Cuerpos geométricos

10

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Contesta si es verdadero o falso.

a) Un polígono puede tener más lados que vértices.

b) Un polígono puede tener más ángulos que vértices.

c) Un polígono puede tener más diagonales que vértices.

d) Un polígono puede tener más lados que ángulos.

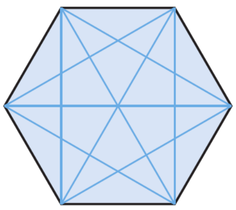
e) Un polígono puede tener más lados que diagonales.

a) Falso, tiene tantos lados como vértices, ya que los vértices son los puntos donde se unen los lados.

Pensemos en un polígono cualquiera, tiene n lados, los vértices vendrían dados por: vértice 1 = unión lado 1 y lado 2, vértice 2 = unión lado 2 y lado 3, vértice 3 = unión lado 3 y lado 4,..., vértice $n-1$ = unión lado $n-1$ y lado n, vértice n = unión lado n y lado 1 (para cerrar el polígono).

b) Falso, a cada ángulo le corresponde un vértice, de modo que habrá la misma cantidad de vértices que de ángulos.

c) Verdadero, por ejemplo:

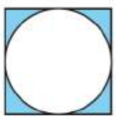


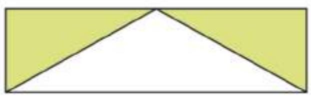
Tiene 6 vértices y 9 diagonales.

d) Falso, tiene tantos lados como ángulos, ya que estos vienen determinados por los vértices y hay el mismo número de vértices que de lados.

e) Verdadero, por ejemplo el triángulo, que tiene 3 lados y ninguna diagonal.

2. Calcula el área coloreada.





El primer dibujo representa el área de un cuadrado de lado 3 cm, menos el área de un círculo de diámetro 3 cm.

$$A = 3^2 - \pi \cdot 1{,}5^2 = 9 - 7{,}0686 = 1{,}9314 \text{ cm}^2.$$

El segundo dibujo representa el área de un rectángulo de lados 10 y 2 cm, menos el área de un triángulo de base 10 cm y altura 2 cm.

$$A = 10 \cdot 2 - \frac{10 \cdot 2}{2} = 20 - 10 = 10 \text{ cm}^2$$

VIDA COTIDIANA

Las pilas son necesarias para que muchos de los aparatos electrónicos funcionen.

El problema comienza cuando ya no son útiles y hay que eliminarlas. ¿Sabes que una sola pila de mercurio puede contaminar hasta 600 000 ℓ de agua al liberar sus componentes?

Otro de los problemas de las pilas es su forma. Su superficie curva las hace inestables y por eso son difíciles de almacenar.

- **¿Cuál es el cuerpo geométrico de la pila de la figura?**

Es un cilindro.

RESUELVE EL RETO

¿Cómo formarías con 12 cerillas 6 cuadrados iguales?

Formaría un cubo.

El radio de la Tierra es 6 371 km. Si tuviéramos una cinta de longitud el Ecuador más un metro y la separaramos uniformemente de la superficie, ¿podría pasar un conejo por el hueco?

Veamos cuál es el radio de esta nueva circunferencia.

Longitud del Ecuador: $2\pi \cdot 6\,371 = 40\,030{,}173$ km

Longitud de la cinta: $40\,030{,}173 + 0{,}001 = 40\,030{,}174$

Radio de la circunferencia que se forma con la cinta: $2\pi r = 40\,030{,}174 \rightarrow r = 6\,371{,}00006$ km

No podría pasar un conejo por el hueco, pues prácticamente son iguales las dos circunferencias que se forman.

Un tonel de forma cilíndrica lleno pesa 35 kg. Si lo llenamos hasta la mitad del mismo líquido pesa 19 kg. ¿Cuánto pesa el tonel vacío?

Inicialmente el tonel pesa: peso del líquido + peso del tonel = 35

Después tenemos: $\frac{1}{2}$ peso del líquido + peso del tonel = 19

Resolvemos el sistema por reducción, multiplicando la segunda ecuación por 2:

–peso del tonel = –3 → peso del tonel = 3 kg

¿Cuántas bolas de 10 cm de diámetro podrás meter en una caja vacía con forma de cubo de 1 m de lado?

Cada lado del cubo equivale a 10 bolas, es decir, que podría meter 10^3 bolas.

ACTIVIDADES

1. **¿Cómo son las aristas de un poliedro regular?**

Iguales, ya que sus caras están formadas por el mismo polígono regular y este tiene todos sus lados iguales.

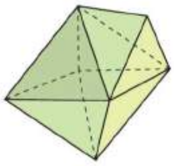
2. **Justifica si es verdadero o falso que el menor número de caras de un poliedro es 4.**

Verdadero.

Por un lado, podemos confirmar que existe un polígono de 4 caras, que es una pirámide de base triangular.

Por otro lado, supongamos que existe un poliedro de 3 caras. Si los polígonos que forman sus caras tienen más de 3 lados, necesitamos para poder cerrarlo tantas caras como lados, de modo que serán más de 3. Si sus caras son triángulos y solo tenemos 3, los podemos unir formando una pirámide, pero no habría base, de modo que no sería un poliedro. Por tanto, no podemos construir un poliedro de 3 caras.

3. **El siguiente poliedro, ¿es regular? ¿Por qué? ¿Verifica la fórmula de Euler?**



No, no es regular, pues sus caras no son polígonos regulares iguales.

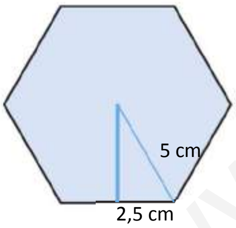
Debería verificar la fórmula de Euler pues es un poliedro convexo. Veamos: el poliedro tiene 10 caras, 7 vértices, 15 aristas, de modo que $10 + 7 = 15 + 2$. Efectivamente verifica la fórmula de Euler.

4. **Determina cuántas caras, vértices y aristas tiene un prisma pentagonal.**

Un prisma pentagonal tiene7 caras, 10 vértices y 15 aristas.

5. **Halla el área de un prisma hexagonal regular cuya arista de la base mide 5 cm, y su altura, 9 cm.**

Tenemos que calcular el área de su base y multiplicarla por 2 y el área de un rectángulo, de base $5 \cdot 6 = 30$ cm y altura 9 cm.



Usamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo equilátero que se forma en el hexágono:
$5^2 = 2{,}5^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 25 - 6{,}25 = 18{,}75 \rightarrow h = 4{,}33$ cm

El área del hexágono es 6 veces el área del triángulo equilátero que hemos dibujado, ya que podemos descomponer el hexágono en 6 triángulos como este, de modo que $A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot \dfrac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95$ cm^2.

De modo que el área del poliedro es $2 \cdot 64{,}95 + 30 \cdot 9 = 399{,}9$ cm^2.

6. **Calcula la altura de un prisma octogonal regular sabiendo que su área total es 83,28 cm^2, y en la base, la apotema mide 2,41 cm, y las aristas, 2 cm.**

Si al área total le restamos el área de las bases, tendremos el área del rectángulo lateral cuya base es el perímetro de la figura base del poliedro y la altura es la altura del poliedro, que es lo que buscamos.

Veamos, pues, cuál es el área de las bases: $8 \cdot \dfrac{2 \cdot 2{,}41}{2} = 19{,}28$ cm^2, como hay dos bases, el área correspondiente a las bases será 38,56 cm^2.

Restamos el área de las bases al área total: $83{,}28 - 38{,}56 = 44{,}72$ cm^2 es el área lateral.

El área lateral viene dada por el perímetro de la base, $2 \cdot 8 = 16$ cm, y la altura del poliedro, es decir:

$44{,}72 = 16 \cdot h \rightarrow h = 2{,}795$ cm.

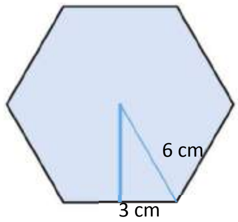
7. **Determina cuántas caras, vértices y aristas tiene una pirámide pentagonal.**

Una pirámide pentagonal tiene 6 caras, 6 vértices y 10 aristas.

8. **Calcula el área total de una pirámide hexagonal regular, con arista básica 6 cm y apotema de sus caras laterales 12 cm.**

La pirámide está compuesta por una base que es un hexágono de lado 6 cm, y por 6 triángulos de base 6 cm y altura 12 cm; la suma de todas las áreas de estos polígonos nos da el área total del poliedro.

Calculamos el área de la base:



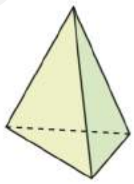
Usamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura del triángulo equilátero que se forma en el hexágono:
$6^2 = 3^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 36 - 9 = 27 \rightarrow h = 5{,}20$ cm

El área de la base es $6 \cdot \frac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6$ cm^2.

El área lateral es $6 \cdot \frac{6 \cdot 12}{2} = 216$ cm^2.

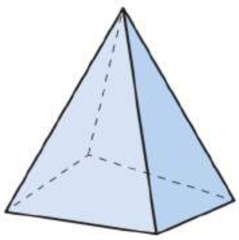
El área total de la pirámide es $93{,}6 + 216 = 309{,}6$ cm^2.

9. **Con cualquier triángulo como base se puede construir una pirámide recta. ¿Es posible hacerlo con cualquier cuadrilátero?**



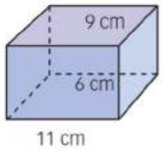
Una pirámide es recta cuando todas sus caras laterales son triángulos isósceles. Lo que nos piden es encontrar un cuadrilátero, con el que no importa cuál sea el punto que se escoja como vértice de la pirámide, la pirámide no va a poder ser recta.

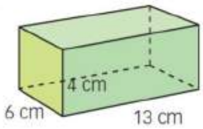
Pero esto no es posible, siempre hay un punto en que sea recta. Si escogemos en cualquier cuadrilátero el centro de este, marcado por el punto de corte de sus diagonales y en esa vertical ponemos el vértice de la pirámide, tendremos una pirámide recta.

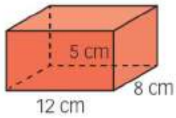


Pirámide cuadrangular irregular recta

10. Halla el área de estos ortoedros.

a)


b)


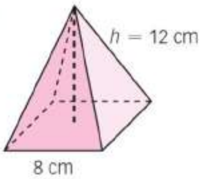
c)


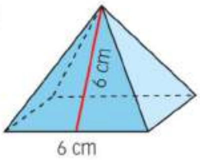
a) $A = (11 \cdot 2 + 9 \cdot 2) \cdot 6 + 2 \cdot 11 \cdot 9 = 438\ \text{cm}^2$

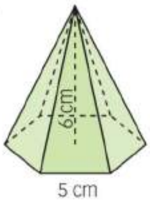
b) $A = (13 \cdot 2 + 6 \cdot 2) \cdot 4 + 2 \cdot 13 \cdot 6 = 308\ \text{cm}^2$

c) $A = (12 \cdot 2 + 8 \cdot 2) \cdot 5 + 2 \cdot 12 \cdot 8 = 392\ \text{cm}^2$

11. Calcula el área de estas pirámides.

a)


b)


c)


a) Calculamos el valor de la altura de las caras triangulares usando el teorema de Pitágoras:
$a^2 = 12^2 + 8^2 = 208 \rightarrow a = 14{,}42$ cm

$$A = 8^2 + \frac{(8 \cdot 4) \cdot 14{,}42}{2} = 294{,}72\ \text{cm}^2$$

b) $A = 6^2 + \dfrac{(6 \cdot 4) \cdot 6}{2} = 108\ \text{cm}^2$

c) Para calcular la apotema de la base y de este modo poder calcular la altura de las caras laterales, usamos el teorema de Pitágoras con el triángulo equilátero que se forma en el hexágono de la base:

$5^2 = 2{,}5^2 + ap^2 \rightarrow ap^2 = 18{,}75 \rightarrow ap = 4{,}33$ cm

Usando el teorema de Pitágoras de nuevo calculamos la altura de los triángulos laterales:

$a^2 = 6^2 + 4{,}33^2 = 54{,}75 \rightarrow a = 7{,}40$ cm

$$A = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} + \frac{(5 \cdot 6) \cdot 7{,}4}{2} = 175{,}95\ \text{cm}^2$$

12. Considera un prisma triangular recto de 8 cm de altura. Halla su área sabiendo que su base es:

a) Un triángulo equilátero de 7 cm de lado.

b) Un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 9 cm y el lado desigual mide 5 cm.

a) Calculamos la altura del triángulo de la base: $7^2 = 3{,}5^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 36{,}75 \rightarrow h = 6{,}06$ cm

$$A = 2 \cdot \frac{7 \cdot 6{,}06}{2} + (7 \cdot 3) \cdot 8 = 210{,}42\ \text{cm}^2$$

b) Calculamos la altura del triángulo de la base: $9^2 = 2{,}5^2 + h^2 \rightarrow h^2 = 74{,}75 \rightarrow h = 8{,}65$ cm

$$A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 8{,}65}{2} + (9 + 9 + 5) \cdot 8 = 227{,}25\ \text{cm}^2$$

13. Calcula el área de un prisma hexagonal regular de altura 14 cm, 250 cm² de área de la base y apotema de la base 8,5 cm.

Necesitamos saber el lado de la base para así poder calcular el área lateral.

Es un hexágono regular, su área, que es 250 cm², viene dada por $6 \cdot \frac{l \cdot 8,5}{2} = 25,5l = 250 \to l = 9,80$ cm

De modo que el área del prisma será:

$A = 2 \cdot 250 + (6 \cdot 9,8) \cdot 14 = 1\,323,2 \text{ cm}^2$

14. Halla el área de una pirámide regular de altura 16 cm y cuya base es:

a) Un cuadrado de área 27,04 cm².

b) Un cuadrado de 52 cm de perímetro.

a) Si el área del cuadrado es 27,04 cm², su lado es $\sqrt{27,04} = 5,2$ cm.

Calculamos la altura de los triángulos laterales usando el teorema de Pitágoras:

$a^2 = 16^2 + 2,6^2 = 262,76 \to a = 16,21$ cm

$A = 27,04 + \frac{(4 \cdot 5,2) \cdot 16,21}{2} = 195,62 \text{ cm}^2$

b) Si el perímetro es 52 cm, el lado es 52/4 = 13 cm.

Calculamos la altura de los triángulos laterales usando el teorema de Pitágoras:

$a^2 = 16^2 + 3,5^2 = 268,25 \to a = 16,38$ cm

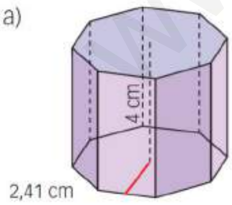
$A = 13^2 + \frac{(4 \cdot 13) \cdot 16,38}{2} = 594,88 \text{ cm}^2$

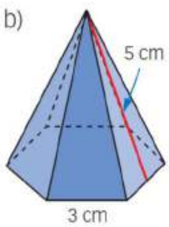
15. Calcula el área lateral de la pirámide regular de arista lateral 6 cm y cuya base es un triángulo equilátero de lado 4 cm.

