}=\sqrt{\frac{M_P}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_P}}=\sqrt{\frac{27\cdot R_T}{R_P}}=3\Rightarrow\frac{R_T}{R_P}=\frac{3^2}{27}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$$

b) $$\frac{g_P}{g_T}=\frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_P}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2=\frac{27\cdot 1}{3^2}=3$$

A. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler

$$T^2_{satélite}=\frac{4\pi^2}{GM_{Júpiter}}R^3_{satélite}\Rightarrow R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{GM_{Júpiter}T^2_{satélite}}{4\pi^2}}$$

Expresamos la masa de la Júpiter en función de los datos proporcionados

$$M_{Júpiter}=320\,M_{Tierra};\,g_{Tierra}=\frac{GM_{Tierra}}{R_T^2}\Rightarrow M_{Tierra}=\frac{g_{Tierra}\cdot R_T^2}{G}\,;\,M_{Júpiter}=\frac{320\cdot g_{Tierra}\cdot R_T^2}{G}$$

Despejamos el Radio de la órbita del satélite, y calculamos altura

$$R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{320\cdot g_{Tierra}\cdot R_T^2\,T^2_{satélite}}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{320\cdot 9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2\cdot(9\cdot 3600+50\cdot 60)^2}{4\pi^2}}=1{,}59\cdot 10^8\,m$$

$$V_{Júpiter}=\frac{4}{3}\pi R^3_{Júpiter}=1320\cdot\frac{4}{3}\pi R^3_{Tierra}\Rightarrow R_{Júpiter}=\sqrt[3]{1320}\,R_{Tierra}$$

$$h=R_{satélite}-R_{Júpiter}=1{,}59\cdot 10^8-\sqrt[3]{1320}\cdot 6{,}37\cdot 10^6=8{,}91\cdot 10^7\,m$$

b) $$Órbita\,circular\,v=\frac{2\pi R_{satélite}}{T_{satélite}}=\frac{2\cdot\pi\cdot 1{,}59\cdot 10^8}{9\cdot 3600+50\cdot 60}=28221\,m/s$$

2002-Septiembre

A. Problema 1 .-

a) Si el satélite pasa sobre un punto cada dos días, el período es T = 2 días. Utilizamos la tercera ley de Kepler

$$T^2_{satélite}=\frac{4\pi^2}{GM_T}R^3_{satélite}\Rightarrow R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{GM_T T^2_{satélite}}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot(2\cdot 24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=6{,}71\cdot 10^7\,m$$

$$h=R_{satélite}-R_T=6{,}707\cdot 10^7-6{,}37\cdot 10^6=6{,}07\cdot 10^7\,m$$

b) La energía a comunicar para colocarlo en esa órbita desde el lanzamiento es la diferencia de energías entre órbita y situación de lanzamiento

En órbita $E_m=E_c+E_p=\frac{-GMm}{2R_{satélite}}$; En lanzamiento: $E_m=E_p=\frac{-GMm}{R_T}$

Energía a comunicar para llevar a órbita:

$$\Delta E_{órbita}=\frac{-GMm}{2R_{satélite}}-\left(\frac{-GMm}{R_T}\right)=-GMm\cdot\left(\frac{1}{2R_{satélite}}-\frac{1}{R_T}\right)$$

La energía de escape es la energía a comunicar para que escape del campo gravitatorio terrestre, llegando al infinito con energía cinética nula. Por lo tanto esa energía es en valor absoluto, la energía potencial gravitatoria.

