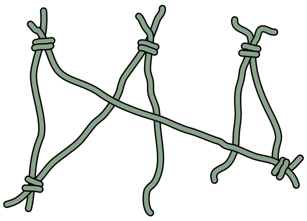
Página 251

Resuelve

1. Completa el razonamiento y averigua qué proporción de personas tendrá "éxito". Es decir, cuál es la probabilidad de que se consiga un único aro con las seis cuerdas.

… Por tanto, la proporción de "nudos buenos" en este segundo paso es $\frac{2}{3}$.



Si hemos llegado hasta aquí, el tercer nudo es necesariamente bueno. Es decir, todos lo son.

Conclusión: La proporción de éxito es $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{8}{15}$. ¡Más de la mitad de las veces!

1 Sucesos aleatorios

Página 253

1. Una bolsa tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. La experiencia consiste en sacar una bola y anotar su número.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Considera estos sucesos:

A = "número primo" **B = "múltiplo de 3"**

Describe los sucesos siguientes:

A	A'	$A \cup B$	$A \cup A'$
B	B'	$A \cap B$	$A \cap A'$

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

b) $A = \{2, 3, 5, 7\}$ $A' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$B = \{3, 6, 9\}$ $B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ $A \cap B = \{3\}$

$A \cup A' = E$ $A \cap A' = \varnothing$

2. Lanzamos tres veces una moneda.

a) Completa en tu cuaderno el espacio muestral:

$E = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), \ldots\}$

b) Describe los siguientes sucesos:

A = "la primera vez salió cara"

B = "hay al menos dos caras"

c) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, A' y B'.

d) Describe un suceso que sea incompatible con A y con B. ¿Será incompatible con $A \cup B$?

a) $E = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)\}$.

b) $A = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (C, +, +)\}$

$B = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C)\}$

c) $A \cup B = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (C, +, +), (+, C, C)\}$

$A \cap B = \{(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C)\}$

$A' = \{(+, C, C), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)\}$

$B' = \{(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)\}$

d) $S = \{(+, +, +)\}$ es incompatible con A y B ya que $A \cap S = B \cap S = \varnothing$. También es incompatible con $A \cup B$.

2 Probabilidades de los sucesos. Propiedades

Página 255

1. **Halla la probabilidad de los sucesos $A = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$ y A', tanto en el caso de las bolas iguales como en el que tienen distintos pesos y tamaños.**

- CASO 1: las bolas tienen igual tamaño y peso.

  $P[A] = P[\{2, 3, 4, 8, 9, 10\}] = P[\{2\}] + P[\{3\}] + P[\{4\}] + P[\{8\}] + P[\{9\}] + P[\{10\}] =$

  $= 6 \cdot \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \to 60\,\%$

  puesto que todos los sucesos elementales son equiprobables.

  $P[A'] = 1 - P[A] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 \to 40\,\%$

- CASO 2: las bolas tienen pesos y tamaños diferentes.

  $P[A] = P[\{2\}] + P[\{3\}] + P[\{4\}] + P[\{8\}] + P[\{9\}] + P[\{10\}] =$

  $= 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}06 = 0{,}57 \to 57\,\%$

  $P[A'] = 1 - P[A] = 1 - 0{,}57 = 0{,}43 \to 43\,\%$

3 Probabilidades en experiencias simples

Página 257

1. Lanzamos un dado con forma de octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8. Evalúa estas probabilidades:

a) P**[múltiplo de 3]** **b)** P**[menor que 5]**

c) P**[número primo]** **d)** P**[no múltiplo de 3]**

a) $P[\dot{3}] = P[\{3, 6\}] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ b) $P[< 5] = P[\{1, 2, 3, 4\}] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) $P[\text{primo}] = P[\{2, 3, 5, 7\}] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ d) $P[\text{no } \dot{3}] = 1 - P[\dot{3}] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

2. Lanzamos dos dados y anotamos *la menor de las puntuaciones.*

a) Escribe el espacio muestral e indica la probabilidad de cada uno.

b) Calcula:

$P[< 4]$ $P[\text{no} < 4]$

DADO 1 / DADO 2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4
5	1	2	3	4	5	5
6	1	2	3	4	5	6

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P[1] = \frac{11}{36}$ $P[2] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ $P[3] = \frac{7}{36}$

$P[4] = \frac{5}{36}$ $P[5] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ $P[6] = \frac{1}{36}$

b) $P[< 4] = P[1] + P[2] + P[3] = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

$P[\text{no} < 4] = 1 - P[< 4] = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

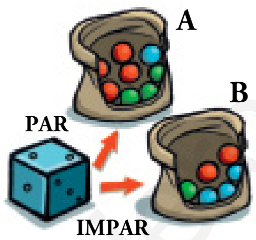
4 Probabilidades en experiencias compuestas

Página 258

1. **Lanzamos un dado y, después, sacamos una bola de la bolsa. Estas dos experiencias, ¿son dependientes o independientes?**

Son independientes, porque el resultado de sacar una bola de la bolsa no depende de qué haya salido en el dado.

2. **Lanzamos un dado. Si sale par, extraemos una bola de la bolsa A. Si sale impar, de la B. Las experiencias, ¿son dependientes o independientes?**



Son dependientes, porque al ser los contenidos de las bolsas distintos, el resultado depende de qué bolsa se saque, que depende del valor obtenido al lanzar el dado.

5 Composición de experiencias independientes

Página 259

1. Se extraen 3 cartas con reemplazamiento. Halla:

a) P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] **b)** P[3 ASES]

c) P[un AS y dos FIGURAS] **d)** P[ningún AS]

a) P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] = P[AS] · P[FIGURA] · P[FIGURA] =

$$= \frac{4}{40} \cdot \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{1000}$$

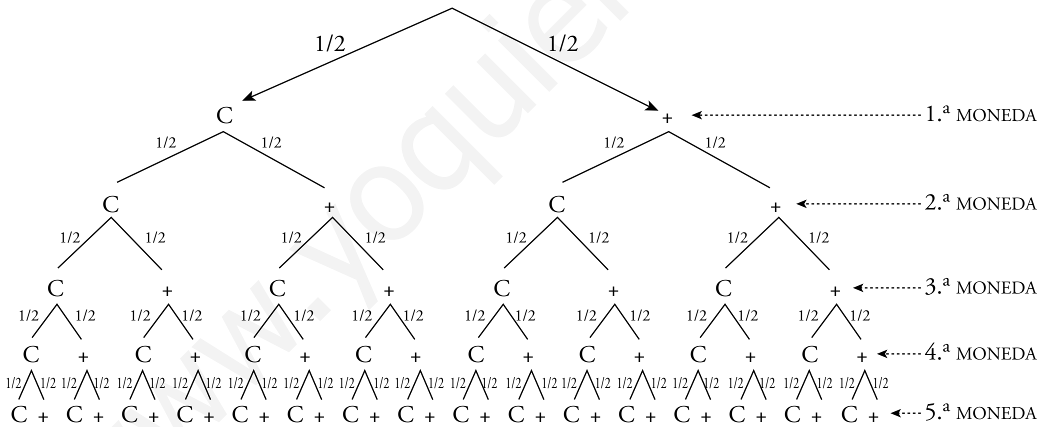
b) P[3 ASES] = P[AS] · P[AS] · P[AS] = $\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$

c) P[un AS y dos FIGURAS] = 3 · P[AS en 1.ª y FIGURA en 2.ª y 3.ª] = $3 \cdot \frac{9}{1000} = \frac{27}{1000}$

d) P[ningún AS] = $\frac{36}{40} \cdot \frac{36}{40} \cdot \frac{36}{40} = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1000}$

2. Se lanzan 5 monedas. Halla la probabilidad de:

a) 5 caras **b)** alguna cruz



a) P[5 CARAS] = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

b) P[alguna CRUZ] = P[0 C y 5 +] + P[1 C y 4 +] + P[2 C y 3 +] + P[3 C y 2 +] +

$$+ P[4 \text{ C y } 1 +] = 1 - P[5 \text{ C}] = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

3. Lanzamos 3 monedas. Calcula:

a) P**[tres caras]** **b)** P**[ninguna cara]** **c)** P**[alguna cara]**

a) $P[3 \text{ caras}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b) $P[\text{ninguna cara}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

c) Hay 3 formas de que salga una sola cara: {C, +, +}, {+, C, +}, {+, +, C}.

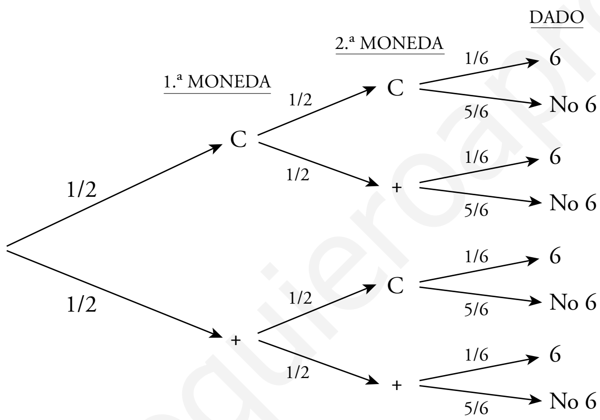
De la misma forma, hay 3 de que salgan dos caras.

$P[\text{alguna cara}] = 3 \cdot P[\text{una cara}] + 3 \cdot P[\text{dos caras}] + P[\text{tres caras}] =$

$= 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

4. Se lanzan dos monedas y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas y seis en el dado? ¿Cuál, la de obtener cruz en las monedas y par en el dado?

Hacemos el diagrama en árbol:



$P[C, C, 6] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

$P[+, +, (2, 4, 6)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

6 Composición de experiencias dependientes

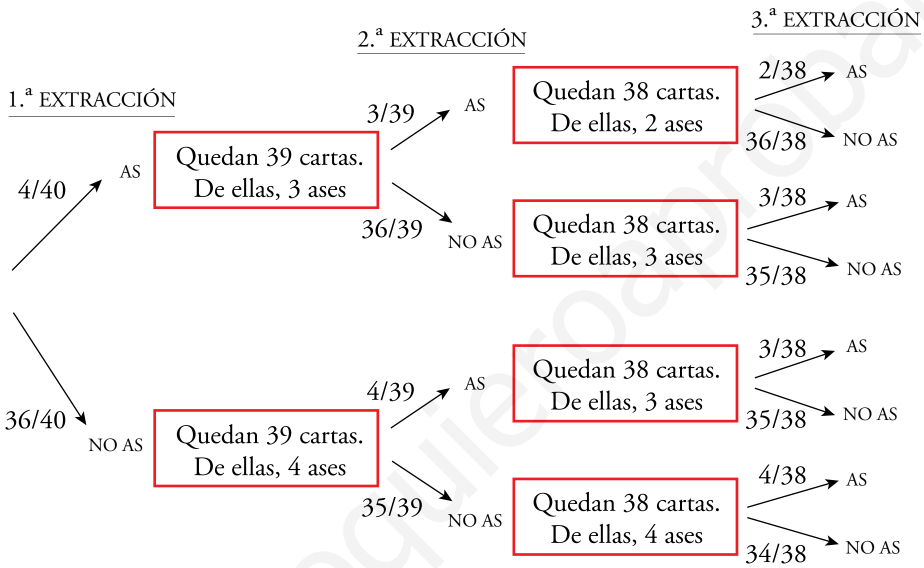
Página 261

1. Extraemos dos cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea un REY y la segunda un AS?

En la baraja española hay 40 cartas de las cuales 4 son reyes y 4 son ases.

$$P[\text{REY y AS}] = P[\text{REY}] \cdot P[\text{AS supuesto que la 1.ª fue REY}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{4}{390} = \frac{2}{195}$$

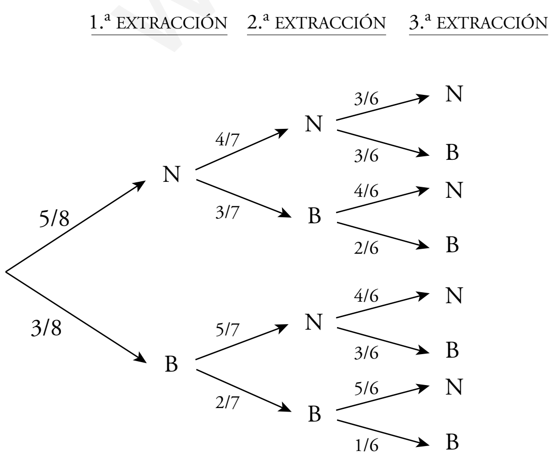
2. Completa el diagrama en árbol del ejercicio resuelto de esta página y sobre él halla *P* [NINGÚN AS].



$$P[\text{ningún AS}] = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} = \frac{357}{494}$$

3. Una urna contiene 5 bolas negras y 3 blancas. Extraemos tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Y negras?