Si la arista lateral es 6 cm, quiere decir que los triángulos laterales son triángulos isósceles de lados iguales 6 cm y lado desigual 4 cm. Calculamos su altura usando el teorema de Pitágoras:

$6^2 = a^2 + 2^2 \to a^2 = 36 - 4 = 32 \to a = 5,66$ cm $\to$ El área lateral viene dada por $\frac{(3 \cdot 4) \cdot 5,66}{2} = 33,96 \text{ cm}^2$.

16. Calcula el área total de estos cuerpos geométricos.

a) 

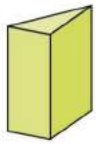
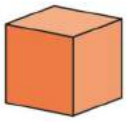
b) 

a) $A = 2 \cdot 8 \cdot \frac{2 \cdot 2,41}{2} + (8 \cdot 2) \cdot 4 = 102,56 \text{ cm}^2$

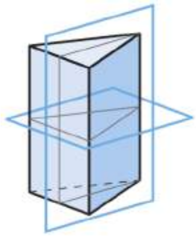
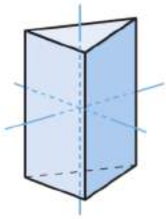
b) Calculamos la apotema de la base usando el teorema de Pitágoras ya que es un hexágono regular, el radio es igual al lado: $3^2 = ap^2 + 1,5^2 \to ap^2 = 6,75 \text{ cm}^2 \to ap = 2,60$ cm.

$A = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2,6}{2} + \frac{(6 \cdot 3) \cdot 5}{2} = 68,4 \text{ cm}^2$

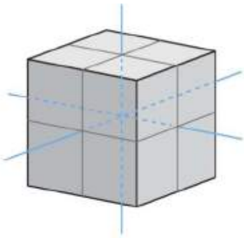
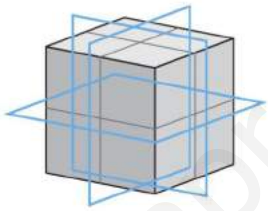
17. **Dibuja en tu cuaderno 3 planos de simetría y 3 ejes de simetría de estas figuras.**

a)  b) 

a) Es un triángulo isósceles, no se pueden dibujar tres planos de simetría, tiene dos planos de simetría:

b) Tres planos y tres ejes de simetría para el cubo:

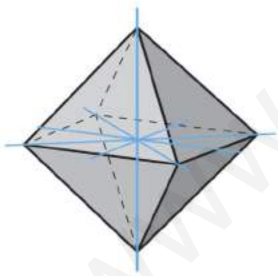
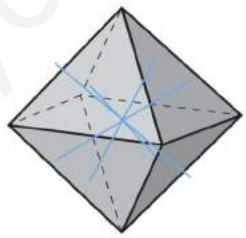
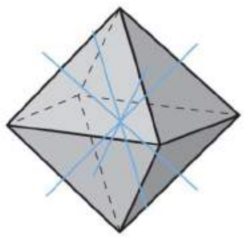
18. **Determina todos los planos y ejes de simetría de un octaedro.**

Tiene 13 ejes de simetría:

3 que unen dos vértices opuestos

4 que unen los puntos medios de caras opuestas

6 que unen los puntos medios de aristas opuestas

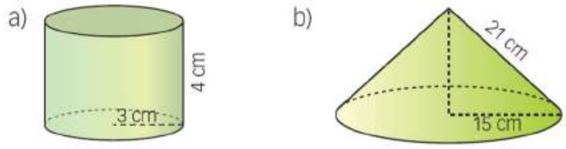




Teniendo en cuenta estos ejes de simetría, sus planos de simetría se trazan de modo análogo a los de un cubo, habrá 9 como en el cubo.

19. **En un poliedro, ¿todos los planos de simetría del poliedro contienen a uno de sus ejes de simetría?**

Si el plano de simetría divide al poliedro en dos partes iguales, quiere decir que si giramos ese poliedro 180º de algún modo, tendremos el poliedro, por tanto, sí se puede trazar un eje de simetría en el plano de simetría.

20. **Calcula el área de estas figuras.**



a) $A = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot \pi 3^2 = 131{,}95\ \text{cm}^2$

b) $A = \pi \cdot 15\ (21 + 15) = 1\,696{,}46\ \text{cm}^2$

21. **Halla el área del cono obtenido al girar el triángulo rectángulo de catetos 24 cm y 32 cm alrededor del cateto menor.**

Al girar este triángulo alrededor del cateto menor, obtenemos un cono cuyo radio de la base es 32 cm y altura 24 cm, la generatriz la podemos calcular usando el teorema de Pitágoras.

$g^2 = 24^2 + 32^2 = 1\,600 \rightarrow g = 40\ \text{cm}$

Ahora calculamos el área.

$A = \pi \cdot 32\ (40 + 32) = 7\,238{,}23\ \text{cm}^2$

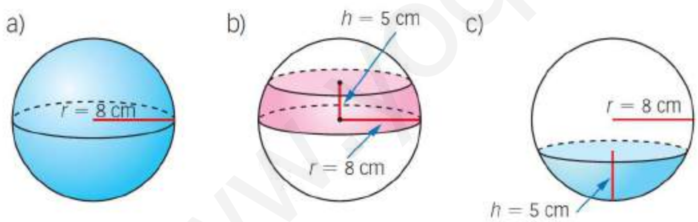
22. **Un cono tiene la misma base que un cilindro y su área es la mitad. ¿Cuál tendrá mayor altura?**

$A_{\text{cilindro}} = 2\pi r\ (h + r) = 2\ (\pi r\ (g + r)) = 2\ A_{\text{cono}} \rightarrow h = g$

La generatriz es la hipotenusa en un triángulo rectángulo que se forma con la altura del cono y el radio de la base, de modo que la generatriz es mayor que la altura del cono, esto es cierto para cualquier cono.

En este caso, tenemos que la altura del cilindro es igual a la generatriz del cono, que es mayor que la altura del cono, de modo que el cilindro tiene mayor altura.

23. **Calcula el área de estas superficies esféricas.**



a) $A = 4\pi \cdot 8^2 = 804{,}25\ \text{cm}^2$

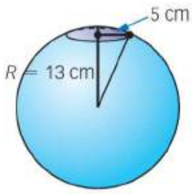
b) $A = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 251{,}33\ \text{cm}^2$

c) $A = 2\pi \cdot 8 \cdot 5 = 251{,}33\ \text{cm}^2$

24. **Queremos recubrir una esfera de 12 cm de diámetro con una placa de metal. ¿Qué superficie de placa de metal necesitamos?**

$A = 4\pi \cdot 6^2 = 452{,}39\ \text{cm}^2$

25. **¿Cuál es el área del casquete esférico? ¿Qué pasa si la altura es igual al radio?**

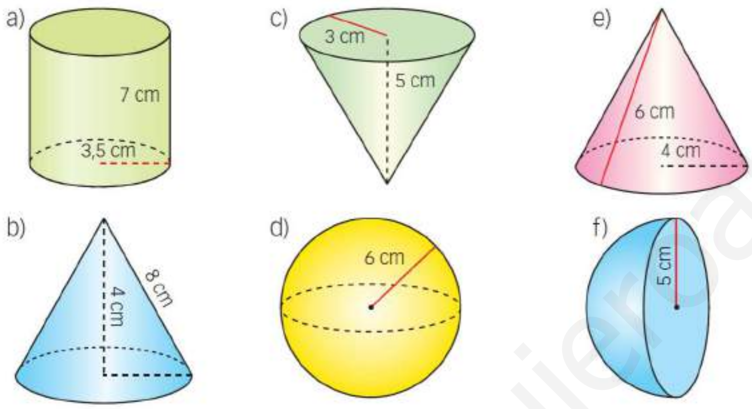


Calculamos la altura hasta el casquete usando el teorema de Pitágoras: $13^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = 12$ cm, de modo que la altura del casquete es $13 - 12 = 1$ cm.

$A = 2\pi \cdot 13 \cdot 1 = 81{,}68$ cm^2

Si la altura del casquete es igual al radio, tenemos una semiesfera. Si la altura hasta el casquete es igual al radio, no habría casquete.

26. **Calcula el área de estos cuerpos de revolución.**



a) $A = 2\pi \cdot 3{,}5\ (7 + 3{,}5) = 230{,}91$ cm^2

b) Calculamos el radio de la base usando el teorema de Pitágoras: $8^2 = 4^2 + r^2 \rightarrow r = 6{,}93$ cm

$A = \pi \cdot 6{,}93\ (8 + 6{,}93) = 325{,}04$ cm^2

c) Calculamos la generatriz usando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 5^2 + 3^2 \rightarrow g = 5{,}83$ cm

$A = \pi \cdot 3\ (5{,}83 + 3) = 83{,}22$ cm^2

d) $A = 4\pi \cdot 6^2 = 452{,}39$ cm^2

e) $A = \pi \cdot 4\ (6 + 4) = 125{,}66$ cm^2

f) $A = (4\pi \cdot 5^2)/2 = 157{,}08$ cm^2

27. **Calcula el radio de un cilindro de altura 10 cm sabiendo que su área total es 747,7 cm².**

$A = 2\pi \cdot r\ (10 + r) = 747{,}7 \rightarrow r^2 + 10r = 119 \rightarrow r^2 + 10r - 119 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y descartamos la solución negativa. Por tanto, $r = 7$ cm.

28. **Determina la generatriz de un cono de 12 cm de altura y área de la base 19,63 cm².**

Sabemos el área de la base, calculamos su radio: $19{,}63 = \pi r^2 \rightarrow r = 2{,}50$ cm.

Para calcular la generatriz, usamos el teorema de Pitágoras: $g^2 = 12^2 + 2{,}5^2 \rightarrow g = 12{,}26$ cm.

29. Averigua la altura de un cono sabiendo que el área de la base es 18,1 cm² y el área lateral es 45,24 cm².

Sabemos el área de la base, calculamos su radio: $18{,}1 = \pi r^2 \rightarrow r = 2{,}40$ cm.

Sabemos el área lateral y el radio, podemos calcular la generatriz: $45{,}24 = \pi \cdot 2{,}4 \cdot g \rightarrow g = 6$ cm.

Con el radio y la generatriz, podemos calcular la altura usando el teorema de Pitágoras: $6^2 = h^2 + 2{,}4^2 \rightarrow h = 5{,}5$ cm

30. Considera un rectángulo de 4 cm de ancho y 12 cm de largo. Halla el área del cilindro que se genera al girar el rectángulo alrededor de estos elementos.

a) Su ancho

b) Su largo

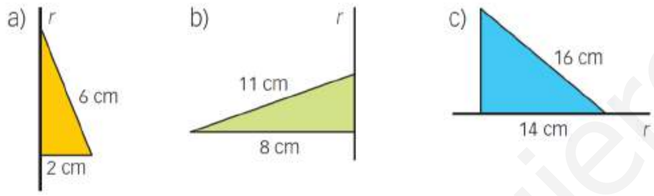
a) Si lo giramos alrededor de su ancho, tenemos un cilindro con una base de radio 12 cm y una altura 4 cm.

$A = 2\pi \cdot 12\ (4 + 12) = 1\,206{,}37$ cm²

b) Si lo giramos alrededor de su largo, tenemos un cilindro con una base de radio 4 cm y una altura 12 cm.

$A = 2\pi \cdot 4\ (12 + 4) = 402{,}12$ cm²

31. Halla el área de los conos que se obtienen al girar estos triángulos rectángulos alrededor de *r*:



a) $A = \pi \cdot 2\ (6 + 2) = 50{,}27$ cm²

b) $A = \pi \cdot 8\ (11 + 8) = 477{,}52$ cm²

c) Tenemos que calcular el radio de la base, usamos el teorema de Pitágoras: $16^2 = 14^2 + r^2 \rightarrow r = 7{,}75$ cm.

$A = \pi \cdot 7{,}75\ (16 + 7{,}75) = 578{,}25$ cm²

32. Halla el área de la esfera que se obtiene al hacer girar estos semicírculos.

a) 16 cm de diámetro

b) $\sqrt{7}$ cm de radio

c) 5,09 cm² de área

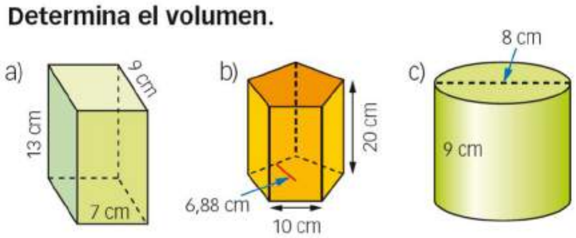
a) $A = 4\pi \cdot 8^2 = 804{,}25$ cm²

b) $A = 4\pi \cdot (\sqrt{7})^2 = 87{,}96$ cm²

c) Si el semicírculo tiene un área de 5,09 cm², podemos calcular su radio así: $5{,}09 = (\pi r^2)/2 \rightarrow r = 1{,}8$ cm

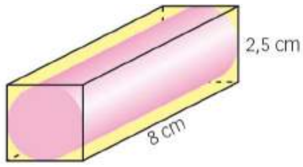
$A = 4\pi \cdot 1{,}8^2 = 40{,}72$ cm²

33. Determina el volumen.



a) $V = 13 \cdot 7 \cdot 9 = 819$ cm^3 b) $V = 5 \cdot \frac{10 \cdot 6,88}{2} \cdot 20 = 3\,440$ cm^3 c) $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 9 = 452,39$ cm^3

34. Halla el volumen del cilindro que está dentro del prisma.



El lado del cuadrado base del prisma es igual al diámetro del cilindro, y la altura del prima es igual a la altura del cilindro.

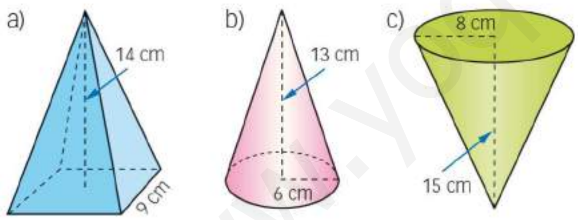
$V = \pi \cdot 1,25^2 \cdot 8 = 39,27$ cm^3

35. Tenemos dos cilindros, uno tiene la mitad de altura que el otro y el doble de radio. ¿Qué relación hay entre sus volúmenes?

$V_1 = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $V_2 = \pi \cdot (2r)^2 \cdot (h/2) = \pi\, 4r^2 \cdot h/2 = 2\pi \cdot r^2 \cdot h$

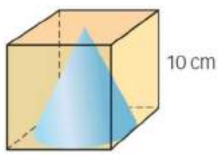
El cilindro cuya altura es la mitad y radio es el doble, tiene el doble de volumen que el inicial.

36. Determina el volumen.



a) $\frac{1}{3}\ 9^2 \cdot 14 = 378$ cm^3 b) $\frac{1}{3}\ \pi \cdot 6^2 \cdot 13 = 490,09$ cm^3 c) $\frac{1}{3}\ \pi \cdot 8^2 \cdot 15 = 1\,005,31$ cm^3

37. Halla el volumen comprendido entre el cubo y el cono de la figura.



Volumen del cubo: $10^3 = 1\,000$ cm^3

Volumen del cono: $\frac{1}{3}\ \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 261,80$ cm^3

El volumen comprendido entre ambos es $1\,000 - 261,80 = 738,2$ cm^3.