Energía a comunicar para escape: $\Delta E_{escape}=\frac{GMm}{R_T}$

La relación entre ambas es

$$\frac{\Delta E_{órbita}}{\Delta E_{escape}}=\frac{-GMm\cdot(\frac{1}{2R_{satélite}}-\frac{1}{R_T})}{\frac{GMm}{R_T}}=\frac{-R_T}{2R_{satélite}}+1=\frac{-6{,}37\cdot 10^6}{2\cdot 6{,}71\cdot 10^7}+1=0{,}9525=95{,}25\%$$

2002-Junio

Cuestión 1.-

a) $$g=\frac{GM}{R^2}=\frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2}=\rho\frac{4}{3}\pi G R\Rightarrow\rho=\frac{3g}{4\pi G R}=\frac{3\cdot 6}{4\pi\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 3000\cdot 10^3}=7158\frac{kg}{m^3}$$

b) $$v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot 6\cdot 3000\cdot 10^3}=6000\,m/s$$

A. Problema 1.-

a) Como sabemos la velocidad angular, sabemos el periodo

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1{,}45\cdot 10^{-4}}=43332\,s$$

Conocido el periodo y la masa del objeto respecto al que orbita, podemos conocer el radio de la órbita utilizando la tercera ley de Kepler

$$T_1^2=\frac{4\pi^2}{GM}r_1^3\Rightarrow r_1=\sqrt[3]{\frac{GMT_1^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4{,}87\cdot 10^{24}\cdot 43332^2}{4\pi^2}}=2{,}49\cdot 10^7\,m$$

Al ser una órbita circular los vectores r y v forman siempre 90º

$$L_1=r_1\cdot m\cdot v_1=r_1\cdot m\cdot\omega_1\cdot r_1\Rightarrow m=\frac{L_1}{\omega_1\cdot r_1^2}=\frac{2{,}2\cdot 10^{12}}{1{,}45\cdot 10^{-4}\cdot(2{,}49\cdot 10^7)^2}=24{,}47\,kg$$

b) La energía a invertir será la diferencia de energía entre ambas situaciones

Órbita 1: $$E_{m_1}=\frac{-GMm}{2r_1}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4{,}87\cdot 10^{24}\cdot 24{,}47}{2\cdot 2{,}49\cdot 10^7}=-1{,}6\cdot 10^8\,J$$

En la órbita 2 hay que tener en cuenta que tendremos un nuevo radio que debemos calcular, calculando el periodo y utilizando la tercera ley de Kepler como en el apartado anterior.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{10^{-4}}=62832\,s$$

$$T_2^2=\frac{4\pi^2}{GM}r_2^3\Rightarrow r_2=\sqrt[3]{\frac{GMT_2^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4{,}87\cdot 10^{24}\cdot 62832^2}{4\pi^2}}=3{,}19\cdot 10^7\,m$$

Órbita 2: $$E_{m_2}=\frac{-GMm}{2r_2}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 4{,}87\cdot 10^{24}\cdot 24{,}47}{2\cdot 3{,}19\cdot 10^7}=-1{,}25\cdot 10^8\,J$$

Energía a invertir $\Delta E=E_{m_2}-E_{m_1}=-1{,}25\cdot 10^8-(-1{,}6\cdot 10^8)=3{,}5\cdot 10^7\,J$

2002-Modelo

Cuestión 1.-

a) Como P=mg pero la masa no varía, calculamos la altura a la que la intensidad del campo gravitatorio sea la mitad

$$\frac{g_h}{g_0}=\frac{\frac{GM}{(R_T+h)^2}}{\frac{GM}{R_T^2}}=\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{2}\,R_T=R_T+h\,;h=(\sqrt{2}-1)\,R_T\approx 0{,}41\,R_T$$

b) Porque la intensidad de campo gravitatorio mide la fuerza por unidad de masa, y la aceleración es inversamente proporcional a la masa. Si tenemos dos cuerpos de m_1 y m_2, siendo m_2 el más pesado ($m_2 > m_1$), tendremos que $F_1=m_1g$ y $F_2=m_2g$, por lo que efectivamente $F_2 > F_1$, sin embargo como F=ma, a = F/m, luego $a_1=F_1/m_1$ y $a_2=F_2/m_2$, siendo en ambos casos $a_1=a_2=g$, misma aceleración independientemente de la masa del objeto.

A. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler con los datos del planeta 1

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3 \Rightarrow M=\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2\cdot(10^{11})^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(2\cdot 365\cdot 24\cdot 3600)^2}=1{,}49\cdot 10^{29}\,kg$$

b) Utilizamos la tercera ley de Kepler, teniendo en cuenta que R, cuando no se trata de una órbita circular, hace referencia al semieje mayor, que para el planeta 2 sería $(1{,}8\cdot 10^{11}+10^{11})/2=1{,}4\cdot 10^{11}$ m

$$\frac{T_2^2}{T_1^2}=\frac{R_2^3}{R_1^3};T_2=T_1\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}=2\cdot\sqrt{\left(\frac{1{,}4\cdot 10^{11}}{10^{11}}\right)^3}=3{,}31\,años$$

c) Utilizando el principio de conservación del momento angular, ya que son fuerzas centrales, y teniendo en cuenta que en el punto más próximo (perihelio) y más alejado (afelio) los vectores r y v forman 90º, podemos plantear para el planeta 2

$$L_A=L_P \Rightarrow r_A m v_A=r_P m v_P$$

Utilizando el principio de conservación de la energía mecánica, ya que sólo actúan fuerzas conservativas, podemos plantear para el planeta 2

$$E_{m_A}=E_{m_P} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2-\frac{GMm}{r_A}=\frac{1}{2}mv_P^2-\frac{GMm}{r_P}$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas (v_A y v_P), como nos interesa v_P, despejamos v_A en la primera y sustituimos en la segunda.

$$v_A=\frac{r_P v_P}{r_A}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r_P v_P}{r_A}\right)^2-\frac{GM}{r_A}=\frac{1}{2}v_P^2-\frac{GM}{r_P}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r_P}{r_A}\right)^2-\frac{1}{2}\right)v_P^2=GM\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_P}\right)$$

$$v_P=\sqrt{\frac{GM\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_P}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{r_P}{r_A}\right)^2-\frac{1}{2}}}=v_P=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}49\cdot 10^{29}\left(\frac{1}{1{,}8\cdot 10^{11}}-\frac{1}{10^{11}}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{10^{11}}{1{,}8\cdot 10^{11}}\right)^2-\frac{1}{2}}}=11304\,m/s$$

2001-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Si ignoramos fuerzas de rozamiento podemos asumir que solamente actúa la fuerza de la gravedad, conservativa, y planteamos la conservación de energía mecánica entre ambos puntos:

Punto 1, lanzamiento:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}10\,3200^2=5{,}12\cdot 10^7\,J$$

$E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}}$ No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2=3{,}9765\cdot 10^{14}\,m^3/s^2$$

En el lanzamiento $E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}}=-3{,}9765\cdot 10^{14}\cdot\frac{10}{6{,}37\cdot 10^6}=-6{,}24\cdot 10^8\,J$

Punto 2, altura máxima

$E_c=0$, $E_p=-GM\frac{m}{(R_{superficie}+h_{máx})}=-3{,}9765\cdot 10^{14}\cdot\frac{10}{6{,}37\cdot 10^6+h_{máx}}$

Igualamos ambas energías, podemos responder a la pregunta del enunciado indicando que

$$E_{m1}=E_{m2}=E_{p2}=5{,}12\cdot 10^7-6{,}24\cdot 10^8=-5{,}728\cdot 10^8\,J$$

b) Si sustituimos

$$E_{m1}=E_{m2}\Rightarrow -5{,}728\cdot 10^{8}=-3{,}9765\cdot 10^{14}\cdot\frac{10}{6{,}37\cdot 10^{6}+h_{máx}}\Rightarrow 1{,}44\cdot 10^{-7}=\frac{1}{6{,}37\cdot 10^{6}+h_{máx}}$$

$$6{,}94\cdot 10^{6}=6{,}37\cdot 10^{6}+h_{máx}\Rightarrow h_{máx}=570000\,m$$

2001-Junio

Cuestión 1.- *(Enunciado similar a 2001-Modelo-Cuestión 1, resolución idéntica)*

a) En una órbita circular podemos igualar fuerza gravitatoria y centrípeta

$\text{Órbita circular } F_g=F_c;\ \frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};\ v^2=\frac{GM}{R_o}$ Sustituimos en la expresión de la E_c:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{GM}{R_o}=\frac{GMm}{2R_o}$$