N $\rightarrow$ bola negra; B $\rightarrow$ bola blanca



$$P[\text{3 BLANCAS}] = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$$

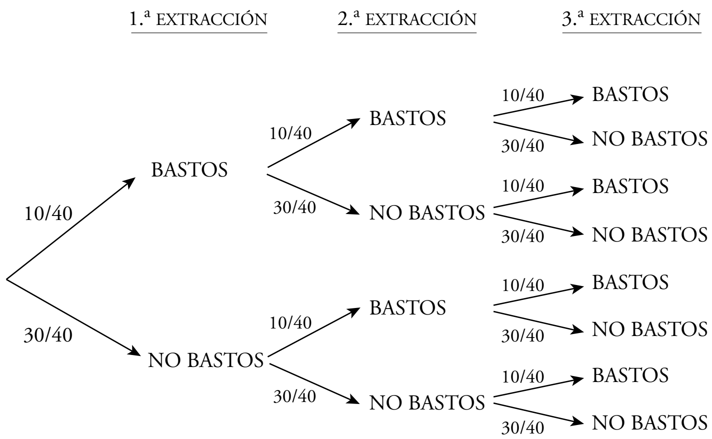
$$P[\text{3 NEGRAS}] = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{28}$$

4. **Se extraen, una tras otra, 3 cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener BASTOS las tres veces?**

a) Supón que se extraen con reemplazamiento.

b) Supón que se extraen sin reemplazamiento.

a)

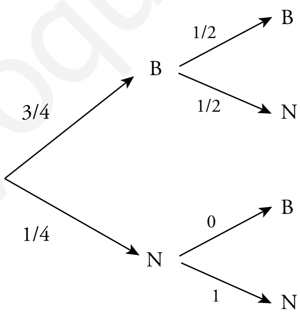


$$P[\text{tres BASTOS}] = P[\text{BASTOS}] \cdot P[\text{BASTOS}] \cdot P[\text{BASTOS}] = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{64}$$

b) $P[\text{tres BASTOS}] = P[\text{BASTOS}] \cdot P[\text{BASTOS}] \cdot P[\text{BASTOS}] = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{3}{247}$

5. **Una urna A tiene tres bolas blancas y una negra. Otra B tiene una bola negra. Sacamos una bola de A y la echamos en B. Removemos y sacamos una bola de B. ¿Cuál es la probabilidad de que esta sea blanca?**

Hacemos un diagrama en árbol:



$P[\text{BLANCA}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{8}$

7 Tablas de contingencia

Página 262

Interpretar una tabla

TIPO DE ACTIVIDAD EXTRAESCOLAR

CURSO	CULTURAL	DEPORTIVA	NINGUNA	TOTAL
1.°	12	36	72	120
2.°	15	40	45	100
3.°	21	44	35	100
4.°	24	40	16	80
TOTAL	72	160	168	400

Observa la tabla que tienes arriba y responde:

a) ¿Cuántos estudiantes del centro participan en actividades culturales? ¿Cuántos de ellos son de 2.°?

b) ¿Cuántos estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar? De ellos, ¿cuántos son de 4.°?

c) ¿Cuántos estudiantes de 3.° participan en actividades deportivas?

d) ¿Cuántos estudiantes que participan en actividades deportivas son de 3.°?

a) $\frac{72}{400} \cdot 100 = 18 \rightarrow$ El 18 % de estudiantes del centro participan en actividades culturales.

$\frac{15}{72} \cdot 100 = 20{,}83 \rightarrow$ El 20,83 % son de 2.°.

b) $\frac{168}{400} \cdot 100 = 42 \rightarrow$ El 42 % de los estudiantes del centro no participan en ninguna actividad extraescolar.

$\frac{16}{168} \cdot 100 = 9{,}5 \rightarrow$ El 9,5 % son de 4.°.

c) El 44 % de alumnos de 3.° participan en actividades deportivas.

d) $\frac{44}{160} \cdot 100 = 27{,}5 \rightarrow$ El 27,5 % de los que participan en actividades deportivas son de 3.°.

Página 263

1. Explica el significado de los números 120, 168, 12, 45 y 40 de la tabla del ejercicio resuelto anterior.

120 → Número de alumnos de 1.º.

168 → Número de alumnos con NINGUNA actividad extraescolar.

12 → Número de alumnos de 1.º con actividad extraescolar CULTURAL.

45 → Número de alumnos de 2.º con NINGUNA actividad extraescolar.

40 → Número de alumnos de 4.º con actividad extraescolar DEPORTIVA.

2. Explica lo que significa, para la tabla del ejercicio resuelto anterior, estas expresiones y da su valor:

a) ***P*** **[1.º]** **b)** ***P*** **[CULTURAL]**

c) ***P*** **[4.º / CULTURAL]** **d)** ***P*** **[CULTURAL / 4.º]**

a) P[1.º] → Probabilidad de que, elegido al azar, un alumno sea de 1.º.

$$P[1.º] = \frac{120}{400} = 0{,}3$$

b) P[CULTURAL] → Probabilidad de elegir a un alumno con actividad extraescolar CULTURAL.

$$P[\text{CULTURAL}] = \frac{72}{400} = 0{,}18$$

c) P[4.º / CULTURAL] → Probabilidad de que habiendo elegido un alumno con actividad CULTURAL, este resulte ser de 4.º.

$$P[4.º\ /\ \text{CULTURAL}] = \frac{24}{72} = 0{,}375$$

d) P[CULTURAL / 4.º] → Probabilidad de elegir a un alumno con actividad CULTURAL entre todos los de 4.º.

$$P[\text{CULTURAL}\ /\ 4.º] = \frac{24}{80} = 0{,}3$$

3. Queremos analizar, partiendo de los datos de la tabla del ejercicio resuelto anterior, la evolución del absentismo (falta de participación) en actividades extraescolares cualesquiera, al aumentar la edad. Calcula las proporciones que convenga y compáralas.

Debemos observar la probabilidad de los que no hacen ninguna actividad en cada uno de los cursos, es decir:

$$P[\text{NINGUNA}\ /\ 1.º] = \frac{72}{120} = 0{,}6 \qquad P[\text{NINGUNA}\ /\ 2.º] = \frac{45}{100} = 0{,}45$$

$$P[\text{NINGUNA}\ /\ 3.º] = \frac{35}{100} = 0{,}35 \qquad P[\text{NINGUNA}\ /\ 4.º] = \frac{16}{80} = 0{,}2$$

Por tanto, según pasan los cursos, cada vez hay menos alumnos que no hacen ninguna actividad extraescolar.

4. **En una bolsa hay 40 bolas huecas, y dentro de cada una hay un papel en el que pone SÍ o NO, según esta tabla:**

	🔴	🟢	🔵	TOTAL
SÍ	15	4	1	20
NO	5	4	11	20
TOTAL	20	8	12	40

a) Describe los sucesos SÍ, NO, 🔴, 🔴 / SÍ, SÍ / 🔴 y calcula sus probabilidades.

b) Hemos sacado una bola roja. ¿Qué probabilidad hay de que haya SÍ en su interior? ¿Y si la bola es azul?

c) Se ha sacado una bola y dentro pone SÍ. ¿Cuál es la probabilidad de que sea 🔴? ¿Y 🟢? ¿Y 🔵?

a) SÍ $\rightarrow$ sacar una bola al azar y que sea SÍ.

NO $\rightarrow$ sacar una bola al azar y que sea NO.

🔴 $\rightarrow$ sacar una bola al azar y que sea roja.

🔴 / SÍ $\rightarrow$ de entre las bolas que dicen SÍ, sacar una roja.

SÍ / 🔴 $\rightarrow$ de entre las bolas rojas, sacar una que dice SÍ.

$P[\text{SÍ}] = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ $P[\text{NO}] = 1 - P[\text{SÍ}] = \frac{1}{2}$

$P[🔴] = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ $P[🔴 / \text{SÍ}] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $P[\text{SÍ} / 🔴] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

b) $P[\text{SÍ} / 🔴] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $P[\text{SÍ} / 🔵] = \frac{1}{12}$

c) $P[🔴 / \text{SÍ}] = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $P[🟢 / \text{SÍ}] = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ $P[🔵 / \text{SÍ}] = \frac{1}{20}$

Página 264

Hazlo tú 1. Extraemos tres cartas de una baraja de 40. Calcula la probabilidad de que sean oros.

- SIN COMBINATORIA:

Se trata de 3 experiencias dependientes.

En la baraja hay 10 cartas de oros.

$P[3 \text{ OROS}] = P[1.^a \text{ ORO}] \cdot P[2.^a \text{ ORO} / 1.^a \text{ ORO}] \cdot P[3.^a \text{ ORO} / 1.^a \text{ ORO y } 2.^a \text{ ORO}] =$

$$= \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{4}{19} = \frac{3}{13 \cdot 19} = \frac{3}{247}$$

- CON COMBINATORIA:

Casos favorables: extraer 3 oros de un total de 10.

Casos posibles: extraer 3 cartas de un total de 40.

$$P[3 \text{ OROS}] = \frac{C_{10,\,3}}{C_{40,\,3}} = \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{40 \cdot 39 \cdot 38} = \frac{3}{247}$$

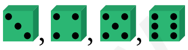
Hazlo tú 2. a) Tiramos 3 dados. Calcula, paso a paso, la probabilidad de que el valor mediano sea "2".

b) Tiramos 3 dados. Calcula la probabilidad de que el mayor resultado sea "4".

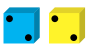
a) Casos posibles al tirar 3 dados: $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$

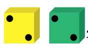
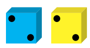
Suceso "EL 2 ES EL VALOR MEDIANO".