38. **Dado un cono de radio *r* y altura *h*, ¿cómo aumenta más su volumen: aumentando 1 cm el radio o al incrementar 1 cm la altura?**

Veamos qué ocurre al aumentar el radio:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (r+1)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (r^2+2r+1)\cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{1}{3}\pi \cdot (2r+1)\cdot h$$

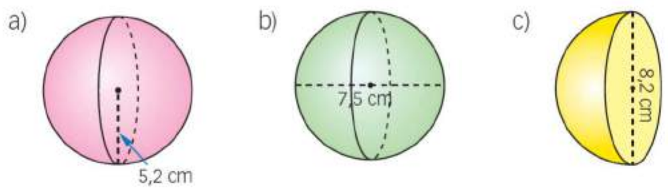
Si aumentamos 1 cm el radio, el volumen aumenta en $\frac{1}{3}\pi \cdot (2r+1)\cdot h$ cm^3.

Veamos qué ocurre al aumentar la altura:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (h+1) = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2$$

Si aumentamos 1 cm la altura, el volumen aumenta en $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2$ cm^3.

39. **Halla el volumen de estas esferas.**



a) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5{,}2^3 = 588{,}98$ cm^3

b) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}75^3 = 220{,}89$ cm^3

c) $V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi \cdot 4{,}1^3 = 144{,}35$ cm^3

40. **Halla el radio de una esfera de 73,62 cm³ de volumen.**

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = 73{,}62$ cm$^3 \rightarrow r = 2{,}6$ cm

41. **Si tenemos un cubo y una esfera y el área de cada uno de ellos es de 216 cm², averigua cuál de los dos (el cubo o la esfera) tiene mayor volumen.**

Veamos qué ocurre con el cubo.

Si el área del cubo es 216 cm^2, quiere decir que el área de cada cara es $216/6 = 36$ cm^2, por lo que tiene un lado de 6 cm.

El volumen del cubo sería $6^3 = 216$ cm^3.

Veamos qué ocurre con la esfera.

Si el área de la esfera es 216 cm$^2 = 4\pi \cdot r^2 \rightarrow r = 4{,}15$ cm.

De modo que el volumen sería $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4{,}15^3 = 299{,}39$ cm^3.

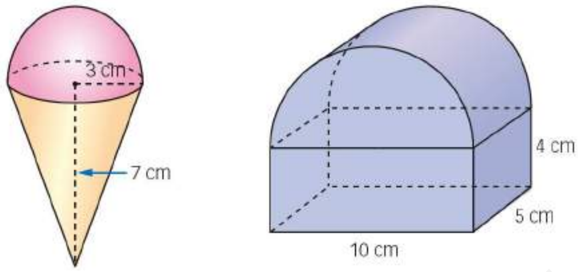
Tiene mayor volumen la esfera.

42. **Calcula el volumen de un prisma pentagonal regular de 17 cm de altura, 9 cm de arista básica y 6,2 cm de apotema básica.**

El área de la base es $5 \cdot \frac{9 \cdot 6{,}2}{2} = 139{,}5$ cm^2.

De modo que el volumen del prisma es $V = 17 \cdot 139{,}5 = 2\,371{,}5$ cm^3.

43. **Calcula el volumen de las siguientes figuras geométricas.**



En la primera figura sumamos el volumen del cono al volumen de la semiesfera:

$V = \frac{1}{3}\,(\pi \cdot 3^2 \cdot 7) + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\,\pi \cdot 3^3 = 122{,}53$ cm^3

El volumen de la segunda figura es la suma de un prisma de base rectangular más medio cilindro:

$V = 10 \cdot 5 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 396{,}35$ cm^3

44. **Calcula el volumen de un cilindro de 15 cm de altura y 433,54 cm² de área lateral.**

Si el área lateral es 433,54 cm^2, quiere decir que $2\pi r \cdot h = 433{,}54$. Como la altura es 15 cm:

$r = 433{,}54 : (2\pi \cdot 15) = 4{,}60$ cm $\rightarrow V = \pi \cdot 4{,}6^2 \cdot 15 = 997{,}14$ cm^3

45. **Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular de altura 17 cm y arista básica de 10 cm.**

Como la base es un hexágono regular, podemos calcular su apotema con el teorema de Pitágoras, ya que el radio es igual al lado:

$10^2 = ap^2 + 5^2 \rightarrow ap = 8{,}66$ cm

$V = (6 \cdot \frac{10 \cdot 8{,}66}{2}) \cdot 17 = 4\,416{,}6$ cm^3

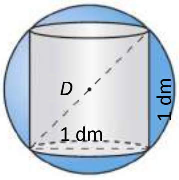
46. **Calcula el volumen de un cono de 37,7 cm de longitud de la circunferencia de la base y altura igual a dos tercios del radio de la base.**

Primero calculamos el radio de la base: $2\pi r = 37{,}7$ cm $\rightarrow r = 6{,}00$ cm.

La altura será $\frac{2}{3}$ de 6 cm, es decir, 4 cm.

$V = \frac{1}{3}\,(\pi \cdot 6^2 \cdot 4) = 150{,}80$ cm^3

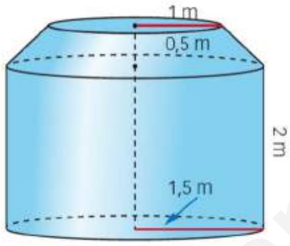
47. **Calcula el volumen de una esfera que circunscribe a un cilindro de 1 dm de altura y 1 dm de diámetro de la base.**



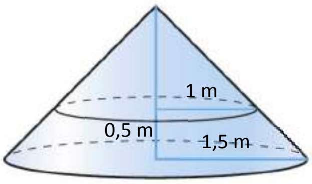
Calculamos el diámetro de la esfera usando el teorema de Pitágoras: $D^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow D = 1{,}41$ dm $\rightarrow R = 0{,}705$ dm

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}705^3 = 1{,}47\ \text{dm}^3$

48. **Calcula el coste de la arena que contiene este almacén si está completamente lleno y el metro cúbico de arena cuesta 18 €.**



$V_{\text{Figura}} = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Tronco de cono}}$ $\qquad$ $V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 2 = 14{,}14\ \text{m}^3$



H = altura del cono grande $\qquad$ h = altura del cono pequeño

Aplicando el teorema de Tales:

$\frac{h+0{,}5}{1{,}5} = \frac{h}{1} \rightarrow h + 0{,}5 = 1{,}5h \rightarrow h = 1 \rightarrow H = 1{,}5$

$V_{\text{Tronco de cono}} = V_{\text{Cono grande}} - V_{\text{Cono pequeño}} = \frac{1{,}5^3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2{,}49\ \text{m}^3$

$V_{\text{Figura}} = 14{,}14 + 2{,}49 = 16{,}63\ \text{m}^3$

Así, el coste de la arena es $18 \cdot 16{,}6 = 298{,}80$ €.

49. **Encuentra en Internet la latitud y la longitud de estas ciudades.**

a) Johannesburgo
b) Tokio
c) Londres
d) Nueva York
e) Buenos Aires
f) Quito

a) 26° 8′ 42″ S, 28° 3′ 1″ E
b) 35° 41′ 2″ N, 139° 46′ 28″ E
c) 51° 30′ 26″ N, 0° 7′ 39″ O
d) 40° 40′ 12″ N, 73° 56′ 24″ O
e) 34° 35′ 59″ S, 58° 22′ 55″ O
f) 0° 13′ 7″ S, 78° 30′ 35″ O

50. **¿Qué longitud y latitud separan estos puntos situados sobre la esfera terrestre?**

A(34° E, 25° N) B(50° O, 46° S) C(167° E, 72° S)

Diferencia entre A y B: longitud 84º y latitud 71º

Diferencia entre A y C: longitud 133º y latitud 77º

Diferencia entre B y C: longitud 217º y latitud 26º

51. **¿Qué diferencia horaria hay entre dos puntos si la diferencia entre sus longitudes es 90°?**

Cada franja horaria son 15º, es decir, si la diferencia de longitud es 90º se recorren 90 : 15 = 6 franjas horarias, de modo que la diferencia es de 6 horas.

52. **Calcula la diferencia horaria que corresponde a estas cantidades que indican la diferencia en grados entre las longitudes de dos puntos de la esfera terrestre.**

a) 5,8° c) 38,52° e) 123,2°

b) 12,4° d) 55,752° f) 164°

a) x = 5,8 : 15 = 0,39 h → 23 min 12 s

b) x = 12,4 : 15 = 0,83 h → 49 min 48 s

c) x = 38,52 : 15 = 2,568 h → 2 h 34 min 4,8 s

d) x = 55,752 : 15 = 3,72 h → 3 h 43 min 12 s

e) 123,2 : 15 = 8,21 → 8 h 12 min 36 s

f) 164 : 15 = 10,93 → 10 h 55 min 48 s

53. **Las coordenadas de la ciudad A son 40° E 30° N y las de la ciudad B, 60° O 25° S. ¿Cuál es la diferencia horaria entre estas dos ciudades?**

La diferencia de longitud entre las ciudades es de 100º, de modo que la diferencia horaria será:
100 : 15 = 6,67 h → 6 h 40 min 12 s

54. **¿Qué diferencia horaria hay entre Tarragona, con coordenadas geográficas 1° 15′ E 41° 7′ N, y Cáceres, con coordenadas 6° 23′ O 39° 28′ N?**


La diferencia de longitud es 7º 38’ = 7,63º, de modo que la diferencia horaria será:

7,63 : 15 = 0,51 h → 30 min 36 s

55. **Sabiendo que Fornells (isla de Menorca) tiene una longitud de 4° 7′ E, ¿qué diferencia horaria tiene con Madrid, cuya longitud es 3° 41′ O?**

La diferencia de longitud es 7º 48’ = 7,8º, de modo que la diferencia horaria será: 7,8 : 15 = 0,52 h → 31 min 12 s

56. Si la longitud de Madrid es de 3° 41′ O:

a) ¿Qué diferencia horaria tiene con Tarragona?

b) ¿Y con Almería, cuya longitud es 2° 26′ O?

c) ¿Con qué ciudades no tiene Madrid diferencia horaria?

a) Como vimos en el ejercicio 54, la longitud de Tarragona es 1º 15’ E, de modo que la diferencia de longitud con Madrid es 4º 56’ = 4,93º. Por lo tanto, la diferencia horaria será: 4,93 : 15 = 0,33 h → 19 min 48 s.

b) En este caso la diferencia de longitud es 1º 15’ = 1,25º, por lo tanto, la diferencia horaria será: 1,25 : 15 = 0,08 h → 4 min 48 s

c) Madrid no tiene diferencia horaria con ciudades que tengan su misma longitud, es decir, 3º 41’ O, tomando cualquier latitud en ese meridiano.

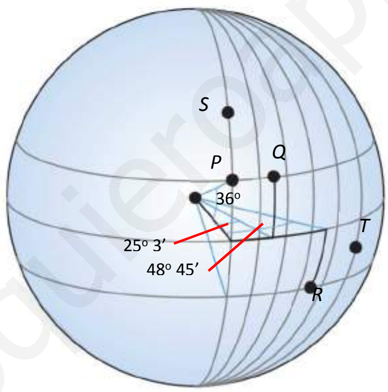
57. Señala en un mapa un punto *P* de latitud 36° N.

a) Halla un punto *Q* de igual latitud y una diferencia horaria de 1 hora y 40 minutos con respecto a *P*.

b) Marca sobre el mapa un punto *R* con la misma latitud pero sur y con una diferencia horaria de 3 horas y cuarto con respecto a *P*.

c) Determina un punto *S* con distinta latitud pero sin diferencia horaria con respecto a *P*.

d) Señala otro punto *T* con distinta latitud y con diferencia horaria de 5 horas con respecto a *P*.



a) Si la diferencia horaria es de 1 h 40 min = 1,67 h, quiere decir que la diferencia de longitud es 1,67 · 15 = 25,05º = 25º 3’

b) Si la diferencia horaria es de 3 h 15 min = 3,25 h, quiere decir que la diferencia de longitud es 3,25 · 15 = 48,75º = 48º 45’

c) Tiene que tener la misma longitud que *P*.

d) La latitud puede ser la que queramos, pero al tener una diferencia horaria de 5 horas, tendrá que tener una longitud que difiera de la de *P* en 5 · 15 = 75º.

ACTIVIDADES FINALES

58. Contesta a estas cuestiones.

a) ¿Cuál es el número de aristas de un pentaedro que tiene 6 vértices?

b) ¿Cuál es el número de vértices de un pentaedro si tiene 8 aristas?

c) ¿Cuál es el número de aristas de un heptaedro que tiene 7 vértices?

d) ¿Cuál es el número de vértices de un heptaedro si tiene 15 aristas?

a) Un pentaedro tiene 5 caras, si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá

$5 + 6 = 2 + A \rightarrow A = 9$ aristas.

b) Un pentaedro tiene 5 caras, si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá

$5 + V = 2 + 8 \rightarrow V = 5$ vértices.

c) Un heptaedro tiene 7 caras, si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá

$7 + 7 = 2 + A \rightarrow A = 12$ aristas.

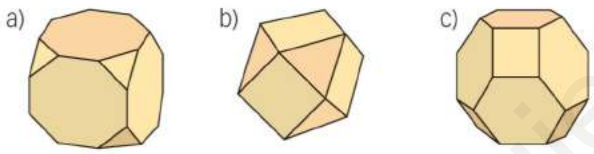
d) Un heptaedro tiene 7 caras, si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá

$7 + V = 2 + 15 \rightarrow V = 10$ vértices.

59. **Calcula el número que falta en cada caso.**

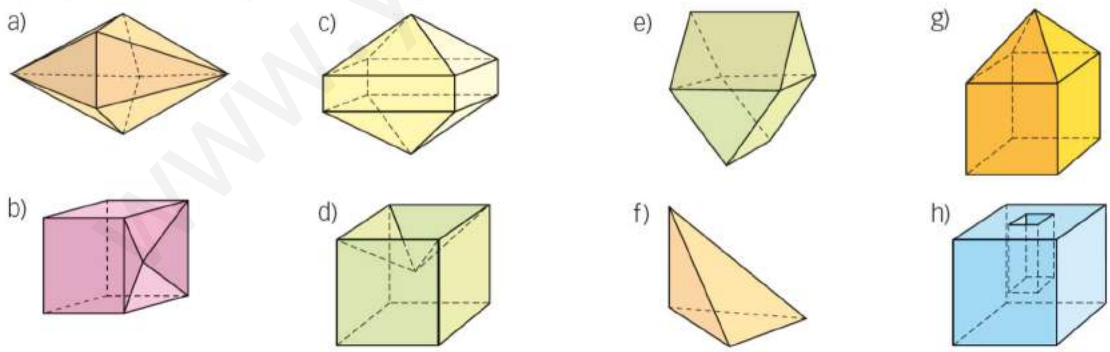
Caras	Aristas	Vértices
6	**12**	8
6	**10**	6
8	**20**	14
10	18	10

60. **Los siguientes poliedros, ¿son regulares? Razónalo.**



Ninguno de los tres es regular, pues en un poliedro regular las caras son polígonos regulares iguales, y en estos casos aunque las caras son polígonos regulares, en los tres hay más de un polígono regular.

