Examen de Estadística

Problema 1 Una empresa de comunicaciones observa que por una deficiencia tecnológica, que requiere una fuerte inversión para ser solucionada, tiene una reclamación por cada cien usuarios que utilizan ese servicio. Se preguntan si este hecho es preocupante y para ello se realizan las siguientes preguntas:

1. Si este servicio lo utilizan 10000 personas, calcular la probabilidad de que se hagan más de 120 reclamaciones.
2. Si este servicio lo utilizan 10000 personas, calcular la probabilidad de que se hagan entre 50 y 120 reclamaciones.
3. Si se aumentara el servicio a 15000 personas, calcular las dos probabilidades anteriores.
4. En ambos casos, calcular la cantidad de reclamaciones, que presumiblemente, se harán en ambos casos.

Solución

1.

$$p = \frac{1}{100} = 0,01, \;\; q = 1 - p = 0,99, \;\; n = 10000$$

$$\mu = np = 10000 \cdot 0,01 = 100, \;\; \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{99} = 9,95 \Longrightarrow$$

$$N(100; 9,95)$$

$$P(X > 120) = P\left(Z > \frac{120,5 - 100}{9,95}\right) = 1 - P(Z < 2,06) = 0,0197$$

2.

$$P(50 < X < 120) = P\left(\frac{50,5 - 100}{9,95} < Z < \frac{119,5 - 100}{9,95}\right) =$$

$$P(-4,97 < Z < 1,96) = P(Z < 1,96) - P(Z < -4,97) =$$

$$= 0,9750 - (1 - 1) = 0,975$$

3.

$$p = \frac{1}{100} = 0,01, \;\; q = 1 - p = 0,99, \;\; n = 15000$$

$$\mu = np = 15000 \cdot 0,01 = 150, \;\; \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{150 \cdot 0,99} = 12,19 \Longrightarrow$$

$$N(150; 12,19)$$

$$P(X > 120) = P\left(Z > \frac{120,5 - 150}{12,19}\right) = P(Z > -2,42) =$$

$$= P(Z < 2,42) = 0,9922$$

4. $$P(50 < X < 120) = P\left(\frac{50,5-150}{12,19} < Z < \frac{119,5-150}{12,19}\right) =$$
$$P(-8,16 < Z < -2,5) = P(Z < -2,5) - P(Z < -8,16) =$$
$$= 1 - 0,9938 - (1-1) = 0,0062$$

5. Si $n = 10000$ entonces $E[X] = np = 100$.

   Si $n = 15000$ entonces $E[X] = np = 150$.

Problema 2 Se sabe que una telefonista de un consultorio, la cantidad de llamadas que atiende sigue una normal de media 4 y desviación típica de 2, cada cuarto de hora.

1. Calcular la probabilidad de que reciba más de 7 llamadas en ese cuarto de hora.
2. Probabilidad de que reciba entre 3 y 5 llamadas.
3. Si la telefonista ha trabajado una jornada de ocho horas, calcular el número de llamadas que presumiblemente habrá atendido.

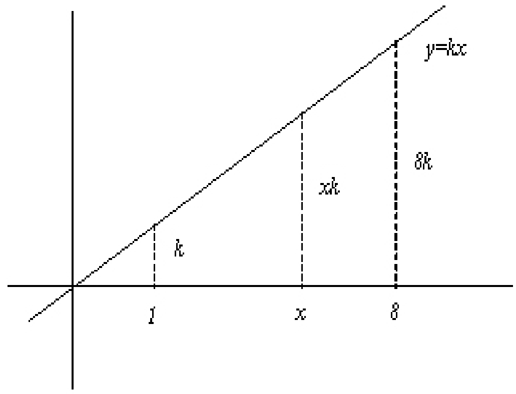
Solución:

1. $$P(X > 7) = P\left(Z > \frac{7-4}{2}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - P(Z < 1,5) = 0,0668$$
2. $$P(3 < X < 5) = P(-0,5 < Z < 0,5) = 2P(Z < 0,5) - 1 = 0,383$$
3. En $15'$ ha atendido una media de 4 llamadas, luego en una hora habrá atendido $4 \cdot 4 = 16$ y en una jornada de ocho horas $8 \cdot 16 = 128$ llamadas.

Problema 3 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} y = kx & \text{si} \quad x \in [1,8] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [1,8] \end{cases}$$

1. Calcular k de manera que $f(x)$ sea una función de densidad.
2. Calcular $P(X > 3)$.
3. Calcular $P(-1 < X < 5)$.
4. Calcular $P(X < 4)$.



5. Calcular la función de distribución asociada a esta función.

Solución:

1.
$$S = \frac{64k}{2}, \quad s = \frac{k}{2}, \; S - s = 1 \Longrightarrow k = \frac{2}{63}$$

2.
$$P(X > 3) = P(3 < X < 8) = S_8 - s_3 = 0,873$$

3.
$$P(-1 < X < 5) = P(1 < X < 5) = S_5 - s_1 = 0,38$$

4.
$$P(x < 4) = P(1 < X < 4) = S_4 - s_1 = 0,238$$

5. En el intervalo $[2, 7]$ el área que encierra la recta sería:
$$S - s = \frac{2x^2 - 2}{126} \Longrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \le x \\ \dfrac{x^2 - 2}{63} & \text{si} \quad 1 \le x \le 8 \\ 1 & \text{si} \quad x > 8 \end{cases}$$