b) La energía potencial es $E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$, por lo que la energía mecánica es

$$E_m=E_c+E_p=\frac{GMm}{2R_o}-\frac{GMm}{R_o}=\frac{-GMm}{2R_o}$$

La relación solicitada es $E_m=\frac{1}{2}E_p$

A. Problema 1.-

a) $\text{Órbita circular } F_g=F_c;\ \frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};\ v^2=\frac{GM}{R_o}$

$$\frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{\frac{GM}{r_1}}{\frac{GM}{r_2}}=\frac{r_2}{r_1}\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}v_2=\sqrt{\frac{9{,}034\cdot 10^{6}}{8\cdot 10^{6}}}v_2\Rightarrow v_1=1{,}063\,v_2;\ \text{también}\ v_2=0{,}94\,v_1$$

b) Según la tercera ley de Kepler $\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}\Rightarrow T_1=\sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}}T_2=\sqrt{\frac{(8\cdot 10^{6})^3}{(9{,}034\cdot 10^{6})^3}}\cdot T_2\Rightarrow T_1=0{,}83\,T_2$

Para describir la posición en este caso utilizamos coordenadas polares, tomando θ=0º en el instante inicial para ambos satélites. Enunciado no pide posición relativa entre satélites: basta con dar la posición del segundo satélite respecto al sistema de coordenadas elegido.

El primer satélite es el que tiene mayor velocidad, y en recorrer 6 vueltas tardará un tiempo

$$t_{tardado\ por\ S1}=\frac{e_{recorrido\ por\ S1}}{v_1}=\frac{6\cdot 2\pi r_1}{v_1}$$

En ese tiempo, el segundo satélite habrá recorrido $e_{recorrido\ por\ S2}=v_2\cdot t_{tardado\ por\ S1}=v_2\cdot\frac{6\cdot 2\pi r_1}{v_1}$

Como queremos conocer la fase de este satélite y en un movimiento circular la fase en radianes es $\theta=\frac{e}{R}$, donde en este caso estamos hablando de la fase de S_2 y tenemos que usar r_2, de modo que

$$\theta_{recorrido\ por\ S2}=\frac{v_2}{v_1}\cdot 6\cdot 2\pi\frac{r_1}{r_2}$$

Sustituyendo la relación entre velocidades del apartado a

$$\theta_{recorrido\ por\ S2}=0{,}94\cdot 6\cdot 2\pi\frac{8\cdot 10^{6}}{9{,}034\cdot 10^{6}}=9{,}98\pi\,rad\approx 10\pi\,rad$$

Como el ángulo recorrido por el segundo satélite es aproximadamente un múltiplo de 2π, el satélite S_2 ha completado vueltas completas (5 vueltas completas) y se encuentra en la misma posición que en el instante inicial. Como el satélite S_1 también ha completado un número completo de vueltas, 6 según el enunciado, ambos están en la posición inicial.

2001-Modelo

Cuestión 1.-

En una órbita circular podemos igualar fuerza gravitatoria y centrípeta

$Órbita\ circular\ F_g=F_c; \frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o}; v^2=\frac{GM}{R_o}$ Sustituimos en la expresión de la E_c:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{GM}{R_o}=\frac{GMm}{2R_o}$$

La energía potencial es $E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$, por lo que la energía mecánica es

$$E_m=E_c+E_p=\frac{GMm}{2R_o}-\frac{GMm}{R_o}=\frac{-GMm}{2R_o}$$

La relación solicitada es $E_m=\frac{1}{2}E_p$

A. Problema 1.-

a) Según el enunciado $T_{Júpiter}=12T_{Tierra}$.

