RANGO DE UNA MATRIZ

CONSIDERAMOS UNA MATRIZ $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ UNA MATRIZ DE n FILAS Y m COLUMNAS (POR COMODIDAD SUPONDREMOS QUE $n \leq m$; EN EL CASO DE SISTEMAS ESTO QUIERE DECIR QUE TENEMOS MÁS INCÓGNITAS QUE ECUACIONES QUE ES LO HABITUAL. DE HECHO EN UN SISTEMA LINEAL MÁS ECUACIONES QUE INCÓGNITAS NO DAN INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA).

DEF SEA $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$.

a) SI $n=m$ Y A ES UNA MATRIZ CUADRADA SE DICE QUE ES TRIANGULAR SUPERIOR SI LAS ENTRADAS O ELEMENTOS DE LA MATRIZ SON TODAS NULAS POR DEBAJO DE LA DIAGONAL.

(c.d. $A=(a_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ $\quad a_{ij}=0 \quad \forall i=1..n \text{ y } \forall j<i$

A ES TRIANGULAR INFERIOR SI LAS ENTRADAS DE A SON TODAS NULAS POR ENCIMA DE LA DIAGONAL

(c.d. $A=(a_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ $\quad a_{ij}=0 \quad \forall i=1..n \text{ y } \forall j>i$

b) $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$, SE LLAMA ESCALONADA SI $\forall i$ Y a_{ij_i} LA PRIMERA ENTRADA NO NULA DE LA FILA i (PIVOTE) SE VERIFICA QUE $a_{kj}=0 \quad \forall k>i$ Y $\forall j \leq j_i$

EJEMPLOS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR — MATRIZ ESCALONADA — MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

OBSERVACIÓN LA MATRICES TRIANGULARES INFERIORES SON UN CASO PARTICULAR DE MATRICES ESCALONADAS

RANGO POR FILAS

DADA UNA MATRIZ $A \in M_{n\times m}$, VAMOS A TRANSFORMAR LA MATRIZ SIGUIENDO EL MÉTODO DE GAUSS EN OTRA MATRIZ "EQUIVALENTE" TRIANGULAR INFERIOR Ó ESCALONADA.

EJEMPLO SEA $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

MATRIZ 3×4

① $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

① COMO LA PRIMERA COLUMNA DE $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ES NULA LA OBVIAMOS Y PASAMOS A LA SIGUIENTE COLUMNA

② $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

④ DOS FILAS CUYAS ENTRADAS NO SON NULAS.

① SI ES NECESARIO, CAMBIAR EL ORDEN DE LAS FILAS PARA QUE LA 1ª FILA TENGA SU PRIMERA ENTRADA NO NULA. SI LA 1ª COLUMNA ES TODA NULA PROCEDER COMO SI NO ESTUVIESE

② SI $a_{11} \neq 0$, PARA TODO $k = 2, 3, \dots n$ MULTIPLICAR LA 1ª FILA POR $-\frac{a_{k,1}}{a_{11}}$ Y SUMÁRSELA A LA FILA k (ESTA SUMA TIENE EL EFECTO DE ELIMINAR EL ELEMENTO $a_{k,1}$ DE LA k FILA)

③ QUITANDO LA PRIMERA FILA Y LA PRIMERA COLUMNA DE LA MATRIZ RESULTANTE DE DE LA MATRIZ ②; NOS QUEDA UNA MATRIZ $(n-1)\times(m-1)$ DE MODO QUE SI $n-1 > 1$ REPETIMOS ① Y ②

SI $n-1 = 1$ PARAMOS.

④ NOS FIJAMOS EN LAS FILAS QUE SUS ENTRADAS NO SON TODAS NULAS.

DEF DADA $A \in M_{n\times m}$, TRANSFORMAMOS LA MATRIZ EN UNA TRIANGULAR INFERIOR Ó ESCALONADA SIGUIENDO EL MÉTODO DE GAUSS. LA MATRIZ RESULTANTE TENDRÁ UN NÚMERO DE FILAS CUYAS ENTRADAS NO SON TODAS NULAS, A ESE NÚMERO LO LLAMAMOS RANGO POR FILAS DE LA MATRIZ.

MÁS ADELANTE DESARROLLAREMOS MEJOR ESTA DEFINICIÓN

OBSERVACIÓN: # A lo largo del curso probaremos que el rango de una matriz es independiente de como hayamos aplicado el método de Gauss para llevarla a la forma diagonal

Veremos que si $A \in M_{n \times n}$, entonces A es invertible si y solo si el rango de A es n.

Veremos que si $Ax = b$ es un sistema $n \times m$, el sistema es compatible si y solo si rango de A es igual a rango de $(A|b)$

donde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1m} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{mn} \end{pmatrix}_{n \times m}$ y $(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{2m} & b_2 \\ a_{n1} & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}_{n \times m+1}$

DEF Para una matriz $A \in M_n$ si le aplicamos el método de Jordan-Gauss de modo que la matriz escalonada resultante ~~tenga~~ todas las entradas de una columna nulas salvo la del PIVOTE que sea ~~un~~ uno y el resto de columnas tienen un cero por pivote, a la ~~matriz resultante~~ la llamamos: FORMA NORMAL DE HERMITE

EJEMPLO $A: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

① $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

y $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz A es 2

② $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ forma normal de Hermite

① Por Gauss triangularizamos la matriz

② Cada fila k multiplicarla por $\frac{1}{a_{kk}}$ si $a_{kk} \neq 0$

③ Por Gauss triangularizar inferiormente la matriz

④ La matriz resultante es la forma normal de Hermite

DEF DADA UNA MATRIZ $A \in M_{n \times m}$, SI APLICAMOS EL MÉTODO DE JORDAN-GAUSS DE MODO QUE LA MATRIZ RESULTANTE SEA ESCALONADA Y TENGA LAS COLUMNAS, CON ENTRADAS 1 EN EL PIVOTE Y ENTRADAS NULAS EN EL RESTO. DE LAS COLUMNAS "SIN PIVOTE" NO LAS TOCAMOS. A DICHA RESULTANTE LA LLAMAMOS FORMA NORMAL DE HERMITE

EJEMPLO: SEA $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

POR GAUS PASAMOS A LA FORMA ESCALONADA DE A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

CAMBIANDO EL ORDEN, LLEGAMOS A LA FORMA ESCALONADA

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICANDO LA 1ª FILA POR 1, LA 2ª POR -1 Y LA TERCERA POR 1/2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RANGO DE LA MATRIZ $\underline{3}$

AHORA "HACIENDO" CEROS POR ENCIMA DE LOS UNOS (e.d. A LA 1ª FILA LE SUMAMOS LA SEGUNDA MULTIPLICADA POR (-2)).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A LA 1ª FILA LE SUMAMOS LA TERCERA MULTIPLICADA POR -3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/2 & -9/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FORMA NORMAL DE HERMITE