Contemos los casos posibles (llamamos a a un valor menor que 2 y b a un valor mayor que 2):

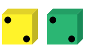
- a  b $\left\{ \begin{array}{l} a = \text{} \\ b = \text{} \end{array} \right.$   $1 \cdot 4 = 4$ posibilidades

  Cada posibilidad admite $P_3 = 3! = 6$ ordenaciones distintas. Por tanto, habrá $4 \cdot 6 = 24$ casos diferentes.

-  $b \to$ 4 posibilidades

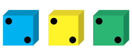
  Cada una admite 3 ordenaciones distintas: b ,  b ,  b

  Por tanto, habrá $4 \cdot 3 = 12$ casos diferentes.

- a  $\to$ 1 posibilidad

  Pero hay 3 ordenaciones diferentes.

  Luego $1 \cdot 3 = 3$ casos diferentes.

-  $\to$ 1 caso único

Así, el total de casos favorables será:

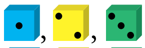
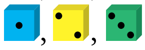
$24 + 12 + 3 + 1 = 40$ casos favorables

$$P[2] = \frac{40}{216} = \frac{5}{27}$$

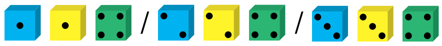
b) S = "EL MAYOR RESULTADO ES 4".

Casos posibles al lanzar 3 dados: $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$

Estudiemos los casos posibles (llamamos a a un valor 1, 2 o 3 y b a un valor 1, 2 o 3):

- $a\ b$  $a =$  $b =$  $3 \cdot 3 = 9$ posibilidades

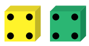
  De esas 9 posibilidades hay 3 en las que se repiten resultados:

  y las otras 6 posibilidades en las que no se repiten resultados.

  Hay $P_3 = 3! = 6$ ordenaciones distintas para 6 de esas posibilidades (sin repetir) y 3 para las restantes (repetidas).

  Luego: $6 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 45$ casos en esta opción.

- a  $\rightarrow$ 3 posibilidades

  Cada una admite 3 ordenaciones.

  Luego $3 \cdot 3 = 9$ casos en esta opción.

-  $\rightarrow$ 1 posibilidad $\rightarrow$ 1 caso

Total casos favorables = $45 + 9 + 1 = 55$

$P[S] = \dfrac{55}{216}$

Página 265

Hazlo tú 4. Tres personas se sitúan al azar en 6 asientos. ¿Cuál es la probabilidad de que dos en concreto estén juntas? ¿Y si solo se sentaran dos personas en los 6 asientos?

Tenemos 6 asientos y tres personas para sentar, A, B y C:

C	A		B		
1	2	3	4	5	6

El número de casos posibles será:

$V_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas distintas de sentarse A, B y C en 6 asientos.

Supongamos que queremos que A y B se sienten juntos (el razonamiento sería el mismo para cualquiera de las posibles parejas). Contemos los casos favorables.

Para que A y B estén juntos han de ocupar los asientos:

1 y 2 o 2 y 3 o 3 y 4 o 4 y 5 o 5 y 6

Para cada situación, existen 2 posibilidades: AB o BA.

Además, C podría estar en cada uno de los 4 asientos restantes. Luego:

Casos posibles $= 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$

$P[\text{A y B juntos}] = \dfrac{40}{120} = \dfrac{1}{3}$

Razonando de manera análoga calculamos la probabilidad si solo se sentaran dos personas en los 6 asientos:

Casos posibles $\to V_{6,\,2} = 6 \cdot 5 = 30$

Casos favorables $\to 5 \cdot 2 = 10$

$P[\text{A y B juntos}] = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$

Ejercicios y problemas

Página 266

Practica

Relaciones entre sucesos

1. **En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el "gordo".**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe los sucesos: A = MENOR QUE 5; B = PAR.

c) Halla los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, A', B', $A' \cap B'$.

a) El espacio muestral es: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) A = "MENOR QUE 5" = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

B = "PAR" = $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$A \cap B = \{0, 2, 4\}$

$A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$A' \cap B' = \{5, 7, 9\}$

2. **Lanzamos un dado rojo y otro verde. Anotamos el resultado. Por ejemplo, (3, 4) significa 3 en el rojo y 4 en el verde.**

a) ¿Cuántos elementos (casos) tiene el espacio muestral?

b) Describe los siguientes sucesos:

A: La suma de puntos es 6; $A = \{(5, 1), (4, 2), \ldots\}$

B: En uno de los dados ha salido 4; $B = \{(4, 1), \ldots\}$

C: En los dados salió el mismo resultado.

c) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$.

d) ¿Cuántos casos tienen los sucesos A', $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$?

a) Como tenemos dos dados, cada uno con 6 caras, tenemos 6 resultados en uno para cada uno de los 6 resultados del otro. Es decir, en total, 36 elementos en el espacio muestral.

b) $A = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

$B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

c) $A \cup B \rightarrow$ En uno de los dados ha salido un 4 o la suma de los dos es 6.

$A \cap B \rightarrow$ Habiendo salido un 4, la suma de los dos es 6, es decir, $\{(4, 2), (2, 4)\}$.

$A \cap C \rightarrow$ Habiendo salido dos números iguales, la suma es 6, es decir, $\{(3, 3)\}$.

d) • A' = "La suma de puntos no es 6".

A tiene 5 casos $\to$ A' tiene $36 - 5 = 31$ casos.

• $(A \cup B)'$ = "No ha salido ningún 4 ni la suma de los dos es 6".

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ tiene 5 casos} \\ B \text{ tiene 11 casos} \\ A \cap B \text{ tiene 2 casos} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to A \cup B \text{ tiene } 5 + 11 - 2 = 14 \text{ casos} \to \\ \to (A \cup B)' \text{ tiene } 36 - 14 = 22 \text{ casos} \end{array}$$

• $(A \cap B)'$ tiene $36 - 2 = 34$ casos

3. **El dominó consta de 28 fichas. Sacamos una al azar y anotamos la suma (x) de las puntuaciones.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Describe los sucesos:

***A*: *x* es un número primo.**

***B*: *x* es mayor que 4.**

$A \cup B$, $A \cap B$, A'.

a) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

b) $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ $A \cap B = \{5, 7, 11\}$

$A' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

Cálculo de probabilidades en experiencias simples

4. **Halla las probabilidades de los sucesos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, A', B' y $A' \cap B'$ del ejercicio 1.**

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

• $A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \to P[A] = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

• $B = \{0, 2, 4, 6, 8\} \to P[B] = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

• $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\} \to P[A \cup B] = \dfrac{7}{10}$

• $A \cap B = \{0, 2, 4\} \to P[A \cap B] = \dfrac{3}{10}$

• $P[A'] = 1 - P[A] = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

• $P[B'] = 1 - P[B] = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

• $A' \cap B' = \{5, 7, 9\}$, pues $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ y $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$P[A' \cap B'] = \dfrac{3}{10}$

5. **Halla las probabilidades de los sucesos A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, A', $(A \cup B)'$ y $(A \cap B)'$ del ejercicio 2.**

$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6)\}$. E tiene 36 casos.

- $A = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$

  $P[A] = \dfrac{5}{36}$

- $B = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

  $P[B] = \dfrac{11}{36}$

- $C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

  $P[C] = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

- $A \cup B = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$

  $P[A \cup B] = \dfrac{14}{36} = \dfrac{7}{18}$

- $A \cap B = \{(4, 2), (2, 4)\}$

  $P[A \cap B] = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

- $A \cap C = \{(3, 3)\}$

  $P[A \cap C] = \dfrac{1}{36}$

- $P[A'] = 1 - P[A] = 1 - \dfrac{5}{36} = \dfrac{31}{36}$

- $P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - \dfrac{7}{18} = \dfrac{11}{18}$

- $P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - \dfrac{1}{18} = \dfrac{17}{18}$

6. **Halla las probabilidades de los sucesos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ y A' del ejercicio 3.**

$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Hay 28 fichas en el dominó. Así, tendremos que:

$P[0] = \dfrac{1}{28} = P[12] = P[1] = P[11]$

$P[2] = \dfrac{2}{28} = \dfrac{1}{14} = P[3] = P[9] = P[10]$

$P[4] = \dfrac{3}{28} = P[5] = P[7] = P[8]$

$P[6] = \dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7}$

	6	5	4	3	2	1	0
	7	6	5	4	3	2	
	8	7	6	5	4		
	9	8	7	6			
	10	9	8				
	11	10					
	12						

A = "la suma x es número primo" = {2, 3, 5, 7, 11}

$P[A] = \frac{2}{28} + \frac{2}{28} + \frac{3}{28} + \frac{3}{28} + \frac{1}{28} = \frac{11}{28}$

B = "la suma x es mayor que 4" = {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

$P[B] = \frac{3}{28} + \frac{4}{28} + \frac{3}{28} + \frac{3}{28} + \frac{2}{28} + \frac{2}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{19}{28}$

$A \cup B$ = "la suma x es primo o mayor que 4" = {2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

$P[A \cup B] = \frac{2}{28} + \frac{2}{28} + \frac{3}{28} + \frac{4}{28} + \frac{3}{28} + \frac{3}{28} + \frac{2}{28} + \frac{2}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{23}{28}$

$A \cap B$ = "la suma x es primo y mayor que 4" = {5, 7, 11}

$P[A \cap B] = \frac{3}{28} + \frac{3}{28} + \frac{1}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$

A' = "la suma x no es primo"

$P[A'] = 1 - P[A] = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

7. Se extrae una carta de una baraja española. Di cuál es la probabilidad de que sea:

a) REY O AS. **b)** FIGURA Y OROS. **c)** NO SEA ESPADAS.

a) $P[\text{REY O AS}] = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

b) $P[\text{FIGURA Y OROS}] = P[\text{FIGURA DE OROS}] = \frac{3}{40}$

c) $P[\text{NO SEA ESPADAS}] = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

Cálculo de probabilidades en experiencias compuestas

8. Lanzamos dos dados y anotamos la puntuación del mayor (si coinciden, la de uno de ellos).

a) Completa la tabla y di las probabilidades de los seis sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

b) Halla la probabilidad de los sucesos:

***A*: n.° par, *B*: n.° menor que 4, $A \cap B$.**

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1	2				
⚁	2				5	
⚂						
⚃				4		6
⚄						
⚅		6				

a)

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	**1**	**2**	3	4	5	6
⚁	**2**	2	3	4	**5**	6
⚂	3	3	3	4	5	6
⚃	4	4	4	**4**	5	**6**
⚄	5	5	5	5	5	6
⚅	6	**6**	6	6	6	6

$P[1] = \frac{1}{36}$; $P[2] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$; $P[3] = \frac{5}{36}$

$P[4] = \frac{7}{36}$; $P[5] = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$; $P[6] = \frac{11}{36}$

b) $P[A] = \frac{3}{36} + \frac{7}{36} + \frac{11}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$; $P[B] = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;

$P[A \cap B] = P[2] = \frac{1}{12}$

9. **a) Tenemos dos barajas de 40 cartas. Sacamos una carta de cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figuras (sota, caballo o rey)?**

b) Tenemos una baraja de 40 cartas. Sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean un 7? ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean figura?