Según la tercera ley de Kepler $\frac{T_J^2}{T_T^2}=\frac{R_J^3}{R_T^3}\Rightarrow\sqrt[3]{12^2}=\frac{R_J}{R_T}\Rightarrow R_J=5{,}24\,R_T$

b) La aceleración en la órbita es centrípeta. $\frac{a_J}{a_T}=\frac{\frac{v_J^2}{R_J}}{\frac{v_T^2}{R_T}}=\frac{v_J^2}{v_T^2}\frac{R_T}{R_J}$

Para hallar la relación entre las velocidades, igualamos fuerza gravitatoria y centrípeta al ser órbita circular $F_g=F_c; \frac{GM_{Sol}m_{planeta}}{R^2}=m_{planeta}\frac{v_{planeta}^2}{R}; v_{planeta}^2=\frac{GM_{Sol}}{R}$

$$\frac{a_J}{a_T}=\frac{G\frac{M_{Sol}}{R_J}}{G\frac{M_{Sol}}{R_T}}\frac{R_T}{R_J}=\frac{R_T^2}{R_J^2}=(12^{-2/3})^2=12^{-4/3}\approx 3{,}64\cdot 10^{-2}$$

También se puede plantear que siendo circulares, v=2πR/T

$$\frac{a_J}{a_T}=\frac{\frac{(2\pi R_J)^2}{T_J^2R_J}}{\frac{(2\pi R_T)^2}{T_T^2R_T}}=\frac{R_J}{R_T}\frac{T_T^2}{T_J^2}=\frac{12^{2/3}}{12^2}=12^{-4/3}\approx 3{,}64\cdot 10^{-2}$$

2000-Septiembre

Cuestión 1.-

a) La frecuencia angular con la que debe girar es la misma que la frecuencia angular de giro de la Tierra; se trata de un satélite geoestacionario.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{24\cdot 3600}=7{,}27\cdot 10^{-5}\,rad/s$$

b) En una órbita circular podemos igualar fuerza centrípeta y gravitatoria, y podemos sustituir $v=\omega R_o$, luego

$$F_g=F_c; \frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o}; \frac{GM}{R_o}=(\omega R_o)^2\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2=3{,}9765\cdot 10^{14}\,m^3/s^2$$

Sustituyendo

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}=\sqrt[3]{\frac{3{,}9765\cdot 10^{14}}{(7{,}27\cdot 10^{-5})^2}}=4{,}22\cdot 10^7\,m$$

Como se pide altura, $h=R_o-R_{superficie}=4{,}22\cdot 10^7-6{,}37\cdot 10^6=3{,}58\cdot 10^7$ m

A. Problema 1.-

a) La velocidad del satélite, igualando fuerza centrípeta y gravitatoria

$$\acute{O}rbita\ circular\ F_g=F_c;\ \frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};\ v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}$$

No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2=3{,}9765\cdot 10^{14}\,m^3/s^2$$

Para hallar el radio de la órbita, usamos la relación entre el campo del enunciado: llamamos g_T al valor de la gravedad en la superficie y g_O al valor en la órbita.

$$|\vec{g}|=g=\frac{GM}{R^2}\Rightarrow\frac{g_O}{g_T}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\frac{GM}{r_O^2}}{\frac{GM}{r_T^2}}=\frac{r_T^2}{r_O^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow r_O=\sqrt{2}\,r_T$$

No se solicita la altura, pero se puede calcular $r_O=r_T+h\Rightarrow r_T+h=\sqrt{2}\,r_T\Rightarrow h=(\sqrt{2}-1)\,r_T$

Sustituyendo:

$$v=\sqrt{\frac{3{,}9765\cdot 10^{14}}{\sqrt{2}\,6{,}37\cdot 10^6}}=6643{,}9\,m/s$$

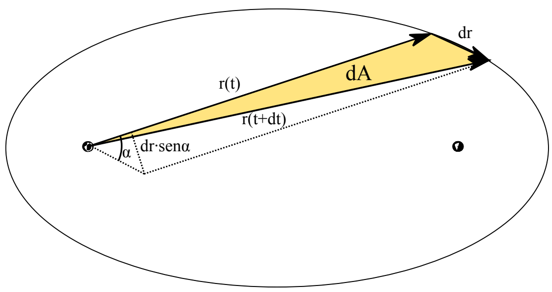
b) Para una órbita circular se puede llegar a la expresión $E_m=\frac{-GMm}{2R_o}$ que también se puede comprobar que $E_m=-E_c$, que es más cómoda ya que en el apartado a tenemos calculada la velocidad, por lo que sustituyendo: $E_m=-0{,}5\cdot 200\cdot 6643{,}9^2=-4{,}4\cdot 10^9$ J