61. **Comprueba si estos poliedros cumplen la fórmula de Euler.**



La fórmula de Euler: n.º de caras + n.º de vértices = 2 + n.º de aristas

a) $10 + 7 = 2 + 15$. Se cumple.

b) $9 + 9 = 2 + 16$. Se cumple.

c) $12 + 10 = 2 + 20$. Se cumple.

d) $9 + 9 = 2 + 16$. Se cumple.

e) $8 + 8 = 2 + 14$. Se cumple.

f) $4 + 4 = 2 + 6$. Se cumple.

g) $9 + 9 = 2 + 16$. Se cumple.

h) $11 + 16 \neq 2 + 24$. No se cumple

62. Di cuál es la base de estos prismas que tienen el número de elementos indicado.

a) 9 caras c) 20 vértices e) 21 aristas
b) 18 aristas d) 10 vértices f) 18 caras

a) 9 caras → 2 de las caras son las bases, quedan 7 caras que son las laterales, es un prisma heptagonal.

b) 18 aristas → Hay tantas aristas en cada una de las bases como laterales, 18 : 3 = 6, es un prisma hexagonal.

c) 20 vértices → Los vértices que hay en un prisma son los de sus bases, de modo que como hay dos bases, 20 : 2 = 10, es un prisma decagonal.

d) Es un prisma pentagonal.

e) Es un prisma heptagonal.

f) Es un prisma de base un polígono de 16 lados.

63. ¿Qué polígono es la base de estas pirámides?

a) 7 vértices d) 9 vértices
b) 20 aristas e) 18 aristas
c) 8 caras f) 10 caras

a) La pirámide tiene tantos vértices como la base más uno, que es el pico de la pirámide, de modo que en este caso 7 – 1 = 6. Es una pirámide de base hexagonal.

b) La pirámide tiene las aristas de la base y luego una por cada uno de los vértices de la base (que son tantos como aristas de la base), de modo que hay el doble de aristas que lados del polígono de la base, esto es 20 : 2 = 10, es una pirámide de base un decágono.

c) La pirámide tiene una cara que es la base y las otras son tantas como lados del polígono de la base, de modo que, 8 – 1 = 7, es una pirámide de base heptagonal.

d) Es una pirámide de base un octógono.

e) Es una pirámide de base un eneágono.

f) Es una pirámide de base un eneágono.

65. Halla la apotema de una pirámide regular de base cuadrada de altura 7 cm y arista básica 9 cm.

La apotema de la pirámide forma un triángulo rectángulo con la altura del prisma y un segmento que va desde el centro de la base al lado, en este caso, al ser la base cuadrada es la mitad de su lado, es decir, 4,5 cm.

$ap^2 = 7^2 + 4{,}5^2 \rightarrow ap = 8{,}32$ cm

66. Halla la altura de estas pirámides regulares.

a) Pirámide hexagonal de apotema 10 cm y arista básica 10 cm.
b) Pirámide pentagonal de apotema 9 cm y apotema básica 4,13 cm.

a) Como la base es un hexágono, podemos calcular la apotema de la base, que nos hace falta para calcular la altura: $ap^2 + 5^2 = 10^2 \rightarrow ap = 8{,}66$ cm

Ahora calculamos la altura, que forma un triángulo rectángulo con la apotema de la pirámide y la de la base, de modo que usando el teorema de Pitágoras: $10^2 = h^2 + 8{,}66^2 \rightarrow h = 5$ cm.

b) La altura forma un triángulo rectángulo con las dos apotemas, usando el teorema de Pitágoras:

$9^2 = 4{,}13^2 + h^2 \rightarrow h = 8{,}00$ cm

67. Calcula la diagonal de un ortoedro de dimensiones:

a) $8 \times 5 \times 4$ cm b) $10 \times 7 \times 3$ cm

Se forma un triángulo rectángulo con la diagonal del ortoedro, la diagonal de la base y una de las aristas que miden lo mismo que la altura.

a) Calculamos la diagonal de la base: $d^2 = 8^2 + 5^2 \rightarrow d = 9{,}43$ cm

Calculamos la diagonal del ortoedro: $D^2 = 9{,}43^2 + 4^2 \rightarrow D = 10{,}24$ cm

b) Calculamos la diagonal de la base: $d^2 = 10^2 + 7^2 \rightarrow d = 12{,}21$ cm

Calculamos la diagonal del ortoedro: $D^2 = 12{,}21^2 + 3^2 \rightarrow D = 12{,}57$ cm

68. La diagonal de un cubo mide $\sqrt{27}$ cm. Obtén la medida de la arista y de la diagonal de una de sus caras.

La relación entre la arista y la diagonal de una de las caras al ser un cubo es que la arista es l y la diagonal es $\sqrt{2}\, l$.

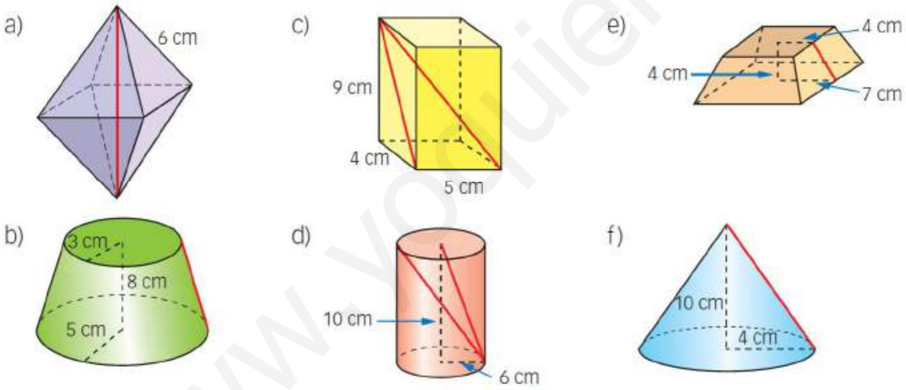
Si la diagonal del cubo es $\sqrt{27}$, por el teorema de Pitágoras: $27 = l^2 + 2l^2 \rightarrow l = 3$ cm.

69. Halla la diagonal de un prisma cuadrangular regular de 9 cm de arista básica y 12 cm de altura.

Calculamos la diagonal de la base: $d^2 = 9^2 + 9^2 \rightarrow d = 12{,}73$ cm.

La diagonal del prisma es: $D^2 = 12^2 + 12{,}73^2 \rightarrow D = 17{,}49$ cm.

70. Halla la medida de los segmentos marcados.



a) Los triángulos laterales son equiláteros, de modo que el lado del cuadrado medirá 6 cm.

Podemos calcular la mitad de la altura marcada bien con el triángulo rectángulo que se forma con esta, uno de los lados del triángulo y la mitad de la diagonal del cuadrado, o bien con el triángulo rectángulo que se forma con la altura del triángulo, la apotema del cuadrado (= a la mitad del lado) y la mitad de la altura. En cualquier caso, hay que aplicar el teorema de Pitágoras.

En este caso calculamos la diagonal del cuadrado: $d^2 = 6^2 + 6^2 \rightarrow d = 8{,}49$ cm. Su mitad es 4,245 cm.

La mitad de la altura del poliedro viene dada por $6^2 = h^2 + 4{,}245^2 \rightarrow h = 4{,}24$ cm. Así que la línea roja mide 8,48 cm.

b) La línea roja es la generatriz del tronco de cono. Si desde la circunferencia más pequeña trazamos una paralela a la altura se nos forman dos figuras, un rectángulo de base 3 cm y altura 8 cm, y un triángulo rectángulo de catetos 8 cm y 2 cm e hipotenusa la generatriz del tronco de cono.

$g^2 = 8^2 + 2^2 \rightarrow g = 8{,}25$ cm

c) Calculamos primero la línea que es diagonal de una de las caras: $d^2 = 9^2 + 4^2 \rightarrow d = 9{,}85$ cm.

Calculamos ahora la que sería diagonal de la base, aunque no esté marcada, pues nos hace falta para calcular la diagonal del ortoedro marcada: $d'^2 = 5^2 + 4^2 \rightarrow d' = 6{,}40$ cm.

$D^2 = 6{,}4^2 + 9^2 \rightarrow D = 11{,}04$ cm

d) La línea roja que va al centro de la base: $d^2 = 10^2 + 6^2 \rightarrow d = 11{,}66$ cm

La línea roja que cruza el cilindro: $D^2 = 10^2 + 12^2 \rightarrow D = 15{,}62$ cm

e) $ap^2 = 4^2 + 3^2 \rightarrow ap = 5$ cm

f) $g^2 = 10^2 + 4^2 \rightarrow g = 10{,}77$ cm

71. Halla el área de estos poliedros regulares.

a) Tetraedro de arista 12 cm
b) Octaedro de arista 10 cm
c) Icosaedro de arista 8 cm
d) Cubo de arista 7 cm
e) Dodecaedro de arista 6 cm y apotema de cada pentágono 4,13 cm

a) Es el área de 4 triángulos equiláteros de lado 12 cm.

Calculamos la altura: $12^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow h = 10{,}39$ cm.

$A = 4 \cdot \frac{12 \cdot 10{,}39}{2} = 249{,}36 \text{ cm}^2$

b) Es el área de 8 triángulos equiláteros de lado 10 cm.

Calculamos la altura: $10^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = 8{,}66$ cm.

$A = 8 \cdot \frac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 346{,}4 \text{ cm}^2$

c) Es el área de 20 triángulos equiláteros de lado 8 cm.

Calculamos la altura: $8^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow h = 6{,}93$ cm.

$A = 20 \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 554{,}4 \text{ cm}^2$

d) Es el área de 6 cuadrados de lado 7 cm.

$A = 6 \cdot 7^2 = 294 \text{ cm}^2$

e) El área de 12 pentágonos de lado 6 cm y apotema 4,13 cm. $A = 12 \cdot 5 \cdot \frac{6 \cdot 4{,}13}{2} = 743{,}4 \text{ cm}^2$

72. Halla el área total de un prisma triangular regular de 4 cm de altura y 2 cm de arista básica.

Calculamos la altura de la base, y con ella, el área:

$2^2 = h^2 + 1^2 \rightarrow h = 1{,}73$ cm.$\rightarrow A = 2 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} + (3 \cdot 2) \cdot 4 = 27{,}46 \text{ cm}^2$

73. Calcula el área total de un prisma recto cuya altura es de 12 cm y las bases son:

a) Trapecios isósceles de bases 6 y 10 cm, y lado oblicuo 3 cm.

b) Trapecios rectángulos de base mayor 21,38 cm, altura 9 cm y diagonal menor 15 cm.

a) Calculamos la altura del trapecio: $10 - 6 = 4$, $4 : 2 = 2$. De modo que $3^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h = 2{,}24$ cm.

$$A = 2 \cdot \frac{(6+10)\cdot 2{,}24}{2} + (10 + 6 + 2 \cdot 3) \cdot 12 = 299{,}84 \text{ cm}^2$$

b) Podemos calcular la base menor con la diagonal menor y la altura: $15^2 = 9^2 + b^2 \rightarrow b = 12$ cm.

Ahora calculamos el lado oblicuo, que nos hace falta para saber el perímetro: $l^2 = 9^2 + (21{,}38 - 12)^2 \rightarrow l = 13{,}00$ cm

$$A = 2 \cdot \frac{(21{,}38+12)\cdot 9}{2} + (21{,}38 + 9 + 12 + 13) \cdot 12 = 964{,}98 \text{ cm}^2$$

74. Halla el área total de estos poliedros.

a) Un ortoedro cuyas aristas miden 3, 4 y 5 cm.

b) Un prisma hexagonal regular de 8 cm de altura y 5 cm de arista básica.

a) Tenemos dos bases de 3×4.

$$A = 2 \cdot (3 \cdot 4) + (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4) \cdot 5 = 94 \text{ cm}^2$$

b) Calculamos la apotema de la base: $5^2 = 2{,}5^2 + ap^2 \rightarrow ap = 4{,}33$ cm.

$$A = 2 \cdot 6 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} + (6 \cdot 5) \cdot 8 = 369{,}9 \text{ cm}^2$$

75. Calcula la arista de estos cuerpos.

a) Un tetraedro de área total $16\sqrt{3}$ cm².

b) Un icosaedro cuyas caras miden $\sqrt{3}$ cm².

c) Un octaedro de área total $18\sqrt{3}$ cm².

a) Es el área de 4 triángulos equiláteros.

Calculamos la altura: $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ cm. $\qquad A = 4 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = 16\sqrt{3} \rightarrow l^2 = 16 \rightarrow l = 4$ cm

Es un tetraedro con una arista de 4 cm.

b) Es el área de 20 triángulos equiláteros.

Calculamos la altura: $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ cm. $\qquad A = 20 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = \sqrt{3} \rightarrow 5l^2 = 1 \rightarrow l = 0{,}45$ cm

Es un icosaedro con una arista de 0,45 cm.

c) Es el área de 8 triángulos equiláteros.

Calculamos la altura: $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ cm. $\qquad A = 8 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = 18\sqrt{3} \rightarrow 2l^2 = 18 \rightarrow l = 3$ cm

Es un octoedro con una arista de 3 cm.

76. Calcula la medida de la arista de un cubo sabiendo que su área total es 486 cm².

Es el área de 6 cuadrados de lado l, de modo que $6l^2 = 486 \rightarrow l = 9$ cm.

Es un cubo con una arista de 9 cm.

77. Halla la arista de un tetraedro regular sabiendo que su área total es 80,09 cm².

Es el área de 4 triángulos equiláteros. Calculamos la altura: $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ cm.

$A = 4 \cdot \frac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} = 80{,}09 \rightarrow l = 6{,}80$ cm $\rightarrow$ Es un tetraedro con una arista de 6,80 cm.

78. Calcula el área total de estas pirámides regulares.

Base	Arista lateral	Apotema	Arista básica	Apotema básica
Pentágono	17 cm		10 cm	6,88 cm
Pentágono		23,32 cm	18 cm	12,39 cm
Hexágono	4,24 cm		3 cm	
Hexágono		15 cm	5 cm	
Triángulo	6 cm		4 cm	
Triángulo		6,54 cm	5 cm	

- Fila 1: Calculamos la apotema de la pirámide teniendo en cuenta el triángulo rectángulo que forma con la arista lateral y la mitad de la arista básica: $17^2 = ap^2 + 10^2 \rightarrow ap^2 = 189 \rightarrow ap = 13{,}75$ cm.

  $A = 5 \cdot \frac{10 \cdot 6{,}88}{2} + \frac{50 \cdot 13{,}75}{2} = 515{,}75 \text{ cm}^2$

- Fila 2: $A = 5 \cdot \frac{18 \cdot 12{,}39}{2} + \frac{90 \cdot 23{,}32}{2} = 1\,606{,}95 \text{ cm}^2$

- Fila 3: Calculamos la apotema básica: $3^2 = a^2 + 1{,}5^2 \rightarrow a = 2{,}60$ cm.

  Calculamos la apotema de la pirámide: $4{,}24^2 = ap^2 + 1{,}5^2 \rightarrow ap = 3{,}97$ cm.

  $A = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} + \frac{18 \cdot 3{,}97}{2} = 59{,}13 \text{ cm}^2$

- Fila 4: Calculamos la apotema básica: $5^2 = a^2 + 2{,}5^2 \rightarrow a = 2{,}60$ cm.