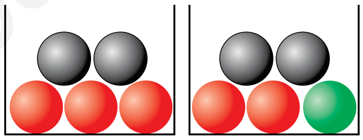
a) $P[7 \text{ y } 7] = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$; $P[\text{FIGURA y FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40} = \frac{9}{100}$

b) $P[7 \text{ y } 7] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{12}{1560} = \frac{1}{130}$; $P[\text{FIGURA y FIGURA}] = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{39} = \frac{132}{1560} = \frac{11}{130}$

10. **Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?**

$P[\text{las tres menores que } 5] = P[< 5] \cdot P[< 5] \cdot P[< 5] = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{27}$

11. **Sacamos una bola de cada urna. Calcula la probabilidad de que:**



a) Ambas sean rojas.

b) Ambas sean negras.

c) Alguna sea verde.

a) $P[\text{ROJA y ROJA}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

b) $P[\text{NEGRA y NEGRA}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

c) $P[\text{alguna VERDE}] = P[\text{VERDE}] + P[\text{VERDE}] = 0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

12. **Una urna tiene 3 bolas rojas y 2 verdes. Extraemos dos. Calcula $P[2 \text{ rojas}]$ y $P[2 \text{ verdes}]$.**

$P[2 \text{ ROJAS}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$ $\qquad$ $P[2 \text{ VERDES}] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

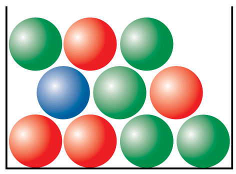
13. **En una bolsa hay 4 bolas rojas, 5 verdes y 1 azul. Extraemos 3 bolas. Calcula la probabilidad de que:**

a) Las tres sean rojas.

b) Las tres sean verdes.

c) Cada una de las tres sea roja o verde.

d) Una de las tres sea azul.



a) R_i = "la bola extraída en la posición i es roja".

$$P[R_1 \cap R_2 \cap R_3] = P[R_1] \cdot P[R_2/R_1] \cdot P[R_3/R_1 \cap R_2] = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

b) V_i = "la bola extraída en la posición i es verde".

$$P[V_1 \cap V_2 \cap V_3] = P[V_1] \cdot P[V_2/V_1] \cdot P[V_3/V_1 \cap V_2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

c) S = "cada una de las tres bolas es roja o verde" = "salen 3 rojas" o "salen 2 rojas y 1 verde" o "salen 1 roja y 2 verdes" o "salen 3 verdes".

$P[3 \text{ ROJAS}] = \frac{1}{30}$ (apartado a)).

$P[3 \text{ VERDES}] = \frac{1}{12}$ (apartado b)).

Calculamos $P[2 \text{ ROJAS y } 1 \text{ VERDE}]$:

$$P[R_1 \cap R_2 \cap V_3] = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1}{12}$$

Como hay 3 posibles ordenaciones:

$R_1 \cap R_2 \cap V_3$ $\qquad$ $R_1 \cap V_2 \cap R_3$ $\qquad$ $V_1 \cap R_2 \cap R_3$

$$P[2 \text{ ROJAS y } 1 \text{ VERDE}] = 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Razonamos de manera análoga para calcular la probabilidad $P[1 \text{ ROJA Y } 2 \text{ VERDES}]$.

$$P[R_1 \cap V_2 \cap V_3] = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$$

Como hay 3 posibles ordenaciones:

$R_1 \cap V_2 \cap V_3$ $\qquad$ $V_1 \cap R_2 \cap V_3$ $\qquad$ $V_1 \cap V_2 \cap R_3$

$$P[1 \text{ ROJA y } 2 \text{ VERDES}] = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Luego tendremos que:

$$P[\text{CADA UNA DE LAS TRES BOLAS ES ROJA O VERDE}] = \frac{1}{30} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2 + 5 + 15 + 20}{60} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$$

d) S = "CADA UNA DE LAS TRES BOLAS ES ROJA O VERDE"

S' = "UNA DE LAS 3 BOLAS ES AZUL"

$$P[S'] = 1 - P[S] = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

14. **a) Lanzamos dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de no conseguir "ningún 6"? ¿Y la de conseguir "algún 6"?**

b) Responde a las mismas preguntas si lanzamos tres dados.

a) $P[\text{NINGÚN } 6] = P[(\neq 6 \text{ en } 1.^{\circ}) \cap (\neq 6 \text{ en } 2.^{\circ})] = P[\neq 6 \text{ en } 1.^{\circ}] \cdot P[\neq 6 \text{ en } 2.^{\circ}] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

$$P[\text{ALGÚN } 6] = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

b) Análogamente:

$$P[\text{NINGÚN } 6] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

$$P[\text{ALGÚN } 6] = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

Página 267

Tablas de contingencia

15. **En un centro escolar hay 1 000 alumnos y alumnas repartidos así:**

Llamamos:

A ↔ chicas, O ↔ chicos

G ↔ tiene gafas, no G ↔ no tiene gafas

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	147	135
NO USAN GAFAS	368	350

Calcula:

a) P**[A],** P**[O],** P**[G],** P**[no G]**

b) Describe los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades:

A y G, O y no G, A / G, G / A, G / O

a) $P[\text{A}] = \dfrac{135 + 350}{1000} = \dfrac{485}{1000} = 0{,}485$ $P[\text{O}] = 1 - P[\text{A}] = 1 - 0{,}485 = 0{,}515$

$P[\text{G}] = \dfrac{147 + 135}{1000} = \dfrac{282}{1000} = 0{,}282$ $P[\text{no G}] = 1 - P[\text{G}] = 1 - 0{,}282 = 0{,}718$

b) A y G → Chica con gafas. $P[\text{A y G}] = \dfrac{135}{1000} = 0{,}135$

O y no G → Chico sin gafas. $P[\text{O y no G}] = \dfrac{368}{1000} = 0{,}368$

A / G → De los que llevan gafas, cuántas son chicas. $P[\text{A / G}] = \dfrac{135}{282} = 0{,}479$

G / A → De todas las chicas, cuántas llevan gafas. $P[\text{G / A}] = \dfrac{135}{485} = 0{,}278$

G / O → De todos los chicos, cuántos llevan gafas. $P[\text{G / O}] = \dfrac{147}{515} = 0{,}285$

16. **En una empresa de 200 empleados hay 100 hombres y 100 mujeres. Sabiendo que 40 hombres y 35 mujeres trabajan con el sistema MAC y los demás lo hacen con PC:**

a) Construye una tabla de contingencia con esos datos.

b) Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y trabaje con PC: P **[H y PC]**

c) Calcula también: P **[M y MAC],** P **[M / MAC],** P **[MAC / M]**

a)

	HOMBRES	MUJERES
MAC	40	35
PC	60	65

b) $P[\text{H y PC}] = \dfrac{60}{200} = 0{,}3$

c) $P[\text{M y MAC}] = \dfrac{35}{200} = 0{,}175$ $P[\text{M / MAC}] = \dfrac{35}{75} = 0{,}467$

$P[\text{MAC / M}] = \dfrac{35}{100} = 0{,}35$

17. **Los 200 socios de un club de jubilados se distribuyen de la forma que se indica en la tabla.**

	HOMBRES	MUJERES
JUEGAN AL DOMINÓ	76	34
NO JUEGAN AL DOMINÓ	13	77

Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea un hombre.

b) Sea una mujer.

c) Juegue al dominó.

d) Sea una mujer y practique el dominó.

e) Sea un hombre que no juegue al dominó.

f) Juegue al dominó, sabiendo que es hombre.

g) Sea mujer, sabiendo que no juega al dominó.

a) $P[\text{H}] = \dfrac{76 + 13}{200} = \dfrac{89}{200} = 0{,}445$

b) $P[\text{M}] = 1 - P[\text{H}] = 0{,}555$

c) $P[\text{D}] = \dfrac{76 + 34}{200} = \dfrac{110}{200} = 0{,}55$

d) $P[\text{M y D}] = \dfrac{34}{200} = 0{,}17$

e) $P[\text{H y no D}] = \dfrac{13}{200} = 0{,}065$

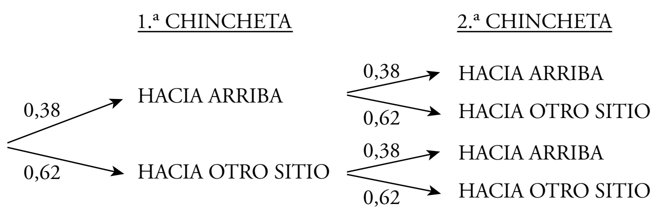
f) $P[\text{D / H}] = \dfrac{76}{89} = 0{,}854$

g) $P[\text{M / no D}] = \dfrac{77}{90} = 0{,}856$

Aplica lo aprendido

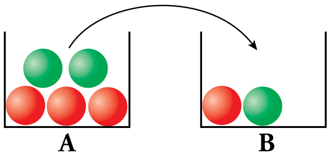
18. **Después de tirar muchas veces un modelo de chinchetas, sabemos que la probabilidad de que una cualquiera caiga con la punta hacia arriba es 0,38.**

Si tiramos dos chinchetas, ¿cuál será la probabilidad de que las dos caigan de distinta forma?



$P[\text{DISTINTA FORMA}] = 0{,}38 \cdot 0{,}62 + 0{,}62 \cdot 0{,}38 = 0{,}47$

19. **Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una de B.**



Calcula:

a) P **[1.ª roja y 2.ª roja]**

b) P **[1.ª roja y 2.ª verde]**

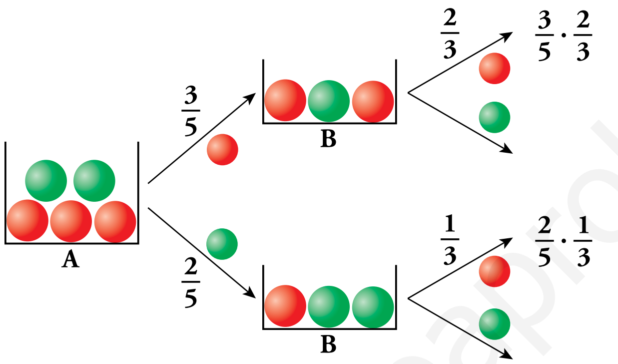
c) P **[2.ª roja / 1.ª verde]**

d) P **[2.ª roja / 1.ª roja]**

e) P **[2.ª roja]**

f) P **[2.ª verde]**

e) Para calcular esta probabilidad, ten en cuenta el diagrama.



a) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ roja}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

b) $P[1.^a \text{ roja y } 2.^a \text{ verde}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$

c) $P[2.^a \text{ roja} / 1.^a \text{ verde}] = \frac{1}{3}$

d) $P[2.^a \text{ roja} / 1.^a \text{ roja}] = \frac{2}{3}$

e) $P[2.^a \text{ roja}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

f) $P[2.^a \text{ verde}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$

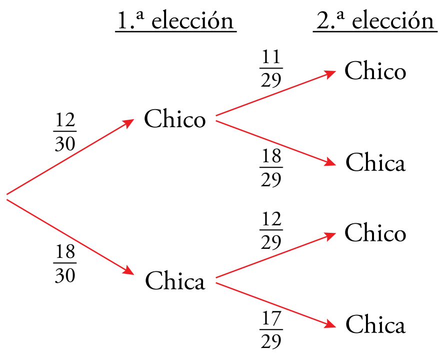
20. **En una clase hay 12 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos estudiantes de esa clase.**

Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos.

b) Sean dos chicas.

c) Sean un chico y una chica.



a) $P[2 \text{ CHICOS}] = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{22}{145}$

b) $P[2 \text{ CHICAS}] = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145}$

c) $P[1 \text{ CHICO y } 1 \text{ CHICA}] = \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} + \frac{18}{30} \cdot \frac{12}{29} = 2 \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} = \frac{72}{145}$

21. **Tiramos dos dados correctos (verde y rojo). Di cuál es la probabilidad de obtener:**

a) En los dos, la misma puntuación.

b) Un 6 en alguno de ellos.

c) En el rojo, mayor puntuación que en el verde.

a) $P[\text{los dos iguales}] = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{ningún } 6] = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

$P[\text{algún } 6] = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

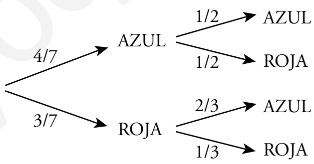
c) $P[\text{distinta puntuación}] = 1 - P[\text{los dos iguales}] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

La puntuación distinta puede ser porque el dado rojo tiene mayor puntuación o viceversa, pero con igual probabilidad.