2000-Junio

Cuestión 1.-

a) 1. Ley de las órbitas. Planetas describen órbitas elípticas y el Sol está en uno de los focos.
2. Ley de las áreas. El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector que une Sol-Planeta / la velocidad areolar es constante.

b) Como no se indica en enunciado para órbita circular debemos contemplar el caso genérico de órbita elíptica. Si planteamos la órbita elíptica y un área diferencial barrida



$dA=\frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|$ (La mitad del área del paralelogramo formado por vectores r y dr)

Operando para obtener la velocidad areolar

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$

Según el teorema de la conservación del momento angular $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$. Tomando como referencia para el momento de las fuerzas el objeto respecto al que se orbita, siempre tendremos que vector posición y vector fuerza son paralelos, ya que son fuerzas centrales, por lo que $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$.

Por lo tanto la variación del momento angular es nula, y el vector momento angular es constante, en concreto su módulo, $|\vec{L}|=m|\vec{r}\times\vec{v}|=cte$.

Podemos plantear $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}=\frac{|\vec{L}|}{2m}=cte$, que muestra que la segunda ley de Kepler es un caso particular del teorema de conservación del momento angular.

A. Problema 1-

a) Calculamos la energía potencial en ambos puntos:
En superficie antes del lanzamiento:

$$E_{pT}=-G\frac{Mm}{R_T}=-6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\cdot\frac{600}{6,37\cdot 10^6}=-3,76\cdot 10^{10}\,J$$

En la órbita;

$$E_{pO}=-G\frac{Mm}{R_O}=-6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\cdot\frac{600}{6,37\cdot 10^6+1200\cdot 10^3}=-3,16\cdot 10^{10}\,J$$

La diferencia de energía es $\Delta E_p=E_{pO}-E_{pT}=-3,16\cdot 10^{10}-(-3,76\cdot 10^{10})=6\cdot 10^9$ J
b) La energía de escape es la energía que hay que suministrar para que llegue a una posición infinitamente alejada ($E_p=0$), con velocidad nula ($E_c=0$). Al no considerar fuerzas no conservativas podemos plantear la conservación de la energía mecánica: la energía mecánica que tenga el satélite en la órbita más la energía adicional suministrada será igual a la energía mecánica en la posición infinitamente alejada
-Energía mecánica en órbita: ya conocemos la E_{pO} del apartado a, calculamos la E_c. Si asumimos órbita circular podemos llegar a la expresión $E_{mO}=1/2\cdot E_{pO}=0,5\cdot(-3,16\cdot 10^{10})=-1,58\cdot 10^{10}$ J
-Energía mecánica en posición infinitamente alejada ($E_p=0$), con velocidad nula ($E_c=0$): $E_{m\infty}=0$.
La diferencia de energía es la energía a suministrar $\Delta E_m=E_{m\infty}-E_{mO}=0-(-1,58\cdot 10^{10})=1,58\cdot 10^{10}$ J

2000-Modelo

Cuestión 1.-

a) Según la segunda ley de Kepler, la velocidad areolar es constante, luego para barrer la misma cantidad de área estando más cerca del Sol, perihelio, tendrá que ir a mayor velocidad. También podemos razonar que como se trata de fuerzas centrales, el momento angular es constante, y como tanto en perihelio como en afelio el vector posición y el vector velocidad son perpendiculares podemos establecer la relación

$$|\vec{L}_{afelio}|=|\vec{L}_{perihelio}|\Rightarrow m\cdot r_{afelio}\cdot v_{afelio}=m\cdot r_{perihelio}\cdot v_{perihelio}\Rightarrow\frac{r_{afelio}}{r_{perihelio}}=\frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}}$$

