

Examen de Matrices y determinantes 2ºBach CCSS

Nombre:

1.- [2017] Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Realiza el producto $M \cdot M^t$, siendo ésta última la transpuesta de M.

b) Despeja X en la siguiente ecuación matricial $P \cdot X = M \cdot M^t$.

c) Si $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, obtén la expresión de la matriz X del apartado anterior.

2.-

a) Siendo A, B y X matrices cuadradas, despeja X en la ecuación $X \cdot B \cdot A - X \cdot A = I$, simplificando lo más posible la expresión que resulte.

b) Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $A \cdot X = B$.

3.- [2013] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular razonadamente el rango de la matriz A en función del parámetro a.

b) Explicar si la matriz tiene inversa para el caso a=1 y en caso de que exista calcularla.

4.- [2013] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & m \\ m & 1 & 3 \\ 1 & 7 & m \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A en función de los valores del parámetro m (enteros).

b) Para m=0 halla la matriz inversa de A.

$$① \quad a) \quad M \cdot M^t = \begin{pmatrix} -2 & \\ -1 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & +2 \\ +2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{0,75}$$

$$b) \quad P \cdot X = M \cdot M^t \rightarrow P^{-1} P X = P^{-1} M \cdot M^t \rightarrow \boxed{X = P^{-1} M \cdot M^t} \quad \boxed{0,75}$$

$$c) \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \boxed{0,25} \quad P^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 11 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(P) = \begin{pmatrix} +4 & -3 \\ +3 & +2 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(P)^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad |P| = -8 + 9 = 1 \quad \boxed{0,25}$$

$\boxed{0,25}$

$\boxed{0,25}$

$\boxed{0,25}$

$$② \quad a) \quad X \cdot B \cdot A - X \cdot A = I \rightarrow X(BA - A) = I \rightarrow$$

$$\rightarrow X \cdot (BA - A) \cdot (BA - A)^{-1} = I \cdot (BA - A)^{-1} \rightarrow \boxed{X = (BA - A)^{-1}} \quad \boxed{1,25}$$

$$b) \quad A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} A X = A^{-1} B \rightarrow X = A^{-1} B \quad \boxed{0,25}$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)^t}{|A|} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} +4 & -3 \\ +2 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 4 + 6 = 10 \quad \boxed{0,25}$$

$$\left[X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{5} & \frac{20}{10} \\ \frac{15}{10} & \frac{5}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0,5 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{0,25}$$

③ a) Aplicamos Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+2F_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a^2+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a^2+1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - aF_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a^2+1 \\ 0 & 0 & -a^3-a \end{pmatrix}$$

$a^2+1 \neq 0$ Siempre

$-a^3-a=0 \Rightarrow -a(a^2+1)=0$ \rightarrow $a=0$
 $a^2+1=0$ No existe.

Para $a=0$ Rango de la matriz 2
 Para $a \neq 0$ Rango de la matriz 3

Aplicación del método correctamente 0,25
 Obtención de los valores del parámetro 10,5
 Resolución del ejercicio 0,5

b) $a=1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Para el apartado a) o 0,5

para $|A| \neq 0$ el rango de A es 3 y tiene inversa. 0,5

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
 0,25

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} +0 & 0 & +2 \\ +1 & +2 & +1 \\ +1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$|A| = -2$ 0,5

4) a) Por determinantes:

$|A| \neq 0$ Rango de $A \geq 1$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & m \\ m & 4 & 3 \\ 4 & 7 & m \end{vmatrix} = m + 7m^2 + 9 - m - 21 - 3m^2 = 4m^2 - 12 = 0$$

$$4m^2 = 12 \rightarrow m^2 = 3 \rightarrow m = \pm\sqrt{3}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Si } m \neq \pm\sqrt{3} \text{ Rango de } A \text{ es } 3 \\ \bullet \text{ Si } m = \pm\sqrt{3} \text{ Rango de } A \text{ es } 2 \end{array} \right.$ $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ \pm\sqrt{3} & 4 \end{vmatrix} = 4 \pm\sqrt{3} \neq 0$

Aplicación del método correctivo 0,25

Obtención de los valores del parámetro 0,5

Resolución del ejercicio 0,5

b) m=0 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{|A|} = \frac{-1}{12} \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{0,5}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -21 & +3 & +1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 9 & -3 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -21 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 9 - 21 = -12$$

0,25