Así:

$P[\text{mayor puntuación en rojo}] = \frac{5}{6} : 2 = \frac{5}{12}$

22. **Se extraen dos bolas de esta bolsa. Calcula la probabilidad de que ambas sean del mismo color.**



$P[\text{azul y azul}] = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{7}$

$P[\text{roja y roja}] = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$

$P[\text{ambas del mismo color}] = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

Página 268

Resuelve problemas

23. **En una bolsa hay bolas de colores, pero no sabemos cuántas ni qué colores tienen. En 1 000 extracciones (devolviendo la bola cada vez) hemos obtenido bola blanca en 411 ocasiones, bola negra en 190, bola verde en 179 y bola azul en 220.**

Al hacer una nueva extracción, di qué probabilidad asignarías a:

a) Sacar bola blanca.

b) No sacar bola blanca.

c) Sacar bola verde o azul.

d) No sacar bola negra ni azul.

e) Si en la bolsa hay 22 bolas, ¿cuántas estimas que habrá de cada uno de los colores?

Como se han hecho 1 000 extracciones:

$P[\text{BOLA BLANCA}] = \dfrac{411}{1000} = 0{,}411$ $\quad P[\text{BOLA VERDE}] = \dfrac{179}{1000} = 0{,}179$

$P[\text{BOLA NEGRA}] = \dfrac{190}{1000} = 0{,}19$ $\quad P[\text{BOLA AZUL}] = \dfrac{220}{1000} = 0{,}22$

a) $P[\text{BOLA BLANCA}] = 0{,}411$

b) $P[\text{NO BOLA BLANCA}] = 1 - 0{,}411 = 0{,}589$

c) $P[\text{BOLA VERDE O AZUL}] = 0{,}179 + 0{,}22 = 0{,}399$

d) $P[\text{NO BOLA NEGRA NI AZUL}] = 1 - (0{,}19 + 0{,}22) = 0{,}59$

e) Si hay 22 bolas:

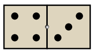
- El 41 % son blancas $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}41 = 9$ bolas blancas
- El 19 % son negras $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}19 = 4$ bolas negras
- El 18 % son verdes $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}18 = 4$ bolas verdes
- El 22 % son azules $\rightarrow$ $22 \cdot 0{,}22 = 5$ bolas azules

24. **Ana tira un dado y Eva lo tira después. ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación de Eva sea superior a la de Ana?**

EVA \ ANA	1	2	3	4	5	6
1	1 - 1	1 - 2	1 - 3	1 - 4	1 - 5	1 - 6
2	2 - 1	2 - 2	2 - 3	2 - 4	2 - 5	2 - 6
3	3 - 1	3 - 2	3 - 3	3 - 4	3 - 5	3 - 6
4	4 - 1	4 - 2	4 - 3	4 - 4	4 - 5	4 - 6
5	5 - 1	5 - 2	5 - 3	5 - 4	5 - 5	5 - 6
6	6 - 1	6 - 2	6 - 3	6 - 4	6 - 5	6 - 6

$P[\text{PUNTUACIÓN DE EVA SUPERIOR A LA DE ANA}] = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

25. **Sacamos dos fichas de un dominó. ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas la suma de sus puntuaciones sea un número primo (2, 3, 5, 7 u 11)?**

 **4 + 3 = 7 es primo**

Tenemos: $A = \{(1, 1), (2, 0), (1, 2), (3, 0), (1, 4), (2, 3), (5, 0), (6, 1), (5, 2), (3, 4), (5, 6)\}$

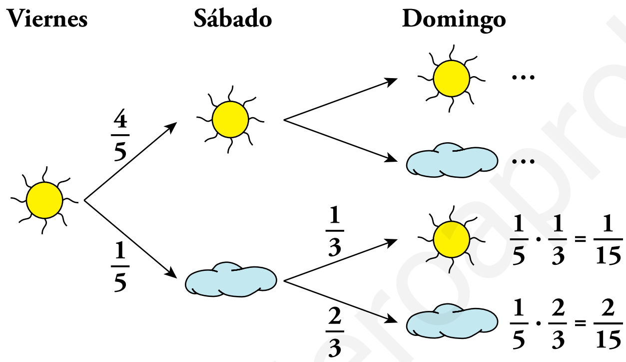
$P[A] = \frac{11}{28}$. Por tanto, P[en ambas la suma es un primo] $= \frac{11}{28} \cdot \frac{10}{27} = \frac{110}{756} = 0{,}146$.

26. **En cierto lugar se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es 4/5.**

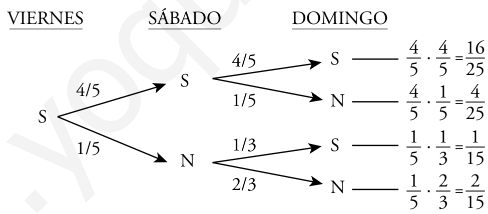
Pero si hoy está nublado, la probabilidad de que mañana lo siga estando es 2/3.

Si hoy es viernes y hace sol, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo también haga sol?

Para resolverlo, completa el diagrama en tu cuaderno y razona sobre él:



Hacemos un diagrama en árbol:



P[DOMINGO SOL] = P[VIERNES S, SÁBADO N, DOMINGO S] +

+ P[VIERNES S, SÁBADO S, DOMINGO S] =

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{15} + \frac{16}{25} = \frac{53}{75} = 0{,}7$$

27. **Javier tiene 4 monedas de cinco céntimos, 3 de veinte y 2 de un euro. Si coge dos al azar, halla la probabilidad de estos sucesos:**

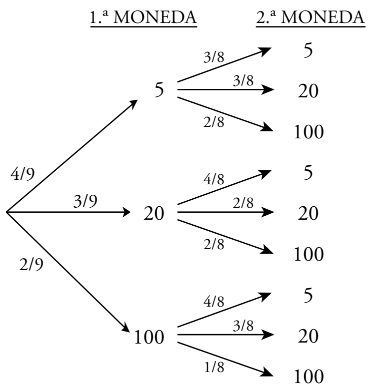
a) Que las dos sean de cinco céntimos.

b) Que ninguna sea de un euro.

c) Que saque 1,20 €.

d) Que saque más de 30 céntimos.

En el diagrama de árbol, las monedas aparecen en céntimos. 1 € = 100 cént.



a) $P[\text{DOS DE 5 CÉNT.}] = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

b) $P[\text{NINGUNA DE 1 €}] = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8}\right) + \frac{3}{9}\left(\frac{4}{8} + \frac{2}{8}\right) =$

$= \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{12}$

c) $P[\text{SACAR 1,20 €}] = P[100,20 \text{ CÉNT.}] =$

$= \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$

d) $P[> 30 \text{ CÉNT.}] = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{3}{9} \cdot \left(\frac{2}{8} + \frac{2}{8}\right) + \frac{2}{9} =$

$= \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$

NOTA. Elegir “al azar” no significa que todos los casos tengan la misma probabilidad. ¿Cómo se elige al azar una moneda de un conjunto de 9? Si la elección se hace “por insaculación” (es decir, metiéndolas en una bolsa y sacando la primera que se toque), entonces es posible que las monedas grandes tengan mayor probabilidad de ser extraídas que las pequeñas. En la resolución se ha supuesto que la probabilidad es la misma para todos los tipos de monedas.

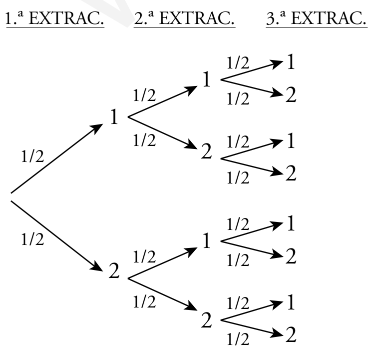
28. **En una bolsa hay 4 bolas, dos de ellas están marcadas con un 1 y las otras dos con un 2. Se hacen tres extracciones y se anotan los resultados en orden.**

Calcula la probabilidad de que el número formado sea el 121, suponiendo que la experiencia sea:

a) Con reemplazamiento.

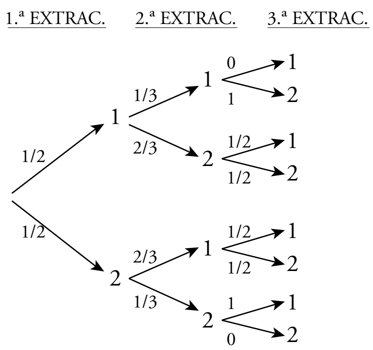
b) Sin reemplazamiento.

a)



$P[121] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b)



$P[121] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

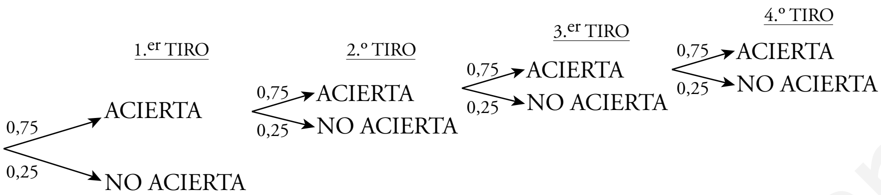
29. **Un juego consiste en tirar a canasta desde la línea de personal consecutivamente hasta que se comete un fallo. Se anotan tantos puntos como canastas encestadas. Por ejemplo: acierto-acierto-acierto-fallo son tres puntos.**

Para un jugador que habitualmente encesta el 75 % de las personales, calcula la probabilidad de que obtenga:

a) 0 puntos **b) 1 punto** **c) 2 puntos**

d) 3 puntos **e) menos de 5 puntos** **f) 6 o más puntos**

$P[\text{ACERTAR}] = 0{,}75$



a) $P[0 \text{ PUNTOS}] = 0{,}25$

b) $P[1 \text{ PUNTO}] = 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}19$

c) $P[2 \text{ PUNTOS}] = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}14$

d) $P[3 \text{ PUNTOS}] = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}105$

e) $P[\text{MENOS DE } 5 \text{ PUNTOS}] = P[0 \text{ PUNTOS}] + P[1 \text{ PUNTO}] + P[2 \text{ PUNTOS}] + P[3 \text{ PUNTOS}] +$