  $A = 6 \cdot \frac{5 \cdot 2{,}6}{2} + \frac{30 \cdot 6}{2} = 129 \text{ cm}^2$

- Fila 5: Calculamos la altura del triángulo: $4^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h = 3{,}46$ cm.

  Calculamos la apotema: $6^2 = ap^2 + 2^2 \rightarrow ap = 5{,}66$ cm.

  $A = \frac{4 \cdot 3{,}46}{2} + \frac{12 \cdot 5{,}66}{2} = 40{,}88 \text{ cm}^2$

- Fila 6: Calculamos la altura del triángulo: $5^2 = h^2 + 2{,}5^2 \rightarrow h = 2{,}60$ cm.

  $A = \frac{5 \cdot 2{,}6}{2} + \frac{15 \cdot 6{,}54}{2} = 55{,}55 \text{ cm}^2$

79. **Si el área lateral de una pirámide recta de base cuadrada es 80 cm², y el perímetro de la base es 32 cm, ¿cuál es la medida de la apotema de la pirámide?**

Si el perímetro de su base es 32, su lado es 32 : 4 = 8 cm.

$A = 8^2 + \frac{32a}{2} = 80 \rightarrow a = 1$ cm

80. **Halla el área total de los siguientes cilindros.**

a) Radio de la base: 8 cm; altura: 14 cm

b) Longitud de la circunferencia que limita las bases: 37,7 cm; altura: 9 cm

c) Altura: 12 cm; área de una base: 78,54 cm²

a) $A = 2\pi \cdot 8 \cdot (14 + 8) = 1\,105{,}84$ cm²

b) Si la longitud de la circunferencia es 37,7 cm, quiere decir que $2\pi r = 37{,}7 \rightarrow r = 6{,}00$ cm.

$A = 2\pi \cdot 6 \cdot (9 + 6) = 565{,}49$ cm²

c) Necesitamos saber el radio para poder calcular el área lateral, lo obtenemos con el área de la base:

$\pi r^2 = 78{,}54 \rightarrow r = 5{,}00$ cm

$A = 2\pi \cdot 5 \cdot (12 + 5) = 537{,}07$ cm²

81. **Calcula el área total de los siguientes conos.**

a) Generatriz: 5 cm; radio de la base: 4 cm

b) Altura: 12 cm; radio de la base: 9 cm

c) Longitud de la circunferencia que limita la base: 44 cm; generatriz: 10 cm

a) $A = \pi \cdot 4 \cdot (5 + 4) = 113{,}10$ cm

b) Calculamos la generatriz: $g^2 = 12^2 + 9^2 \rightarrow g = 15$ cm. $A = \pi \cdot 9 \cdot (15 + 9) = 678{,}58$ cm

c) Calculamos el radio: $44 = 2\pi r \rightarrow r = 7{,}00$ cm. $A = \pi \cdot 7 \cdot (10 + 7) = 373{,}85$ cm

82. **Considera un cilindro de altura 20 cm y radio de la base 4 cm. ¿Qué altura tendrá un cono en cada uno de estos supuestos?**

a) Cono con la misma base que el cilindro.

b) Cono con una base de 8 cm de radio.

c) Cono con una base de área doble que la base del cilindro.

Calculamos el área del cilindro: $A = 2\pi \cdot 4\ (20 + 4) = 603{,}18$ cm².

a) $A = \pi \cdot 4 \cdot (g + 4) = 603{,}18$ cm $\rightarrow g = 44$ cm

La altura del cono será: $44^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow h = 43{,}82$ cm.

b) $A = \pi \cdot 8 \cdot (g + 4) = 603{,}18$ cm $\rightarrow g = 20$ cm

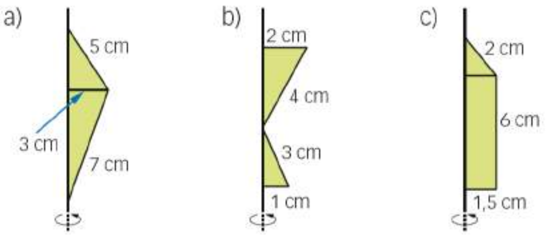
La altura del cono será: $20^2 = h^2 + 4^2 \rightarrow h = 19{,}60$ cm.

c) El área de la base es $\pi \cdot 4^2 = 50{,}27$ cm², el doble es 100,54 cm², lo que quiere decir que el radio de la base es $r^2 = 100{,}54 : \pi \rightarrow r = 5{,}66$ cm.

$A = \pi \cdot 5{,}66 \cdot (g + 5{,}66) = 603{,}18$ cm $\rightarrow g = 28{,}26$ cm

La altura del cono será: $28{,}26^2 = h^2 + 5{,}66^2 \rightarrow h = 27{,}69$ cm.

83. **Halla el área total de los cuerpos de revolución que se obtienen al girar las siguientes figuras planas alrededor del eje que se indica.**



a) Es la suma del área lateral de dos conos: $A = \pi \cdot 3 \cdot 5 + \pi \cdot 3 \cdot 7 = 113{,}10\ cm^2$.

b) Es la suma del área total de dos conos: $A = \pi \cdot 2 \cdot (4 + 2) + \pi \cdot 1 \cdot (3 + 1) = 50{,}27\ cm^2$.

c) Es la suma del área lateral de un cono y el área lateral de un cilindro más el área de una de sus bases:
$A = \pi \cdot 1{,}5 \cdot 2 + 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 6 + \pi \cdot 1{,}5^2 = 73{,}04\ cm^2$

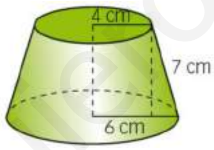
84. **Halla el área de estos cuerpos geométricos.**

a) Una esfera de 15 cm diámetro

b) Una esfera de 7,8 cm de radio

a) $A = 4\pi \cdot 7{,}5 = 94{,}25\ cm^2$ b) $A = 4\pi \cdot 7{,}8 = 98{,}02\ cm^2$

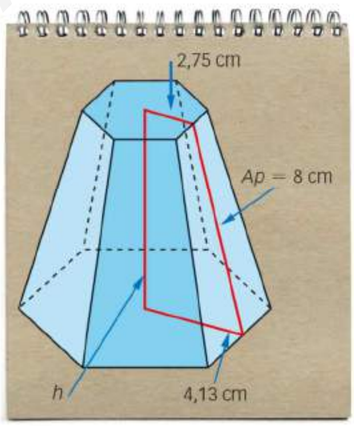
86. **Obtén la altura del tronco de cono que ves en la figura.**



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la generatriz del tronco de cono:

$7^2 = h^2 + (6 - 4)^2 \rightarrow h = 6{,}71$ cm

87. **Calcula la altura del tronco de pirámide hexagonal regular que dibuja María en su cuaderno.**



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la apotema:

$$8^2 = h^2 + (4{,}13 - 2{,}75)^2 \rightarrow h = 7{,}88 \text{ cm}$$

88. Calcula la altura de un tronco de pirámide cuadrangular de aristas básicas 5 y 3 cm, y apotema del tronco 2,9 cm y de un tronco de cono de radios 5 y 3 cm y generatriz 2,9 cm.

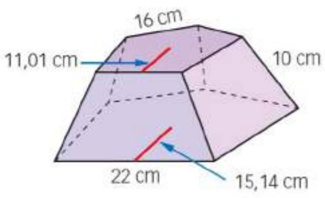
En el caso del tronco de pirámide, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la apotema:

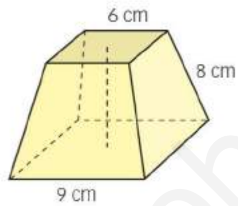
$$2{,}9^2 = h^2 + (5-3)^2 \rightarrow h = 2{,}1 \text{ cm}$$

En el caso del tronco de cono, aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma con la generatriz:

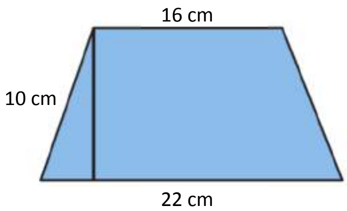
$$2{,}9^2 = h^2 + (5-3)^2 \rightarrow h = 2{,}1 \text{ cm}$$

90. Calcula el área total de estas figuras.





La primera figura es un tronco de pirámide pentagonal. De las caras laterales conocemos lo que miden las bases y lo que mide el lado oblicuo, necesitamos calcular lo que mide la altura. Para ello usamos el teorema de Pitágoras:



$$10^2 = h^2 + ((22-16):2)^2 \rightarrow h = 9{,}54 \text{ cm}$$

$$A_{\text{Lateral}} = 5 \cdot \frac{(22+16)\cdot 9{,}54}{2} = 906{,}3 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Base mayor}} = \frac{(22\cdot 5)\cdot 15{,}14}{2} = 832{,}7 \text{ cm}^2 \qquad A_{\text{Base mayor}} = \frac{(16\cdot 5)\cdot 11{,}01}{2} = 440{,}4 \text{ cm}^2$$

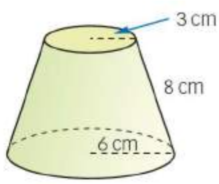
$A_{\text{Total}} = 906{,}3 + 832{,}7 + 440{,}4 = 2\,179{,}4 \text{ cm}^2$.

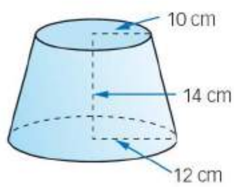
La segunda figura es un tronco de pirámide cuadrangular. De las caras laterales conocemos lo que miden las bases y lo que mide el lado oblicuo, necesitamos calcular lo que mide la altura. Para ello usamos el teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta el diagrama visto para la figura azul:

$$8^2 = h^2 + ((9-6):2)^2 \rightarrow h = 7{,}86 \text{ cm} \qquad A_{\text{Lateral}} = 4 \cdot \frac{(9+6)\cdot 7{,}86}{2} = 235{,}8 \text{ cm}^2$$

$A_{\text{Base mayor}} = 9^2 = 81 \text{ cm}^2$ $\quad A_{\text{Base menor}} = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$ $\quad A_{\text{Total}} = 235{,}8 + 81 + 36 = 352{,}8 \text{ cm}^2$.

91. Calcula el área total de estas figuras.





El área lateral de un tronco de cono viene dada por $A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot g$ (es el área de la sección de un corona circular).

Para el primer tronco de cono:

$$A_T = \pi \cdot (6 + 3) \cdot 8 + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 3^2 = 367{,}57 \text{ cm}^2$$

Para el segundo tronco de cono:

Tenemos que calcular la generatriz usando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 14^2 + (12 - 10)^2 \rightarrow g = 14{,}14$ cm

$$A_T = \pi \cdot (12 + 10) \cdot 14{,}14 + \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 10^2 = 1\,743{,}84 \text{ cm}^2$$

92. Sabiendo que el círculo máximo de una esfera tiene un área de 201,06 cm², calcula.

a) Su radio.

b) Su área total.

c) El área de un huso esférico de 40°.

d) El área de un casquete esférico de 3 cm de altura.

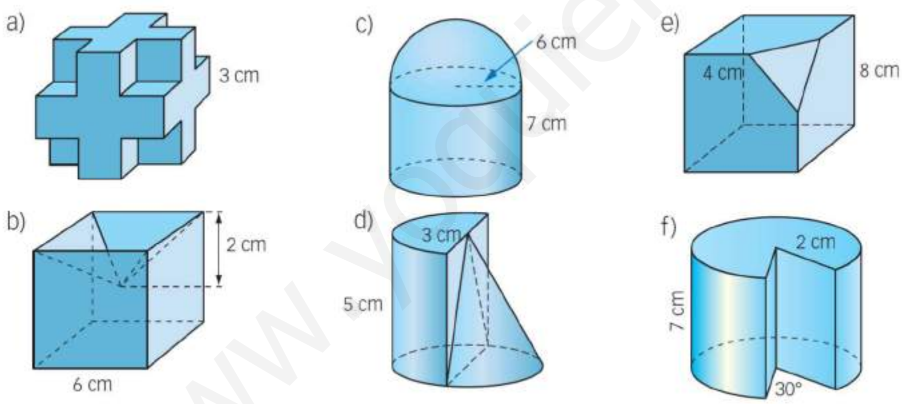
a) El círculo máximo nos da el radio de la circunferencia: $\pi r^2 = 201{,}06 \rightarrow r = 8$ cm.

b) $A = 4\pi \cdot 8^2 = 804{,}25$ cm²

c) $A_{\text{huso}} = \dfrac{4\pi \cdot 8 \cdot 40}{360} = 11{,}17$ cm²

d) $A_{\text{casquete}} = 2\pi \cdot 8 \cdot 3 = 150{,}80$ cm²

93. Obtén el área total de los siguientes cuerpos geométricos.



a) En la figura tenemos 6 cruces compuestas por 5 cuadrados de lado 3 cm y en cada hueco, que hay 8 huecos, hay 3 cuadrados de lado 3 cm, de modo que al área total será el área de $(5 \cdot 4) + (8 \cdot 3) = 20 + 24 = 44$ cuadrados.

Esto es $A = 44 \cdot 3^2 = 396$ cm².

b) Tenemos el área de 5 cuadrados de lado 6 más 4 triángulos de base 6 y de los que necesitamos calcular la altura (que sería la apotema de la pirámide invertida que se mete en el cubo).

Para calcular la altura de los triángulos usamos el teorema de Pitágoras: $h^2 = 3^2 + 2^2 \rightarrow h = 3{,}60$ cm.

De modo que el área total es $A = 5 \cdot 6^2 + 4 \cdot \dfrac{6 \cdot 3{,}6}{2} = 223{,}2$ cm².

c) Es el área de un cilindro de altura 7 cm y radio 6 cm, con solo una base más el área de una semiesfera de radio 6 cm.

$A = 2\pi \cdot 6 \cdot 7 + \pi \cdot 6^2 + 2\pi \cdot 6^2 = 603{,}19$ cm²

d) Es el área de medio cilindro de altura 5 cm y radio 1,5 cm, más el área de medio cono de altura 5 cm y radio 1,5 cm más el área de dos triángulos rectángulos de base 1,5 cm y altura 5 cm.

Calculamos primero la generatriz del cono para poder calcular su área: $g^2 = 5^2 + 1{,}5^5 \rightarrow g = 5{,}22$ cm.

$$A = \pi \cdot 1{,}5 \cdot (1{,}5 + 5) + \frac{1}{2}\pi \cdot 1{,}5 \cdot (1{,}5 + 5{,}22) + 2 \cdot \frac{1{,}5 \cdot 5}{2} = 30{,}63 + 15{,}83 + 7{,}5 = 53{,}96 \text{ cm}^2$$

e) Es el área de 6 cuadrados de lado 8 cm, en 3 de esos cuadrados restamos el área de un triángulo rectángulo de base 4 cm y altura 4 cm y añadimos al área total de la figura el área de un triángulo equilátero de lado 4 cm.