Como $r_{afelio} > r_{perihelio} \longrightarrow v_{perihelio} > v_{afelio}$
Respecto a la aceleración, al ser la única fuerza la gravitatoria y ser central, en módulo podemos $a=F/m=GM/r^2$, luego en los puntos donde r sea menor (perihelio), el módulo del vector aceleración será mayor.
Nota: Se podría intentar plantear que la aceleración es centrípeta $a=v^2/r$, pero en ese caso r no es el asociado a perihelio y afelio, sino el radio de curvatura, y para la elipse es el mismo en perihelio y afelio. En perihelio y afelio los vectores posición y velocidad son perpendiculares y toda la aceleración es realmente centrípeta, pero no es cierto en todos los puntos de una órbita no circular, donde la aceleración global tiene una componente tangencial a la trayectoria y otra normal, no solamente hay aceleración centrípeta. Con ese razonamiento, dado que v es mayor en perihelio que en afelio, también se llega a la misma conclusión de que es mayor la aceleración en perihelio que en afelio.
b) La expresión de la energía potencial $E_p=-GMm/R$ nos indica que a mayor distancia, el valor negativo es de módulo menor, lo que implica mayor energía potencial: tiene mayor energía potencial en el afelio.
La energía mecánica es constante ya que solamente actúan fuerzas conservativas, por lo que tiene el mismo valor en perihelio y en afelio.
Nota: sería un error utilizar la expresión de que en una órbita $E_{mO}=1/2\cdot E_{pO}$, ya que eso solamente es cierto para órbitas circulares en las que la E_{pO} es constante.

A. Problema 1.-

a) $$\text{Órbita circular } F_g=F_c;\ \frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};\ v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}$$

No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g = G\frac{M}{R_{superficie}^2} \Rightarrow GM = g \cdot R_{superficie}^2 = 9{,}8 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2 = 3{,}9765 \cdot 10^{14}\ m^3/s^2$$

El radio de la órbita $R_o = R_T + h = 6{,}37 \cdot 10^6 + 300 \cdot 10^3 = 6{,}67 \cdot 10^6$ m
Sustituyendo

$$v = \sqrt{\frac{3{,}9765 \cdot 10^{14}}{6{,}67 \cdot 10^6}} = 7721\ m/s$$

Como la órbita es circular, toda la aceleración es centrípeta con dirección radial y sentido dirigido hacia el centro de la Tierra, y su módulo es $a = \frac{v^2}{R_o} = \frac{7721^2}{6{,}67 \cdot 10^6} = 8{,}94\ m/s^2$

El periodo de la órbita es $T = \frac{2\pi R_o}{v} = \frac{2\pi \cdot 6{,}67 \cdot 10^6}{7721} = 5428\ s$

b) El trabajo que hay que realizar, considerando solamente hay fuerzas conservativas, es la diferencia de energía mecánica entre las dos situaciones:
-En la superficie antes del lanzamiento: $E_c = 0$, $E_p = -GMm/R_T$
No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g = G\frac{M}{R_{superficie}^2} \Rightarrow GM = g \cdot R_{superficie}^2 = 9{,}8 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2 = 3{,}9765 \cdot 10^{14}\ m^3/s^2$$

Sustituyendo: $E_p = -3{,}9765 \cdot 10^{14} \cdot 1000/6{,}37 \cdot 10^6 = -6{,}24 \cdot 10^{10}$ J
-En la órbita, al ser órbita circular se puede llegar a la expresión $E_{mO} = 1/2 \cdot E_{pO} = -1/2 \cdot GMm/R_o = -0{,}5 \cdot 3{,}9765 \cdot 10^{14} \cdot 1000/(6{,}37 \cdot 10^6 + 300 \cdot 10^3) = -2{,}98 \cdot 10^{10}$ J
La diferencia de energía es el trabajo a realizar: $\Delta E_m = E_{mo} - E_{mT} = -2{,}98 \cdot 10^{10} - (-6{,}24 \cdot 10^{10}) = 3{,}26 \cdot 10^{10}$ J