$+ P[4 \text{ PUNTOS}] = 0{,}25 + 0{,}19 + 0{,}14 + 0{,}105 + 0{,}079 = 0{,}764$

puesto que: $P[4 \text{ PUNTOS}] = 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 0{,}079$

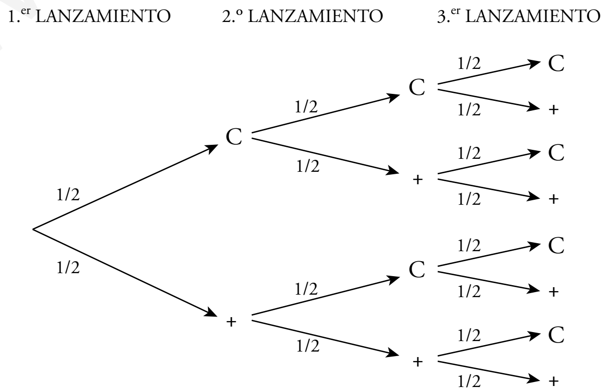
f) $P[6 \text{ O MÁS PUNTOS}] = 1 - P[\text{MENOS DE } 6 \text{ PUNTOS}] = 1 - 0{,}823 = 0{,}177$

puesto que: $P[\text{MENOS DE } 6 \text{ PUNTOS}] = P[\text{MENOS DE } 5 \text{ PUNTOS}] + P[5 \text{ PUNTOS}] =$

$= 0{,}764 + 0{,}75^5 \cdot 0{,}25 = 0{,}823$

30. **Matías y Elena juegan con una moneda. La lanzan tres veces y si sale dos veces cara y una vez cruz o dos veces cruz y una vez cara, gana Matías. Si sale tres veces cara o tres veces cruz, gana Elena.**

Calcula la probabilidad que tiene cada uno de ganar.



$P[\text{GANE ELENA}] = P[\text{C, C, C}] + P[+, +, +] = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P[\text{GANE MATÍAS}] = P[\text{C, C, +}] + P[\text{C, +, C}] + P[\text{+, C, C}] + P[+, +, \text{C}] +$

$+ P[+, \text{C}, +] + P[\text{C}, +, +] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

31. **Una familia tiene 4 hijos. Si la probabilidad de nacer niña es 0,51 y la de ser niño 0,49:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean todos varones?

b) Calcula la probabilidad de que todas sean mujeres.

c) ¿Qué probabilidad hay de que haya alguna mujer?

d) ¿Qué probabilidad hay de que haya dos chicos y dos chicas?

a) P[4 VARONES] = $0{,}49^4 = 0{,}058$

b) P[4 MUJERES] = $0{,}51^4 = 0{,}068$

c) P[ALGUNA MUJER] = 1 – P[NINGUNA MUJER] = 1 – P[4 VARONES] = 2 – 0,058 = 0,942

d) P[MMHH] = $0{,}51 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}49 = 0{,}0624$

Pero hay 6 formas posibles de conseguir 2 hombres y 2 mujeres:

MMHH MHMH MHHM HMMH HMHM HHMM

Por tanto, la probabilidad pedida es:

P[2 MUJERES y 2 HOMBRES] = $6 \cdot 0{,}0624 = 0{,}374$

32. **¿Cuántas quinielas hay que hacer para asegurarse ocho resultados? Una persona que siga esa estrategia rellena los restantes al azar, ¿qué probabilidad tiene de acertar los 14?**

$VR_{3,\,8} = 3^8 = 6\,561$ quinielas hay que rellenar para acertar 8 resultados.

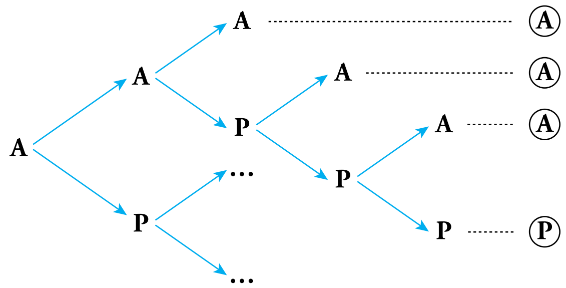
Para cada una de las 6 561 quinielas rellenas tengo $VR_{3,\,6} = 3^6 = 729$ formas de completarlas para cubrir todas las posibilidades. Solo una de ellas será la correcta. Así:

P[ACERTAR 14 / RELLENO TODAS LAS DE 8 POSIBLES] = $\dfrac{1}{729}$

Página 269

33. **Andrés y Pablo están jugando al tenis. Ambos son igual de buenos. El partido es a cinco sets y el primero lo ha ganado Andrés.**

¿Cuál es la probabilidad de que acabe ganando Pablo?

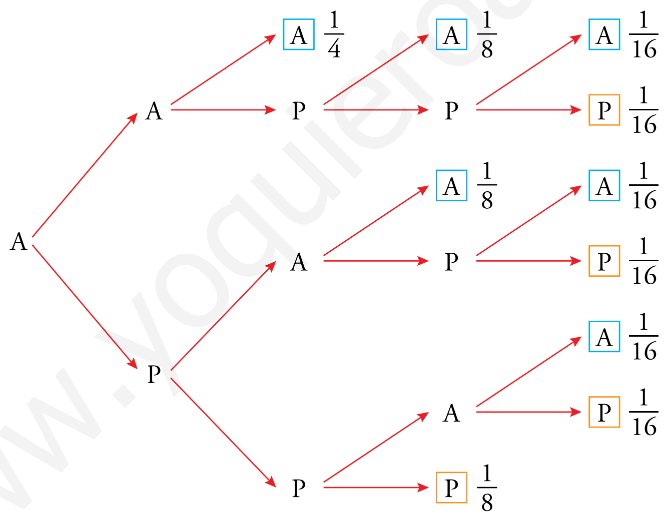


Completa en tu cuaderno el diagrama y utilízalo para resolver el problema.

$$P[\text{GANA ANDRÉS}] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = \frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{2}{16} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} =$$

$$= \frac{2}{4}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8}+\frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$



$$P[\text{GANA PABLO}] = \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

34. **Repite el problema anterior suponiendo que en cada set, la probabilidad de que lo gane Pablo es 0,6.**

$$P[\text{GANA PABLO}] = (0{,}4)\cdot(0{,}6)^3 + (0{,}4)\cdot(0{,}6)^3 + (0{,}4)\cdot(0{,}6)^3 + 0{,}6^3 = 0{,}4752$$

35. Cinco amigos y amigas van juntos al cine y se reparten los asientos (consecutivos) al azar.

¿Cuál es la probabilidad de que Alberto quede junto a Julia?

1	2	3	4	5

Casos posibles $\rightarrow$ $P_5 = 5! = 120$ formas diferentes de sentarse los cinco en línea.

Casos favorables $\rightarrow$ aquellos en los que Alberto y Julia están juntos.

Podrán estar en:

1, 2 o 2, 3 o 3, 4 o 4, 5 $\rightarrow$ 4 posibilidades

Hay 2 formas diferentes por cada posibilidad anterior, pues puede ser A - J o J - A.

Hay, por tanto, $4 \cdot 2 = 8$ opciones diferentes.

Para cada una de esas opciones las otras 3 personas podrán ocupar los 3 asientos restantes de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas.

Luego hay un total de $8 \cdot 6 = 48$ formas diferentes de sentarse los 5 amigos de manera que Alberto y Julia estén juntos.

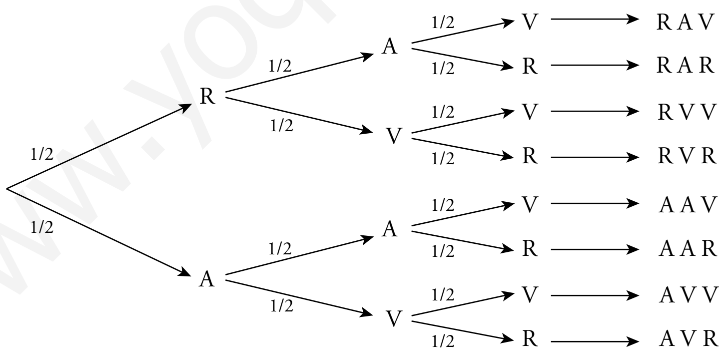
Así:

$P[\text{A y J juntos}] = \dfrac{48}{120} = 0{,}4$

36. Tenemos tres cartulinas. La primera tiene una cara roja (R), y la otra, azul (A); la segunda A y verde (V), y la tercera, V y R.

Las dejamos caer sobre una mesa. ¿Qué es más probable, que dos de ellas sean del mismo color o que las tres sean de colores diferentes?

Hacemos un diagrama en árbol:



$P[\text{2 IGUALES}] = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$P[\text{TODAS DISTINTAS}] = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

Es más probable que salgan dos colores iguales.

37. **Si juegas un boleto de la Lotería Primitiva, ¿qué probabilidad tienes de ganar el primer premio? (En un boleto se marcan 6 números entre el 1 y el 49).**

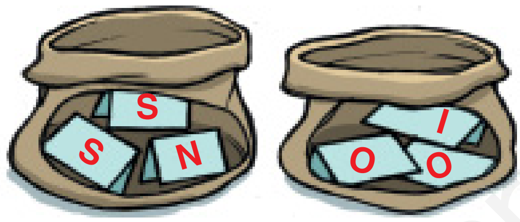
Casos posibles: $C_{49,\,6} = \dfrac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Casos favorables: 1

$$P[\text{GANAR EL PRIMER PREMIO}] = \frac{1}{\dfrac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} =$$

$$= \frac{1}{13\,983\,816}$$

38. **Extraemos una tarjeta de cada una de estas bolsas:**



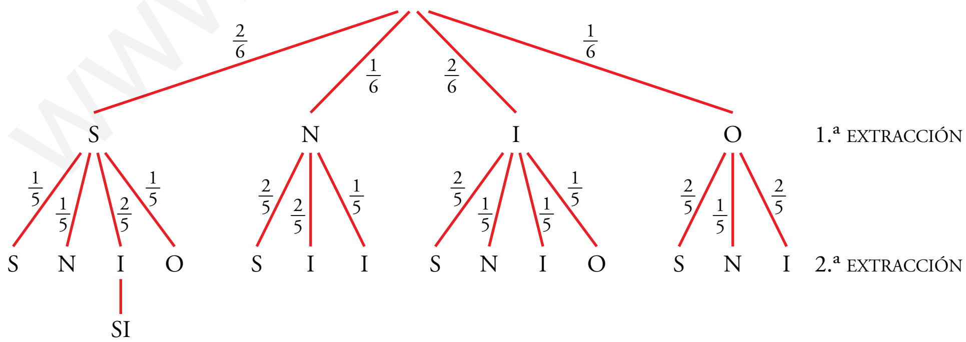
a) Calcula la probabilidad de obtener una S y una I, "SI".

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener "NO"?