Calculamos primero la altura del triángulo equilátero: $4^2 = h^2 + 2^2 \rightarrow h = 3{,}46$ cm.

$$A = 6 \cdot 8^2 - 3 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 3{,}46}{2} = 384 - 24 + 6{,}92 = 366{,}92 \text{ cm}^2$$

f) Es el área de dos sectores circulares de radio 2 cm y ángulo 330º, más el área de dos rectángulos de base 2 cm y altura 7 cm más el área de un rectángulo de altura 7 cm y base la longitud de un arco de radio 2 cm y ángulo 330º.

$$A = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{330}{360} + 2 \cdot 2 \cdot 7 + 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{330}{360} \cdot 7 = 23{,}04 + 28 + 80{,}64 = 131{,}68 \text{ cm}^2$$

94. Calcula el volumen de un prisma triangular regular de 7 cm de altura y 3 cm de arista básica.

Calculamos la altura del triángulo de la base usando el teorema de Pitágoras: $3^2 = h^2 + 1{,}5^2 \rightarrow h = 2{,}60$ cm

$$V = \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} \cdot 7 = 27{,}3 \text{ cm}^3$$

95. Halla el volumen de un ortoedro cuyas aristas miden 4, 6 y 12 cm.

$$V = 4 \cdot 6 \cdot 12 = 288 \text{ cm}^3$$

96. Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular de 8 cm de altura y 4 cm de arista básica.

Calculamos la apotema de la base: $4^2 = ap^2 + 2^2 \rightarrow ap = 3{,}46$ cm.

$$V = \frac{(6 \cdot 4)3{,}46}{2} \cdot 8 = 332{,}16 \text{ cm}^3$$

97. Calcula el volumen de estas pirámides regulares de base triangular:

a) Arista lateral: 8 cm; arista básica: 7 cm.

b) Apotema de la pirámide: 6,54 cm; arista básica: 5 cm.

a) Calculamos la altura de la base: $7^2 = h^2 + 3{,}5^2 \rightarrow h = 6{,}06$ cm.

Calculamos la apotema de la pirámide: $8^2 = ap^2 + 3{,}5^2 \rightarrow ap = 7{,}19$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide: $7{,}19^2 = 3{,}5^2 + h^2 \rightarrow h = 6{,}28$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 6{,}06}{2} \cdot 6{,}28 = 44{,}40 \text{ cm}^3$$

b) Calculamos la altura de la base: $5^2 = h^2 + 2{,}5^2 \rightarrow h = 4{,}33$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide: $6{,}54^2 = 2{,}5^2 + h^2 \rightarrow h = 6{,}04$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} \cdot 6{,}04 = 21{,}79 \text{ cm}^3$$

98. **Un tetraedro regular es una pirámide de base triangular donde todas sus caras son iguales. Calcula el volumen de esta pirámide si su superficie total es de 40 m³.**

Esto quiere decir que el área de cada cara es de 10 m², que sería el área de la base.

Ahora necesitamos calcular la altura de la pirámide para calcular el volumen, para ello calculamos la altura de los triángulos, que es la apotema de la pirámide, que viene dada por $l^2 = ap^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}}{2}l$.

Como el área es 10 m², tenemos que $10 = \dfrac{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l}{2} \rightarrow l = 4{,}80$ m.

De modo que $ap = 4{,}15$ m. La altura de la pirámide viene dada por $4{,}15^2 = h^2 + 2{,}4^2 \rightarrow h = 3{,}39$ m.

$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3{,}39 = 33{,}9 \text{ m}^2$

99. **Obtén el volumen de estas pirámides hexagonales regulares.**

a) Apotema: 8 cm; arista básica: 5 cm.

b) Arista lateral: 6 cm; arista básica: 3 cm.

a) Calculamos la apotema de la base y luego la altura de la pirámide usando el teorema de Pitágoras:

$5^2 = ap^2 + 2{,}5^2 \rightarrow ap = 4{,}33$ cm

$8^2 = h^2 + 4{,}33^2 \rightarrow h = 6{,}73$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(6 \cdot 5) \cdot 4{,}33}{2} \cdot 6{,}73 = 145{,}70 \text{ cm}^3$

b) Calculamos la apotema de la base y luego la altura de la pirámide usando el teorema de Pitágoras:

$3^2 = ap^2 + 1{,}5^2 \rightarrow ap = 2{,}60$ cm

$6^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow h = 5{,}20$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(6 \cdot 3) \cdot 2{,}60}{2} \cdot 5{,}20 = 40{,}56 \text{ cm}^3$

100. **Halla el volumen de los siguientes cilindros.**

a) Radio de la base: 4 cm; altura: 10 cm.

b) Longitud de la circunferencia que limita las bases: 37,7 cm; altura: 12 cm.

a) $V = \pi \cdot 4^2 \cdot 10 = 502{,}65 \text{ cm}^3$

b) Calculamos el radio de la circunferencia: $2\pi r = 37{,}7 \rightarrow r = 6{,}00$ cm.

$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1\,357{,}17 \text{ cm}^3$

101. **Halla el volumen de los siguientes conos.**

a) Generatriz: 8 cm; radio de la base: 5 cm.

b) Altura: 18 cm; radio de la base: 8 cm.

c) Longitud de la circunferencia que limita la base: 44 cm; generatriz: 11 cm.

a) Calculamos la altura del cono: $8^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = 6{,}24$ cm.

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 6{,}24 = 163{,}36 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot 18 = 1\,206{,}37 \text{ cm}^3$

c) Calculamos el radio de la circunferencia: $44 = 2\pi r \rightarrow r = 7{,}00$ cm.

Calculamos la altura: $11^2 = h^2 + 7^2 \rightarrow h = 8{,}49$ cm.

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 7^2 \cdot 8{,}49 = 435{,}64 \text{ cm}^3$

102. Halla el volumen de un cubo sabiendo que:

a) La diagonal de una de sus caras mide 9,9 cm.

b) La diagonal del cubo mide 8,66 cm.

a) Calculamos el lado: $9{,}9^2 = l^2 + l^2 \rightarrow l = 7{,}00$ cm. $\rightarrow V = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$

b) La diagonal del cubo viene dada por $D^2 = d^2 + l^2$. Y podemos expresar d en función de l como $d = \sqrt{2}\, l$, de modo que: $D^2 = 2l^2 + l^2$. Así $8{,}66^2 = 3l^2 \rightarrow l = 5{,}00$ cm $\rightarrow V = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$

103. Halla el volumen de un tetraedro que tiene la característica indicada.

a) Su arista es 8 cm.

b) La apotema es 8 cm.

a) Calculamos la altura de la base, que es igual a la apotema de la pirámide: $8^2 = ap^2 + 4^2 \rightarrow ap = 6{,}93$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide: $6{,}93^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot 6{,}93\right)^2 \rightarrow h = 6{,}53$ cm.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} \cdot 6{,}53 = 60{,}34 \text{ cm}^3$

b) Calculamos su arista: $a^2 = 8^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow a = 9{,}24$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide: $8^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot 8\right)^2 \rightarrow h = 7{,}85$ cm.

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9{,}24 \cdot 8}{2} \cdot 7{,}85 = 96{,}71 \text{ cm}^3$

104. Calcula el volumen de las siguientes esferas.

a) Esfera de radio 6 cm.

b) Esfera de diámetro 20 cm.

c) Esfera cuyo círculo máximo contiene un área de 78,54 cm².

a) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 904{,}78 \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = 4\,188{,}79 \text{ cm}^3$

c) Calculamos el área: $78{,}54 = \pi \cdot r^2 \rightarrow r = 5{,}00$ cm. $\rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 523{,}60 \text{ cm}^3$

105. **El área de una esfera es 452,39 cm². Halla el volumen de estos cuerpos y responde cuál es el mayor de ellos.**

a) El cilindro en el que estaría contenida ajustándose completamente a él.

b) El cubo que la circunscribe.

a) La altura del cilindro se correspondería con el diámetro de la esfera y el radio de la base con el radio de la esfera.

Calculamos el radio de la esfera, ya que conocemos su área: $452{,}39 = 4\pi r^2 \rightarrow r = 35{,}97$ cm $\rightarrow$ $d = 2 \cdot 35{,}97 = 71{,}94$ cm

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 35{,}97^2 \cdot 71{,}94 = 292\,416{,}03 \text{ cm}^3$$

b) El cubo tiene un lado igual al diámetro de la esfera, de modo que el volumen del cubo es:

$$V = 71{,}94^3 = 372\,315{,}66 \text{ cm}^3$$

106. **Sabiendo que un cubo y una esfera tienen igual área, 96 cm², ¿cuál de los dos tiene mayor volumen?**

Veamos cuál es el radio de la esfera: $96 = 4\pi r^2 \rightarrow r = 2{,}76$ cm.

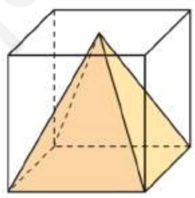
Por lo tanto, el volumen de la esfera será: $V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2{,}76^3 = 88{,}07$ cm³.

Veamos cuál es el lado del cubo: $96 = 6 \cdot l^2 \rightarrow l = 4$ cm.

Por lo tanto, el volumen del cubo será: $V_{\text{Cubo}} = 4^3 = 64$ cm³.

Es mayor el volumen de la esfera.

107. **En el interior de un cubo de 12 cm de arista construimos una pirámide cuya base es una cara del cubo y el vértice es el centro de la cara opuesta. Calcula el área y el volumen de esta pirámide.**



La altura de la pirámide es igual al lado del cubo. El área de la base es el área de un cuadrado de 12 cm de lado, de modo que el volumen es:

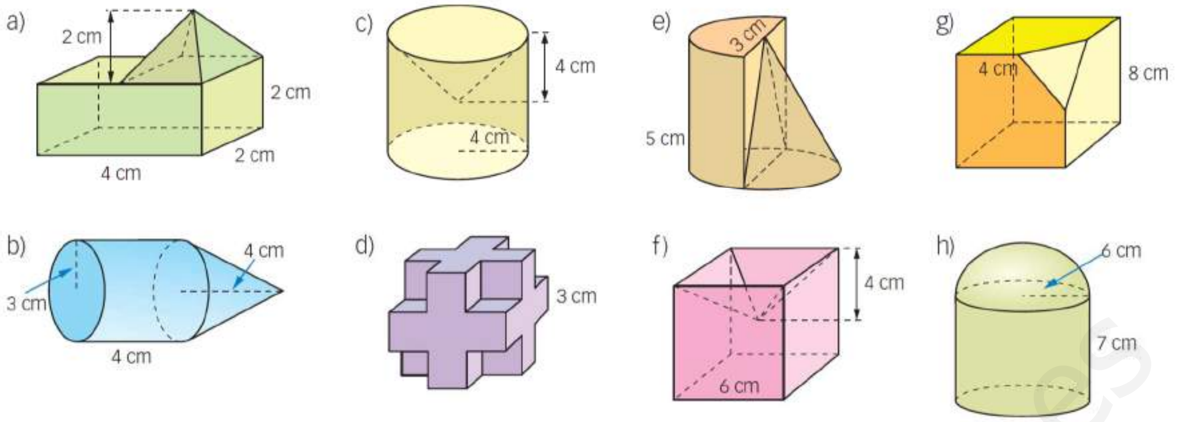
$$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 12 = 576 \text{ cm}^3$$

Para calcular el área necesitamos saber la apotema de la pirámide, que calculamos usando el teorema de Pitágoras:

$ap^2 = 12^2 + 6^2 \rightarrow ap = 13{,}42$ cm.

$$A = 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot 13{,}42}{2} = 466{,}08 \text{ cm}^2$$

108. **Obtén el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.**



a) Es el volumen de un ortoedro de aristas 4 cm, 2 cm y 2 cm. Y una pirámide de base un cuadrado de lado 2 cm y altura 2 cm.

$$V = 4 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 = 18{,}67 \text{ cm}^3$$

b) Es el volumen de un cilindro de radio de la base 3 cm y altura 4 cm, más un cono de radio de la base 3 cm y altura 4 cm.

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 150{,}80 \text{ cm}^3$$

c) Es el volumen de un cilindro de radio de la base 4 cm y altura 8 cm, menos un cono de radio de la base 4 cm y altura 4 cm.

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = 335{,}10 \text{ cm}^3$$

d) Es el volumen de un cubo de arista 9 cm, menos el volumen de 8 cubos de arista 3 cm.

$$V = 9^3 - 8 \cdot 3^3 = 513 \text{ cm}^3$$

e) Es el volumen de medio cilindro de radio de la base 1,5 cm y altura 5 cm, más el volumen de medio cono de radio de la base 1,5 cm y altura 5 cm.

$$V = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 23{,}56 \text{ cm}^3$$

f) Es el volumen de un cubo de arista 6 cm, menos el de una pirámide de base un cuadrado de lado 6 cm y altura 4 cm.

$$V = 6^3 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 = 168 \text{ cm}^3$$

g) Es el volumen de un cubo de arista 8 cm, menos el volumen de un tetraedro de arista 4 cm.

Calculamos la altura de uno de las caras del tetraedro, que también es la apotema de la pirámide:

$$4^2 = ap^2 + 2^2 \to ap = 3{,}46 \text{ cm}$$

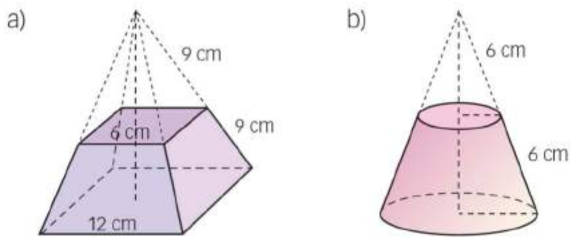
Calculamos ahora la altura de la pirámide: $3{,}46^2 = h^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 3{,}46\right)^2 \to h = 3{,}26$ cm.

$$V = 8^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3{,}46}{2} \cdot 3{,}26 = 504{,}48 \text{ cm}^3$$

h) Es el volumen de un cilindro de radio de la base 6 cm y altura 7 cm, más el de una semiesfera de radio 6 cm.

$$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 1\,244{,}07 \text{ cm}^3$$

109. **Calcula el volumen de estas figuras.**



a) Es el volumen de una pirámide de base un cuadrado de lado 12 cm y altura H, menos el volumen de una pirámide de base un cuadrado de lado 6 cm y altura h.

Calculamos la apotema de la pirámide mayor: $18^2 = ap^2 + 6^2 \to ap = 16{,}97$ cm.

Calculamos la apotema de la pirámide menor: $9^2 = ap'^2 + 3^2 \to ap' = 8{,}48$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide mayor: $16{,}97^2 = H^2 + 6^2 \to H = 15{,}87$ cm.

Calculamos la altura de la pirámide menor: $8{,}48^2 = h^2 + 3^2 \to h = 7{,}93$ cm.

$$V = 12^2 \cdot 15{,}87 - 6^2 \cdot 7{,}93 = 1\,999{,}8 \text{ cm}^3$$

b) Es el volumen de un cono de radio de la base 4 cm y altura H, menos el volumen de un cono de radio de la base 2 cm y altura h.

Calculamos la altura del cono mayor: $12^2 = H^2 + 4^2 \to H = 11{,}31$ cm.

Calculamos la altura del cono menor: $6^2 = h^2 + 2^2 \to h = 5{,}66$ cm.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 11{,}31 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 5{,}66 = 165{,}79 \text{ cm}^3$$

110. **Las coordenadas terrestres, longitud y latitud, se expresan en grados.**

a) ¿Cuáles son los límites de estos valores?

b) ¿Dónde está situado el origen?

a) La longitud varía entre 0º y 180º y la latitud entre 0º y 90º.

b) Para la longitud en el meridiano de Greenwich y para la latitud en el ecuador.

111. **Observa un mapa y calcula los valores máximo y mínimo de la longitud y la latitud de tu provincia y tu Comunidad Autónoma.**

Como se trata de calcular, habría que ver un mapa de la comunidad o provincia y ver qué líneas meridianas y paralelas la acotan.

Si lo hiciésemos para la Península, se ve que se encuentra entre los meridianos 10º O y 5º E y entre los paralelos 35º N y 45º N. Si se tiene un mapa más preciso, se pueden acotar más las medidas.

112. **El radio de la Tierra mide, aproximadamente, 6 371 kilómetros. Calcula el área de su superficie y el volumen de la Tierra.**

Si consideramos la Tierra como una esfera. Su área sería $A = 4\pi \cdot 6\,371^2 = 510\,064\,471{,}91 \text{ cm}^2 = 5{,}1 \cdot 10^8 \text{ km}^2$. Y su volumen: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6\,371^3 = 1{,}08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$.

113. Responde razonadamente.

a) ¿Cuánto mide aproximadamente un meridiano?

b) ¿Cuántos grados abarca cada huso horario?

c) ¿Cuál es el área de un huso horario?

d) ¿Hay un meridiano que pasa por cada punto de la Tierra?

a) $2\pi \cdot 6\,371 = 40\,030{,}17$ km.

b) 15º

c) $A = \frac{4 \cdot \pi \cdot 6\,371^2 \cdot 15}{360} = 2{,}13 \cdot 10^7\ \text{km}^2$

d) Sí, el que indica su longitud.

114. Si Moscú está a 37° 36′ E, ¿qué diferencia horaria tiene con Venecia, que está a 12° 20′ E?

La longitud de Moscú es 37º 36’ = 37,6º E, y la de Venecia 12º 20’ = 12,33º E, la diferencia de longitud entre las ciudades es 37,6 – 12,33 = 25,27º.

De modo que la diferencia horaria es 25,27 : 15 = 1,68 = 1 h 41 min 4,8 s.

115. Halla la diferencia horaria que hay entre Madrid y Nueva York sabiendo que las coordenadas de ambas ciudades son:

Madrid: 40° 18′ N, 3° 43′ O
Nueva York: 40° 45′ N, 74°O

Vemos cuál es la diferencia horaria entre sus longitudes 74º – 3º 43’ = 74 – 3,72 = 70,28.

De modo que la diferencia horaria es 70,28 : 15 = 4,69 h = 4 h 41 min 24 s.

116. La longitud de Viena es de 16° 20′ E.

a) Cuando en Viena son las 3 de la tarde, ¿qué hora es en una ciudad 40° al oeste?

b) ¿Y en una ciudad 70° al este?

c) ¿Qué longitud tiene una ciudad en la que amanece 3 horas después que en Viena?

d) ¿Y si amanece 3 horas antes?

a) La diferencia de longitud con una ciudad 40º al oeste es de 56º 20’ = 56,33º, de modo que la diferencia horaria es 56,33 : 15 = 3,76 h = 3 h 45 min 36 s.

Como nos desplazamos al oeste, restamos la diferencia horaria, de modo que en la ciudad serán las 15 – 3 h 45 min 36 s = 11 h 14 min 24 s, es decir, aproximadamente las 11 y cuarto de la mañana.

b) La diferencia de longitud con una ciudad 70º al este es de 53,67º, de modo que la diferencia horaria es 53,67 : 15 = 3,58 h = 3 h 34 min 48 s.

Como nos desplazamos al este, aumentamos la diferencia horaria, de modo que en la ciudad serán aproximadamente las 6 y media de la tarde.

c) Si amanece tres horas después, quiere decir que está al oeste de Viena. Si la diferencia son 3 horas, quiere decir que la diferencia de longitud es 3 · 15 = 45º al oeste de Viena.

Como Viena está al este, si x es la longitud de la ciudad: x + 16º 20’ = 45º → x = 28º 40’ O.

d) Si amanece tres horas antes, quiere decir que está al este de Viena. Si la diferencia son 3 horas, quiere decir que la diferencia de longitud es 3 · 15 = 45º al este de Viena.

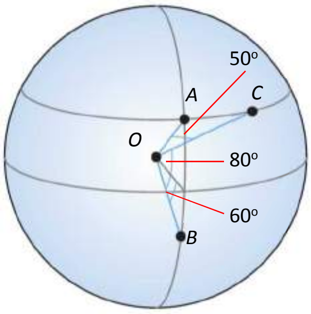
Como Viena está al este, si x es la longitud de la ciudad: x – 16º 20’ = 45º → x = 71º 20’ E.

117. **Considera tres ciudades, *A*, *B* y *C*: *A* y *B* se encuentran en el mismo meridiano pero distintos hemisferios y sus latitudes se diferencian en 80°; *C* se encuentra en el hemisferio norte en el mismo paralelo que *A* y distanciada de esta 50°. Dibuja una esfera y sitúa estas tres ciudades sabiendo que la latitud de *B* es 60° S.**

a) ¿Puedes deducir las coordenadas de las tres ciudades?

b) Encuentra las posibles coordenadas de *A*, *B* y *C* sabiendo que *C* está en un meridiano que se distancia 65° del meridiano cero.

c) ¿Qué falta para determinar definitivamente las coordenadas de esas ciudades?



a) Como las latitudes de *A* y *B* difieren 80º, al ser la de *B* 60º S y saber que *A* está en el hemisferio norte, entonces la latitud de *A* es 20º N. Al estar *C* en el mismo paralelo que *A*, la latitud de *C* es 20º N, pero no podemos calcular las longitudes.

b) Si *C* dista 65º del meridiano cero, su longitud puede ser 65º E o 65º O. Sabemos que *A* dista 50º de *C*, de modo que su longitud (y por tanto también la de *B* ya que están en el mismo meridiano) puede ser alguna de las siguientes:

115º E 15º E 115º O 15º O.

c) Es necesario conocer si *C* está el este o al oeste del meridiano cero y si *A* está al este o al oeste de *C*.

118. **¿Cuál es la longitud del paralelo situado a 45° N de latitud? ¿Y el situado a 45° S?**

Puede ser cualquier longitud, lo único que nos dice ese dato es la distancia que hay al ecuador, pero nada con respecto a la distancia con respecto al meridiano cero.

119. **En cierta fábrica de conservas alimenticias utilizan latas con forma cilíndrica. Su proveedor le ofrece estas posibilidades, siendo 0,02 €/cm² el precio del material con que se elaboran las latas.**

Tipo de lata	Radio de la base	Altura
A	12	3
B	10	5
C	6	12

¿Qué tipo de lata se debe emplear para envasar la máxima cantidad posible con el menor precio?

$A_{\text{Lata } A} = 2\pi \cdot 12\ (12 + 3) = 1\,130{,}97\ \text{cm}^2 \rightarrow \text{Precio} = 1\,130{,}97 \cdot 0{,}02 = 22{,}62\ €$

$V = \pi \cdot 12^2 \cdot 3 = 1\,357{,}17\ \text{cm}^3$

Precio de 1 $\text{cm}^3 = 22{,}62 : 1\,357{,}17 = 0{,}016667$ €/cm^3

$A_{\text{Lata } B} = 2\pi \cdot 10\ (10 + 5) = 942{,}48\ \text{cm}^2 \rightarrow \text{Precio} = 942{,}48 \cdot 0{,}02 = 18{,}85\ €$

$V = \pi \cdot 10^2 \cdot 5 = 1\,570{,}80\ \text{cm}^3$

Precio de 1 $\text{cm}^3 = 18{,}85 : 1\,570{,}80 = 0{,}01200$ €/cm^3

$A_{\text{Lata } C} = 2\pi \cdot 6\ (6 + 12) = 678{,}58\ \text{cm}^2 \rightarrow \text{Precio} = 678{,}58 \cdot 0{,}02 = 13{,}57\ €$

$V = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1\,357{,}17\ \text{cm}^3$

Precio de 1 $\text{cm}^3 = 13{,}57 : 1\,357{,}17 = 0{,}009999$ €/cm^3

Lo más rentable es hacer latas de tipo *C*.

120. Averigua si los siguientes listones de madera caben en una caja de 40 cm de largo, 25 cm de ancho y 18 cm de alto.

a) 46,5 cm b) 50,3 cm c) 50,6 cm d) 51 cm

¿Cuáles se pueden apoyar en el fondo de la caja?

La mayor longitud de la caja es su diagonal, de modo que cabrán todos los listones que midan menos. Calculamos la diagonal de la base para poder calcular la de la caja:

$d^2 = 40^2 + 25^2 \rightarrow d = 47{,}17$ cm

(En la base de la caja se puede poner el listón de 46,5 cm, de modo que ese cabe en la caja)

Calculamos ahora la diagonal de la caja:

$D^2 = 47{,}17^2 + 18^2 \rightarrow D = 50{,}49$ cm

De modo que cabe el listón de 50,3 cm, pero los de 50,6 cm y 51 cm no caben en la caja.

121. La habitación de Ramón tiene forma de ortoedro de dimensiones 3,5 m de ancho, 4,2 m de largo y 2,5 m de altura. Decide pintar las paredes y el techo. Tiene una ventana cuadrada de 1,2 m de lado y la puerta mide 90 cm de ancho y 2,1 m de altura. Si con cada bote de pintura puede cubrir una superficie de 20 m², ¿cuántos botes necesitará?

Calculamos el área de la habitación (excluyendo el suelo, es decir, una de las bases del ortoedro) y le restamos el área de la ventana y de la puerta.

$A_{\text{ortoedro}} = 3{,}5 \cdot 4{,}2 + (3{,}5 \cdot 2 + 4{,}2 \cdot 2) \cdot 2{,}5 = 53{,}2\ \text{m}^2$

$A_{\text{ventana}} = 1{,}2^2 = 1{,}44\ \text{m}^2$ $\qquad A_{\text{puerta}} = 0{,}9 \cdot 2{,}1 = 1{,}89\ \text{m}^2$

$A_{\text{pintar}} = 53{,}2 - 1{,}44 - 1{,}89 = 49{,}87\ \text{m}^2$

Necesitará 3 botes, porque con dos botes, cubriría 40 m^2 que no es suficiente. Con tres botes podría pintar 60 m^2, de modo que le sobrará pintura.

122. Un arquitecto diseña dos torres: una cúbica de 6 m de arista con un tejado en forma piramidal y altura total 7,42 m, y otra cilíndrica de base 24,63 m² y altura total 7 cm con tejado cónico, siendo la generatriz del cono cuatro veces el radio de la base. Si el coste de cada metro cuadrado de fachada es 205,60 €, ¿qué torre saldrá más cara?

Necesitamos en cada caso calcular el área lateral de las figuras.

En el caso de la pirámide, necesitamos saber la altura de cada uno de los lados, es decir, la apotema, que podemos calcularla ya que conocemos la altura total de la torre: $ap^2 = 1{,}62^2 + 3^2 \rightarrow ap = 3{,}41$ m

$A_{\text{Torre cúbica}} = (4 \cdot 6) \cdot 6 + 4 \cdot \frac{6 \cdot 3{,}41}{2} = 184{,}92 \text{ m}^2$

Calculamos el radio del cilindro: $\pi r^2 = 24{,}63 \rightarrow r = 2{,}8$ m.

La generatriz del cono será: $4 \cdot 2{,}8 = 11{,}2$ m.

$A_{\text{Torre cilíndtrica}} = 2\pi \cdot 2{,}8 \cdot 7 + \pi \cdot 2{,}8 \cdot 11{,}2 = 221{,}67 \text{ m}^2$

Saldrá más cara la torre de base cilíndrica, pues tiene más metros cuadrados de fachada.

123. El rodillo de amasar de Laura tiene un radio de 1,8 cm y 24 cm de largo.

a) ¿Qué área cubre en cada vuelta?

b) ¿Cuántas vueltas tiene que dar el rodillo para amasar una pieza circular de radio 9,5 cm?

c) ¿Cuántas vueltas ha dado Laura al rodillo si la superficie cubierta ha sido 5 428,6 cm²?

a) El área que cubre en cada vuelta, es el área lateral del cilindro: $A = 2\pi \cdot 1{,}8 \cdot 24 = 271{,}43 \text{ cm}^2$.

b) El área de la pieza es $\pi \cdot 9{,}5^2 = 283{,}53 \text{ cm}^2$.

Si hubiese algún modo de optimizar la vuelta del rodillo, de modo que el área no cubierta en la primera vuelta quedase totalmente cubierta en la segunda vuelta y que con una vuelta ya quedase amasado, pues serían necesarias dos vueltas de rodillo.

c) $5\,428{,}6 : 271{,}43 = 20$ vueltas

124. David quiere meter en el ascensor un tubo metálico de 2,88 m. Las medidas del ascensor son 1 × 1 × 2,5 cm. ¿Podrá hacerlo?

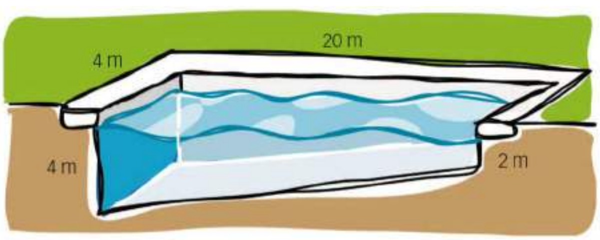
Calculamos la diagonal del ascensor.

La diagonal de la base del ascensor es $d^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow d = \sqrt{2}$ m.

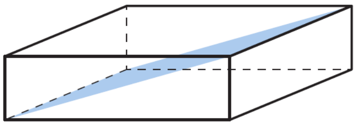
La diagonal del ascensor es $D^2 = (\sqrt{2})^2 + 2{,}5^2 \rightarrow D = 2{,}87$ m.

No podrá meter el tubo en el ascensor, porque la máxima longitud en este es de 2,87 m.

125. Halla el volumen de esta piscina.



Tenemos dos partes, la que llega hasta los dos metros, que es el volumen de un ortoedro de lados 4 m, 20 m y 2 m y la otra parte sería la mitad de un ortoedro igual al primero, ya que se trata de un ortoedro partido por un plano de este modo:



Es decir, el volumen es $\frac{3}{2}$ del volumen de un ortoedro de dimensiones 4 × 20 × 2.

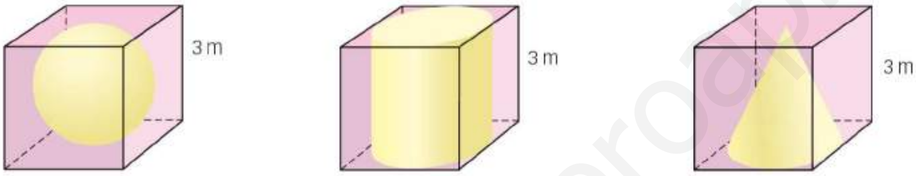
$V = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 20 \cdot 2 = 240 \text{ m}^3$

126. En un depósito cúbico lleno de agua y de arista 3 m, introducimos los siguientes cuerpos.

a) ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial de agua hay en el cubo después de introducir una esfera de radio 1,5 m?

b) ¿Qué porcentaje queda de la cantidad inicial de agua si introducimos un cilindro de diámetro y altura 3 m?

c) ¿Y cuál es el porcentaje si introducimos un cono de 3 m de diámetro e igual altura?