	S	S	N
I	SI	SI	NI
O	SO	SO	NO
O	SO	SO	NO

a) $P[\text{SI}] = \dfrac{2}{9}$ b) $P[\text{NO}] = \dfrac{2}{9}$

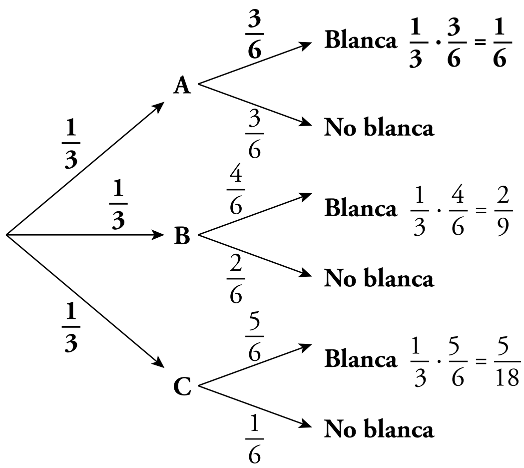
39. **En una bolsa tenemos las letras S, S, N, I, I, O. Sacamos dos letras. ¿Cuál es la probabilidad de que con ellas se pueda escribir SI?**



$P[\text{SI}] = \dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{15}$

Problemas "+"

40. **¿Cuál es la probabilidad de obtener bola blanca al elegir al azar con probabilidad 1/3 una de estas bolsas y extraer de ella una bola?**



$$P[\text{BLANCA}] = \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

41. **Lanzamos tres dados y anotamos la mayor puntuación. Calcula la probabilidad de que sea 5.**

Al tirar 3 dados, el número de posibilidades (casos posibles) es $6^3 = 216$. Vamos a contar en cuántas de ellas la mayor puntuación es 5 (hay algún 5 pero ningún 6). He aquí los resultados:

PUNTUACIONES	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	
	1	2	3	4	5	2	3	4	5	3	4	5	4	5	5	
	5	5	5	5	5	2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
POSIBILIDADES	3	6	6	6	3	3	6	6	3	3	6	3	3	3	1	TOTAL: 61

El recuento lo hemos organizado ordenando las tres puntuaciones de menor a mayor. A cada combinación le hemos asignado el número de ordenaciones que se pueden dar con esos resultados. Por ejemplo:

1 1 5   1 5 1   5 1 1 $\rightarrow$ Son 3 posibilidades.

Esto ocurre siempre que haya dos puntuaciones iguales y otra distinta. Si las tres puntuaciones son distintas, hay 6 ordenaciones:

1 2 5   2 1 5   5 1 2

1 5 2   2 5 1   5 2 1

Si las tres puntuaciones coinciden, obviamente solo hay una posible ordenación.

El total de posibilidades es 61. Por tanto, la probabilidad de que al lanzar tres dados la mayor puntuación sea 5 es:

$$P[\text{LA MAYOR ES UN } 5] = \frac{61}{216}$$

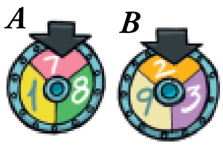
42. **Lanzamos tres dados y anotamos la puntuación mediana. Calcula la probabilidad de que sea 5.**

Procedemos de forma similar a como lo hemos hecho en el ejercicio anterior.

PUNTUACIÓN	1 5 5	2 5 5	3 5 5	4 5 5	5 5 5	1 5 6	2 5 6	3 5 6	4 5 6	5 5 6	
POSIBILIDADES	3	3	3	3	1	6	6	6	6	3	TOTAL: 40

$P[\text{EL MEDIANO ES } 5] = \frac{40}{216} = \frac{5}{27}$

43. **Se hace girar cada una de estas ruletas, y gana la que consiga la puntuación más alta.**



Calcula la probabilidad de que gane *A* y la de que gane *B*.

Modifica las puntuaciones de la ruleta *A* para que le gane a la *B*, de modo que:

— Sus puntuaciones sumen 15.

— Los números sean distintos de los de *B*.

		A		
		1	**7**	**8**
B	**2**	1-2	7-2	8-2
	3	1-3	7-3	8-3
	9	1-9	7-9	8-9

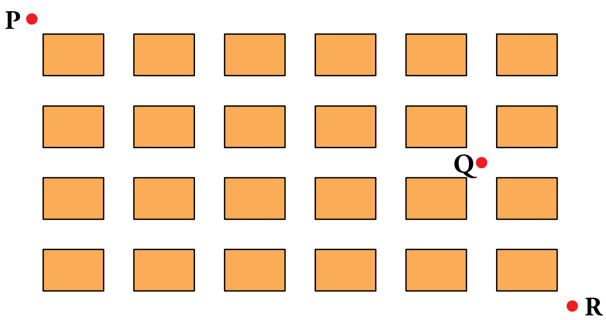
$P[\text{GANE } A] = \frac{4}{9}$

$P[\text{GANE } B] = \frac{5}{9}$

Si *A* tiene los números 4, 5 y 6 (suman 15 y son diferentes de los de *B*):

$P[\text{GANE } A] = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

44. **Lupe va a ir de P a R. Sergio decide esperarla en Q. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?**



Casos posibles → caminos posibles de P a R

Casos favorables → caminos posibles de P a R que pasan por Q

Casos posibles $\rightarrow$ $C_{10,\,4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ caminos

Caminos de P a Q $\rightarrow$ $C_{7,\,2} = \dfrac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ caminos

Caminos de Q a R $\rightarrow$ $C_{3,\,2} = \dfrac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$ caminos

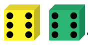
Caminos de P a R pasando por Q = 21 · 3 = 63 caminos

$P[\text{SE ENCUENTRAN}] = \dfrac{63}{210} = \dfrac{3}{10}$

45. **Tiramos tres dados. Calcula estas probabilidades:**

a) El valor mediano es 6. **b) La suma es 10.** **c) El menor es 2.**

a) Casos favorables al suceso “6” = “EL MEDIANO ES 6”. Los contamos:

- *a* . Donde *a* puede ser 1, 2, 3, 4, 5. Son 5 casos.

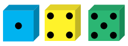
  Cada uno admite 3 ordenaciones (*a* 6 6; 6 *a* 6 y 6 6 *a*). Hay, pues, 15 casos.

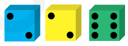
- . Solo 1 caso.

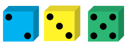
En total hay 16 casos favorables. $P[6] = \dfrac{16}{216} = 0{,}074$

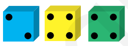
b) Para obtener suma 10 necesito:

 6 colocaciones diferentes

 6 colocaciones diferentes

 3 colocaciones diferentes

 6 colocaciones diferentes

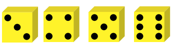
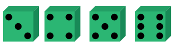
 3 colocaciones diferentes

 3 colocaciones diferentes

Luego: casos favorables = 6 · 3 + 3 · 3 = 27

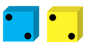
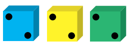
Así: $P[\text{SUMA } 10] = \dfrac{27}{216} = \dfrac{1}{8}$

c) Para que el menor sea 2 puede ocurrir:

-  *a b* $\left\{ \begin{array}{l} a = \\ b = \end{array} \right.$   4 · 4 = 16 posibilidades

  De ellas $\left\{ \begin{array}{l} \text{4 (números repetidos) tienen 3 posibles ordenaciones.} \\ \text{12 (sin repeticiones) tienen } 3! = 6 \text{ posibles ordenaciones.} \end{array} \right.$

  Así, hay 4 · 3 + 12 · 6 = 12 + 72 = 84 casos.

-  *a* $\rightarrow$ 4 posibilidades · 3 ordenaciones = 12 casos
-  $\rightarrow$ 1 caso

Total casos favorables = 84 + 12 + 1 = 97

$P[\text{EL MENOR ES } 2] = \dfrac{97}{216}$

46. Una oposición consta de 50 temas. Salen 3 de ellos al azar y se elige uno. Un opositor sabe 30. ¿Cuál es la probabilidad de que salga uno de los que sabe?

Acaso te convenga calcular la probabilidad de que no salga ninguno que se sepa.

A = "al menos sale uno de los que sabe".

A' = "no sale ninguno de los que sabe".

$P[A'] = P[1.^{\text{o}} \text{ NO SABE}] \cdot P[2.^{\text{o}} \text{ NO SABE} / 1.^{\text{o}} \text{ NO SABE}] \cdot P[3.^{\text{o}} \text{ NO SABE} / 1.^{\text{o}} \text{ Y } 2.^{\text{o}} \text{ NO SABE}] =$

$$= \frac{20}{50} \cdot \frac{19}{49} \cdot \frac{18}{48} = 0{,}06$$

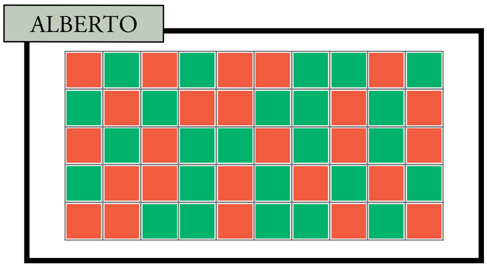
$P[A] = 1 - P[A'] = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$

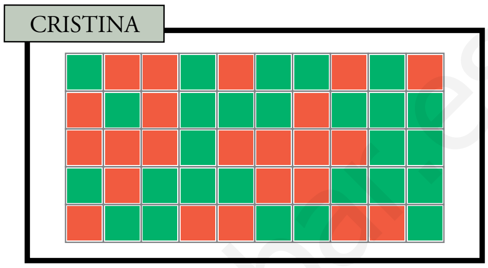
Página 270

Lee y comprende

Tarea con trampa

Alberto y Cristina rellenan, para un trabajo de clase, un tablero de 50 casillas del siguiente modo: avanzando de izquierda a derecha y de arriba abajo, se decide a cara o cruz si la casilla se colorea de rojo o de verde.



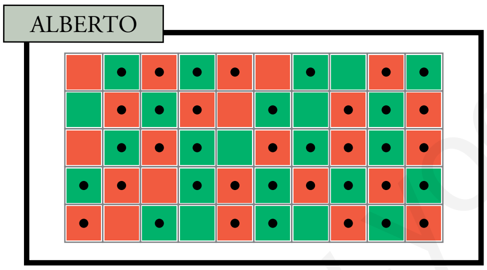


Pero el caso es que uno ha hecho el trabajo concienzudamente, tirando una moneda por cada casilla. Y el otro, con trampa, lo ha rellenado en un momento, caprichosamente.

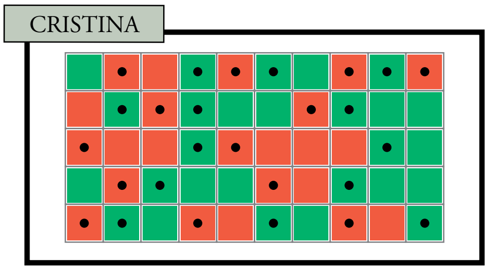
Sin embargo, el profesor ha puesto mala nota al que no ha trabajado. ¿Cómo lo ha descubierto?

- **¿Sabrías tú cómo descubrir al que ha hecho la trampa?**

Señalamos con un punto las casillas que tienen un color diferente de la anterior:



Cambios de color: 38
Cambios posibles: 49
Frecuencia relativa: 38/49 → 78 %



Cambios de color: 26
Cambios posibles: 49
Frecuencia relativa: 26/49 → 53 %

Ha hecho trampas Alberto, porque su frecuencia relativa (78 %) se separa mucho del teórico 50 %.

Comprende y exprésate

Azar y esperanza

- **¿Cuál sería la esperanza del juego cambiando un poco el enunciado?**

  "Tiramos un dado. Si sale menos de tres, ganas 6 €; en caso contrario, pagas 3 € a la banca".