$V_{\text{inicial}} = 3^3 = 27 \text{ m}^3$

a) $V_{\text{queda}} = 3^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3 = 12{,}86 \text{ m}^3 \rightarrow$ El porcentaje que queda es $\frac{12{,}86}{27} \cdot 100 = 47{,}63\,\%$.

b) $V_{\text{queda}} = 3^3 - \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 3 = 5{,}79 \text{ m}^3 \rightarrow$ El porcentaje que queda es $\frac{5{,}79}{27} \cdot 100 = 21{,}44\,\%$.

c) $V_{\text{queda}} = 3^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 3 = 19{,}93 \text{ m}^3 \rightarrow$ El porcentaje que queda es $\frac{19{,}93}{27} \cdot 100 = 73{,}81\,\%$.

DEBES SABER HACER

1. Calcula el número de caras de estos poliedros.

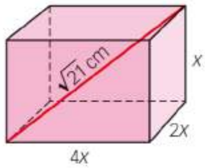
a) Tiene 16 vértices y 24 aristas.

b) Tiene 6 vértices y 12 aristas.

a) Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá $16 + C = 2 + 24 \rightarrow C = 10$ caras.

b) Si es convexo verifica la fórmula de Euler, de modo que tendrá $6 + C = 2 + 12 \rightarrow C = 8$ caras.

2. **El largo de un ortoedro es el doble que el ancho, y el ancho es el doble que la altura. Si su diagonal vale $\sqrt{21}$ cm, halla el área total.**



La diagonal de la base es $d^2 = (4x)^2 + (2x)^2 \to d = x\sqrt{20}$.

La diagonal del ortoedro es $D^2 = (\sqrt{21})^2 = x^2 + (x\sqrt{20})^2 \to 21 = 21x^2 \to x = 1$.

El área total es $2 \cdot (4 \cdot 2) + (4 \cdot 2 + 2 \cdot 2) \cdot 1 = 28$ cm^2.

3. **Halla el área total de un prisma hexagonal regular de 25 cm de altura y 12 cm de arista básica.**

Calculamos la apotema de la base (por ser un hexágono regular el radio de la base es igual al lado):

$12^2 = ap^2 + 6^2 \to ap = 10{,}39$ cm

$A = 2 \cdot \frac{(6\cdot 12)\cdot 10{,}39}{2} + (6 \cdot 12) \cdot 25 = 2\,548{,}08$ cm^2.

4. **Calcula el área de una pirámide cuadrangular regular de arista básica 6 cm y apotema 8 cm.**

$A = 6^2 + 4 \cdot \frac{6\cdot 8}{2} = 132$ cm^2

5. **¿Qué altura tiene un cilindro de área lateral 75,36 cm^2 y radio de la base 4 cm?**

El área lateral del cilindro viene dada por $2\pi r \cdot h = 75{,}36$ cm^2, como $r = 4$ cm, tenemos que $h = 3$ cm.

6. **Halla el área del cono que se obtiene al girar el triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 13 cm.**

Calculamos la generatriz del cono, que es la diagonal del triángulo: $g^2 = 13^2 + 6^2 \to g = 14{,}32$ cm.

Suponemos que lo hacemos girar sobre el cateto de 13 cm.

$A = \pi \cdot 6^2 \cdot (6 + 14{,}32) = 2\,298{,}14$ cm^2

Suponemos que lo hacemos girar sobre el cateto de 6 cm.

$A = \pi \cdot 13^2 \cdot (13 + 14{,}32) = 14\,504{,}98$ cm^2

7. **Calcula el volumen de un cubo sabiendo que una de sus caras tiene un área de 70,56 cm^2.**

Calculamos la arista del cubo: $70{,}56 = l^2 \to l = 8{,}4$ cm.

$V = 8{,}4^3 = 592{,}704$ cm^3

8. **Calcula el volumen de un cilindro sabiendo que la base tiene un perímetro de 42,73 cm y la altura es el doble del radio de la base.**

Calculamos el radio de la base: $42{,}73 = 2\pi r \to r = 6{,}8$ cm.

$h = 6{,}8 \cdot 2 = 13{,}6$ cm $\to V = \pi \cdot 6{,}8^2 \cdot 13{,}6 = 1\,975{,}63$ cm^3

9. **¿Qué longitud y latitud separan los puntos *A*, *B* y *C*? ¿Cuál es la diferencia horaria entre ellos?**

A (14° E, 55° N) B (37° O, 46° S) C (118° E, 72° S)

Diferencia de latitud entre A y B: 101º

Diferencia de latitud entre A y C: 127º

Diferencia de latitud entre B y C: 26º

Diferencia de longitud entre A y B: 51º

Diferencia horaria entre A y B: 51 : 15 = 3,4 h = 3 h 24 min

Diferencia de longitud entre A y C: 104º

Diferencia horaria entre A y C: 104 : 15 = 6,93 h = 6 h 55 min 48 s

Diferencia de longitud entre B y C: 155º

Diferencia horaria entre B y C: 155 : 15 = 10,33 h = 10 h 19 min 48 s

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

127. **La mayoría de los fotógrafos llevan en su bolsa pilas para que funcionen sus *flashes*, incluso pilas especiales para alguna de sus cámaras antiguas que no disponen de baterías recargables.**

Uno de los problemas que tienen es que dada su forma cilíndrica no son fáciles de almacenar en bolsas. Con este fin han aparecido unos estuches en forma de pequeñas cajas de plástico donde poder llevarlas con comodidad.

- **Una página web dedicada a la venta de material fotográfico anuncia este producto.**

Estas son las dimensiones de una pila de tipo AAA. ¿Cuántos centímetros cúbicos quedan sin ocupar por las cuatro pilas en la caja que se publicita en el anuncio?

La caja es un ortoedro, su volumen es $V_{\text{Caja}} = 62 \cdot 57 \cdot 18 = 63\,612$ cm^3.

El volumen de cada pila es $V_{\text{Pila}} = \pi \cdot 5{,}25^2 \cdot 44{,}5 = 3\,853{,}26$ cm^3.

El volumen de 4 pilas es: $3\,853{,}26 \cdot 4 = 15\,413{,}04$ cm^3.

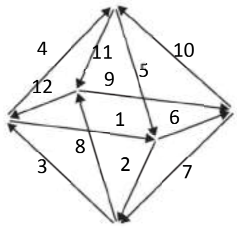
Espacio que sobra: $63\,612 - 15\,413{,}04 = 47\,898{,}96$ cm^3.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

128. Una hormiga se encuentra en un vértice de un octaedro y decide recorrer todas sus aristas sin pasar dos veces por la misma arista. Indica un camino posible.

Curiosamente, la hormiga no podría hacer lo mismo en un cubo. Compruébalo.

Para que la hormiga pudiese recorrer el octaedro sin repetir arista, este se tendría que poder dibujar con un solo trazo y efectivamente se puede.



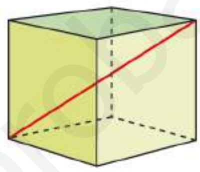
Sin embargo, en un cubo, esto no es posible.

129. Considera x la medida de la arista de un cubo. Demuestra que la diagonal del cubo se obtiene con la fórmula $d = \sqrt{3}x$.

Calcula con ella la diagonal de los siguientes cubos.

a) Cubo de arista 6 cm

b) Cubo de arista 4,5 cm



Si el lado del cubo es x, tenemos que la diagonal de la base es: $d_{\text{base}}^2 = x^2 + x^2 \rightarrow d_{\text{base}} = \sqrt{2}\,x$

Calculamos ahora la diagonal del cubo. $d^2 = (\sqrt{2}\,x)^2 + x^2 \rightarrow d = \sqrt{3}\,x$.

a) $d = \sqrt{3} \cdot 6 = 10{,}39$ cm

b) $d = \sqrt{3} \cdot 4{,}5 = 7{,}79$ cm

130. Encuentra la expresión que da la altura de un tetraedro en función de su arista.

Necesitamos primero calcular la altura de los triángulos que forman sus caras (que a la vez coincide con la apotema de la pirámide).

Si la arista mide x, entonces $x^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \rightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

Ahora, como es un triángulo equilátero, sabemos que la distancia de su centro al punto medio de uno de los lados es 1/3 de la altura, se dibuja entonces con la altura de la pirámide (tetraedro) un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la apotema de la pirámide y los catetos son $\dfrac{1}{3}$ de la altura de la base y la altura del tetraedro:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 = H^2 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 \rightarrow H = \frac{\sqrt{24}}{6}x = \frac{2\sqrt{6}}{6}x = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

131. Halla las diagonales trazadas desde un vértice en un prisma hexagonal regular cuyas aristas básicas y aristas laterales miden 12 cm.

Se forma un triángulo rectángulo con la diagonal, la arista lateral y dos radios del hexágono de la base:
$d_1^2 = 12^2 + 24^2 \rightarrow d_1 = 26{,}83$ cm

Se forma un triángulo rectángulo con la diagonal, la arista lateral y dos alturas de los triángulos en los que se divide la base. Calculamos la altura de los triángulos: $12^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow h = 10{,}39$ cm.

$d_1^2 = 12^2 + 20{,}78^2 \rightarrow d_1 = 24{,}00$ cm

132. **Considera x, y, z las dimensiones de un ortoedro. Demuestra que su diagonal d se obtiene con la fórmula: $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.**

$d_{Base}{}^2 = x^2 + y^2. \rightarrow d^2{}_{Ortoedro} = d_{Base}{}^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$

133. **En el año 1638 el matemático Galileo propuso el siguiente problema: «Si se enrolla una hoja de papel en los dos sentidos posibles, se obtienen dos cilindros distintos».**

¿Tienen estos cilindros el mismo volumen?

Sea x uno de los lados de la hoja e y el otro.

Si enrollamos el lado x, entonces $2\pi r = x \rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$, el volumen es $V = \pi \cdot \left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot y = \dfrac{x^2 y}{4\pi}$

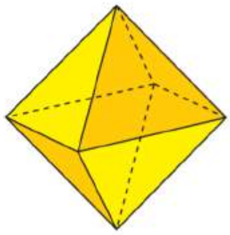
Si enrollamos el lado y, entonces $2\pi r = y \rightarrow r = \dfrac{y}{2\pi}$, el volumen es $V = \pi \cdot \left(\dfrac{y}{2\pi}\right)^2 \cdot x = \dfrac{y^2 x}{4\pi}$

Los volúmenes no son iguales.

134. **En un libro de Matemáticas hemos encontrado el siguiente problema sobre volúmenes:**

«Si el lado de un octaedro es l, su volumen es: $V = l^{23} \cdot 0{,}4714$».

Investiga cómo se obtiene esta fórmula.



Calculamos la apotema de la pirámide: $l^2 = ap^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \rightarrow ap = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l$.

Calculamos ahora la altura de la pirámide: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2 = h^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \rightarrow h = \dfrac{\sqrt{2}}{2}l$.

$V_{Pirámide} = \dfrac{1}{3} \cdot l^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} l = 0{,}2357 l^3$ $\qquad V_{Octaedro} = 2 \cdot V_{Pirámide} = 0{,}4714 l^3$

135. **El radio de la base de un cilindro y de un cono mide 10 cm. Si la altura del cilindro es de 10 cm, averigua cuál debe ser la generatriz del cono para que ambos tengan:**

a) La misma área lateral. b) La misma área total.

a) $A_{Lateral\ Cilindro} = 2\pi \cdot 10 \cdot 10 = 628{,}32\ cm^2$. $\qquad A_{Lateral\ Cono} = \pi \cdot 10 \cdot g$

$\pi \cdot 10 \cdot g = 628{,}32 \rightarrow g = 20$ cm.

b) $A_{Total\ Cilindro} = A_L + 2\pi \cdot r^2 = 628{,}32 + 628{,}32 = 1\,256{,}64$. $\qquad A_{Total\ Cono} = A_L + \pi \cdot r^2 = 10\pi \cdot g + 314{,}16$,

$31{,}42 \cdot g + 314{,}16 = 1\,256{,}64 \rightarrow g = 29{,}90$ cm

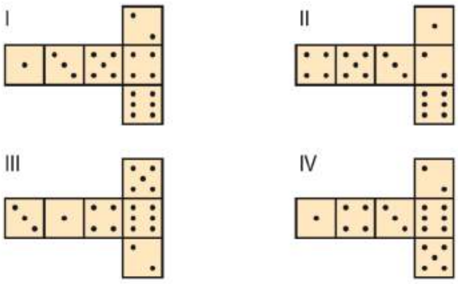
PRUEBAS PISA

136. **A la derecha, hay un dibujo de dos dados. Los dados son cubos con un sistema especial de numeración en los que se aplica la siguiente regla:**

«El número total de puntos en dos caras opuestas es siempre siete».

Puedes construir un dado sencillo cortando, doblando y pegando cartón. Estos dados se pueden hacer de muchas maneras. En el dibujo siguiente puedes ver cuatro recortes que se pueden utilizar para hacer cubos, con puntos en las caras. ¿Cuál de las siguientes figuras se puede doblar para formar un cubo que cumpla la regla de que la suma de caras opuestas sea 7?

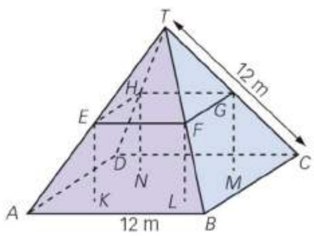
(Prueba PISA 2006)



Las figuras II y III.

137. **Aquí ves una fotografía de una casa de campo con el tejado en forma de pirámide.**

Debajo hay un modelo matemático del tejado de la casa con las medidas correspondientes.



La planta del ático, *ABCD* en el modelo, es un cuadrado. Las vigas que sostienen el tejado son las aristas de un bloque (prisma rectangular) *EFGHKLMN*. *E* es el punto medio de $\overline{AT}$, *P* es el punto medio de $\overline{BT}$, *G* es el punto medio de $\overline{CT}$ y *H* es el punto medio de $\overline{DT}$. Todas las aristas de la pirámide tienen 12 m de longitud.

a) Calcula el área de la planta del ático *ABCD*.

b) Calcula la longitud de $\overline{EF}$, una de las aristas horizontales del bloque.

(Prueba PISA 2006)

a) Altura de los triángulos que forman los lados: $12^2 = h^2 + 6^2 \rightarrow h = 10{,}39$ cm

Área total del ático :$A = 12^2 + 4 \cdot \dfrac{12 \cdot 10{,}39}{2} = 393{,}36$ cm^2

b) Los triángulos están en posición de Tales → Lados proporcionales a los del triángulo grande. Sabemos que los lados *ET* y *EF* miden 6 cm, la mitad que el original → *EF* también medirá la mitad, es decir, 6 cm.