  De cada seis tiradas ganarás en dos y perderás en cuatro: 6 € · 2 – 3 € · 4 = 12 – 12 = 0

  Pero en este caso la esperanza es 0 y, por tanto, el juego es equitativo, pues, a la larga, ni ganarás ni perderás.

- **¿Qué dirías de un juego de lotería que por cada 1 000 euros vendidos entrega 800 euros en premios?**

  Este juego no es equitativo, pues de cada 1 000 € siempre hay 200 que no se entregan en premios.

  Su esperanza será negativa: siempre gana quien vende los números.

Página 271

Entrénate resolviendo problemas

- **Raquel es una chica de 30 años, bastante enérgica.**

  Estudió Matemáticas y acabó entre los primeros de su promoción.

  Cuando era estudiante militó en movimientos sociales, especialmente en grupos ecologistas y contra la discriminación.

  ¿Cuál de estas dos afirmaciones te parece más probable?

  a) Raquel trabaja en un banco.

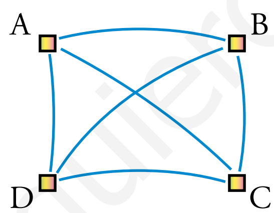
  b) Raquel trabaja en un banco y es una activa militante feminista.

  A primera vista, y por las condiciones iniciales, parece que b) es la opción más aceptable, pero hemos de observar que b) contiene la condición de a) y otra más. Por tanto, la probabilidad de que ocurra b) siempre será menor que la de a).

- **¿Cuántos tramos de carretera son necesarios para comunicar cuatro poblaciones de forma que desde cada una se pueda llegar a cualquier otra sin pasar por una tercera?**

  ¿Y para comunicar cinco poblaciones? ¿Y para comunicar n poblaciones?

  - Para cuatro poblaciones:



Desde cada población hay que construir un tramo de carretera hacia las otras tres ($4 \cdot 3 = 12$).

De esta forma contamos cada tramo dos veces, el que va de una población A a otra B y el que va de B a A. Hemos de dividir por 2.

Para cuatro poblaciones se necesitan $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ tramos de carretera.

  - Para cinco poblaciones $\rightarrow$ $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ tramos de carretera.

  - Para n poblaciones $\rightarrow$ $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ tramos de carretera.

• **Estás junto a una fuente y dispones de un cántaro de 10 litros y otro de 6 litros.**

a) ¿Cómo te las ingeniarías para medir, exactamente, 2 litros de agua?

b) ¿Qué cantidades distintas puedes medir con los cántaros de que dispones?

a)

10 litros	6 litros	
10	0	Llenamos el de 10 litros y vaciamos su contenido en el de 6 *l*.
4	6	Quedan 4 y 6 litros. Vaciamos el envase de 6 *l*.
4	0	Quedan 4 y 0 litros. Ponemos los 4 *l* en el envase de 6 *l*.
0	4	Quedan 0 y 4 litros. Llenamos el de 10 litros.
10	4	Hay 10 y 4 litros. Con el de 10 *l* rellenamos el de 6 litros.
8	6	Quedan 8 y 6 litros. Vaciamos el de 6 litros.
8	0	Quedan 8 y 0 *l*. Llenamos el de 6 *l* con el contenido del de 10.
2	6	Quedan 2 y 6 litros. Ya hemos conseguido los 2 litros.

b) Se pueden conseguir 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 y 16 litros.

Autoevaluación

1. **Tenemos una bolsa con cuatro bolas numeradas: 0, 1, 2 y 3. Y disponemos de un dado normal. Extraemos una bola de la bolsa, lanzamos el dado y sumamos los dos resultados obtenidos. Llamamos x a la suma.**

a) Describe el espacio muestral de esta experiencia y asígnale probabilidad a cada uno de los casos.

b) A es el suceso "$x < 7$" y B es el suceso "$4 < x < 9$". Halla, pormenorizando todos sus casos, $A \cup B$, $A \cap B$, A' y $(A \cup B)'$.

c) Halla las probabilidades de los sucesos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, A' y $(A \cup B)'$.

a)

SUMA	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$P[1] = P[9] = \frac{1}{24}$

$P[3] = P[7] = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

$P[2] = P[8] = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

$P[4] = P[5] = P[6] = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{5, 6, 7, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A' = \{7, 8, 9\}$

$A \cap B = \{5, 6\}$

$(A \cup B)' = \{9\}$

c) $P[A] = P[1] + P[2] + \ldots + P[6] = \frac{1+2+3+4+4+4}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

$P[B] = P[5] + P[6] + P[7] + P[8] = \frac{4+4+3+2}{24} = \frac{13}{24}$

$P[A \cup B] = 1 - P[9] = \frac{23}{24}$

$P[A \cap B] = P[5] + P[6] = \frac{4+4}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

$P[A'] = P[7] + P[8] + P[9] = \frac{3+2+1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

$P[(A \cup B)'] = P[9] = \frac{1}{24}$

2. Tenemos dos bolsas, A y B, con estas bolas:

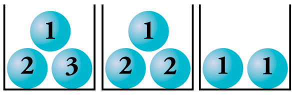
A: 7 blancas y 3 negras.

B: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas.

Tirando un dado, si sale 1 o 2 extraemos una bola de A. Si sale 3, 4, 5 o 6, extraemos una bola de B. Calcula la probabilidad de extraer la bola roja.

$$P[\text{ROJA}] = 0 \cdot P[1 \text{ o } 2] + \frac{7}{10} \cdot P[3, 4, 5 \text{ o } 6] = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$

3. Extraemos una bola de cada caja. ¿Cuál es la probabilidad de que sumen 5?

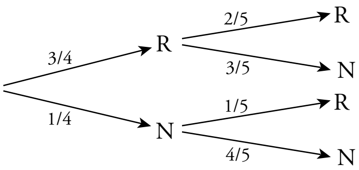


Como en la última siempre sale 1, el problema se reduce a sacar 4 en las dos primeras.

$$P[4] = P[2] \cdot P[2] + P[3] \cdot P[1] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Así, la probabilidad de sacar 5 entre las tres sumas es $\frac{1}{3}$.

4. La urna A tiene 3 bolas rojas y 1 negra, y la B, 3 negras y 1 roja. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.



$$P[\text{R y R}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

5. En un grupo de hombres, unos llevan bigote, y otros, no. ¿Qué significan los sucesos BIG/AFRIC y AFRIC/BIG? Halla sus probabilidades.

	EUROPA	ÁFRICA	AMÉRICA
BIG	2	6	4
NO BIG	8	4	6

BIG/AFRIC → Los que tienen bigote entre los africanos. $P[\text{BIG/AFRIC}] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

AFRIC/BIG → Los que son africanos entre los que tienen bigote. $P[\text{AFRIC/BIG}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

6. Extraemos tres naipes de una baraja de 40 cartas. Halla la probabilidad de que todas ellas sean ASES o REYES.

$$P[\text{TODAS SON AS O REY}] = P[(1.^{a} \text{ AS O REY}) \cap (2.^{a} \text{ AS O REY}) \cap (3.^{a} \text{ AS O REY})] =$$

$$= \frac{8}{40} \cdot \frac{7}{39} \cdot \frac{6}{38} = \frac{7}{1\,235} = 0{,}006$$

Autoevaluación

1. Tenemos una bolsa con cuatro bolas numeradas: 0, 1, 2 y 3. Y disponemos de un dado normal. Extraemos una bola de la bolsa, lanzamos el dado y sumamos los dos resultados obtenidos. Llamamos x a la suma.

a) Describe el espacio muestral de esta experiencia y asígnale probabilidad a cada uno de los casos.

b) A es el suceso "$x < 7$" y B es el suceso "$4 < x < 9$". Halla, pormenorizando todos sus casos, $A \cup B$, $A \cap B$, A' y $(A \cup B)'$.

c) Halla las probabilidades de los sucesos A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, A' y $(A \cup B)'$.

a)

SUMA	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$P[1] = P[9] = \frac{1}{24}$

$P[3] = P[7] = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

$P[2] = P[8] = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

$P[4] = P[5] = P[6] = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{5, 6, 7, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A' = \{7, 8, 9\}$

$A \cap B = \{5, 6\}$

$(A \cup B)' = \{9\}$

c) $P[A] = P[1] + P[2] + \ldots + P[6] = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

$P[B] = P[5] + P[6] + P[7] + P[8] = \frac{4 + 4 + 3 + 2}{24} = \frac{13}{24}$

$P[A \cup B] = 1 - P[9] = \frac{23}{24}$

$P[A \cap B] = P[5] + P[6] = \frac{4 + 4}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

$P[A'] = P[7] + P[8] + P[9] = \frac{3 + 2 + 1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

$P[(A \cup B)'] = P[9] = \frac{1}{24}$

2. **Tenemos dos bolsas, A y B, con estas bolas:**

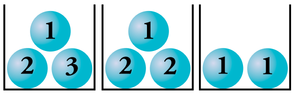
A: 7 blancas y 3 negras.

B: 1 blanca, 2 negras y 7 rojas.

Tirando un dado, si sale 1 o 2 extraemos una bola de A. Si sale 3, 4, 5 o 6, extraemos una bola de B. Calcula la probabilidad de extraer la bola roja.

$$P[\text{ROJA}] = 0 \cdot P[1 \text{ o } 2] + \frac{7}{10} \cdot P[3, 4, 5 \text{ o } 6] = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{6} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$

3. **Extraemos una bola de cada caja. ¿Cuál es la probabilidad de que sumen 5?**

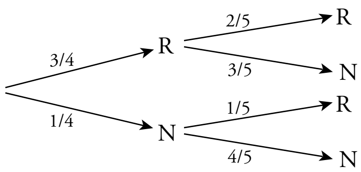


Como en la última siempre sale 1, el problema se reduce a sacar 4 en las dos primeras.

$$P[4] = P[2] \cdot P[2] + P[3] \cdot P[1] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Así, la probabilidad de sacar 5 entre las tres sumas es $\frac{1}{3}$.

4. **La urna A tiene 3 bolas rojas y 1 negra, y la B, 3 negras y 1 roja. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B. Calcula la probabilidad de que ambas bolas sean rojas.**



$$P[\text{R y R}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

5. **En un grupo de hombres, unos llevan bigote, y otros, no. ¿Qué significan los sucesos BIG/AFRIC y AFRIC/BIG? Halla sus probabilidades.**

	EUROPA	ÁFRICA	AMÉRICA
BIG	2	6	4
NO BIG	8	4	6

BIG/AFRIC → Los que tienen bigote entre los africanos. $P[\text{BIG/AFRIC}] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

AFRIC/BIG → Los que son africanos entre los que tienen bigote. $P[\text{AFRIC/BIG}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

6. **Extraemos tres naipes de una baraja de 40 cartas. Halla la probabilidad de que todas ellas sean ASES o REYES.**

$$P[\text{TODAS SON AS O REY}] = P[(1.^{\text{a}} \text{ AS O REY}) \cap (2.^{\text{a}} \text{ AS O REY}) \cap (3.^{\text{a}} \text{ AS O REY})] =$$

$$= \frac{8}{40} \cdot \frac{7}{39} \cdot \frac{6}{38} = \frac{7}{1235} = 0{,}006$$