

SUCESIONES, PROGRESIONES E INDUCCIÓN

- Expresa el término general de las sucesiones cuyos primeros términos son:
 - $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$
 - $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \frac{10}{9}, \dots$
 - 1, 2, 6, 24, 120, ...
 - $\frac{3}{3}, \frac{9}{6}, \frac{27}{9}, \frac{81}{12}, \dots$
 - $\frac{3}{1}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{9}, -\frac{9}{16}, \frac{11}{25}, \dots$
 - 1, 4, 16, 64, ...
- En una progresión aritmética el 4º término es 16 y el 10º término es 88. Halla la diferencia común y el primer término.
- En una progresión aritmética el primer término es 4 y la diferencia común 3. La suma de los n primeros términos es 175. Halla el valor de n .
- ¿Cuántos números impares consecutivos, comenzando en 1, deben sumarse para alcanzar un total de 1681?
- ¿Cuántos son los múltiplos de 7 comprendidos entre 16 y 200? Halla su suma.
- Las medidas de los ángulos de un hexágono están en progresión aritmética y el menor mide 40°. Calcula los demás.
- Una progresión geométrica tiene como primer término 2 y la razón común es 1,05. Halle el valor del menor de los términos mayores que 500.
- El segundo término de una progresión geométrica es 9 y el sexto 1/9. Calcula el primer término.
- Halla x para que los números representados por $x + 2$, $3x + 1$, $7x - 1$ sean tres términos consecutivos de una progresión geométrica.
- El segundo término de una progresión geométrica es $-\frac{40}{3}$. La suma de los infinitos términos de dicha progresión es 12. Halle el primer término y la razón común.
- El producto de tres términos consecutivos de una progresión geométrica es 512 y su suma es 42. Calcúlalos.
- La razón de una progresión geométrica es r . El primer término de la progresión es igual a la suma de siete veces el tercer término y seis veces el cuarto término. Demuestra que $6r^3 + 7r^2 - 1 = 0$ y halla los tres posibles valores diferentes de r .
- Se deja caer un balón de goma desde una altura de 81 m. Cada vez que toca el suelo rebota $\frac{2}{3}$ de la distancia desde la que ha caído.
 - Halla la altura que alcanza el balón entre el 5º y 6º rebote
 - ¿Cuál es la distancia total recorrida por el balón desde que se deja caer hasta que toca el suelo por sexta vez?
 - Suponga que el balón sigue rebotando indefinidamente. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el balón?
- En cierto país sólo disponen de monedas de 3 y 5 unidades monetarias. Demuestra que, con dichas monedas, se podría pagar cualquier cantidad entera mayor o igual que 8.
- Demuestra por el método de inducción que $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, ($n \in \mathbb{N}$)
- Demuestra por el método de inducción que $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$, ($n \in \mathbb{N}$)
- Demuestra por el método de inducción que todos los números de la forma $2^{2n} - 3n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) son divisibles entre 9

① a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ b) $a_n = \frac{2n}{2n-1}$ c) $a_n = n!$

d) $a_n = \frac{3^n}{3n}$ e) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n^2}$ f) $a_n = 4^{n-1}$

② $a_4 = 16$ | $a_1 + 3d = 16$
 $a_{10} = 88$ | $a_1 + 9d = 88$
 $6d = 72 \Rightarrow d = 12 \rightarrow a_1 = -20$


③ $a_1 = 4$ | $175 = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m$; $350 = (4 + 4 + 3(m-1))m$; $350 = (3m+5)m$;
 $d = 3$ | $3m^2 + 5m - 350 = 0$
 $S_m = 175$ | $m = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4200}}{6} = \frac{-5 \pm 65}{6}$ 10
~~-35~~

④ $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = 1681$
 $1681 = \frac{1 + 2n-1}{2} \cdot n$; $1681 = n^2$; $n = 41$ Debemos sumar los 41 números impares primeros

⑤ $16 < 7n < 200$
 $\frac{16}{7} = 2'2857\dots$ El primer múltiplo de 7 será $7 \times 3 = 21$
 $\frac{200}{7} = 28'5714\dots$ El último $\dots \dots \dots$ $7 \times 28 = 196$

$21 + 28 + \dots + 196 = \frac{21 + 196}{2} \cdot 26 = 2821$
 Son $28 - 3 + 1 = 26$ sumandos

⑥ $a_1 = 40^\circ$ | $\frac{40 + a_6}{2} \cdot 6 = 720$
 $S_6 = 720$ | $(40 + 40 + 5d) \cdot 3 = 720$
 $80 + 5d = 240 \Rightarrow d = 32^\circ \rightarrow 40^\circ, 72^\circ, 104^\circ, 136^\circ, 168^\circ, 200^\circ$



⑦ $a_1 = 2$ | $a_m = 2 \cdot 105^{m-1}$; $a_m \geq 500 \Rightarrow 2 \cdot 105^{m-1} > 500$
 $r = 105$ | $105^{m-1} > 250$
 $\log 105^{m-1} > \log 250$
 $(m-1) \log 105 > \log 250 \Rightarrow m-1 > \frac{\log 250}{\log 105} = 113'1675$
 $m > 114'1675 \rightarrow m = 115$
 $a_{115} = 2 \cdot 105^{115-1} = 520'7270$

⑧ $a_2 = 9$ | $a_1 \cdot r = 9 \rightarrow a_1 = \frac{9}{r}$
 $a_6 = \frac{1}{9}$ | $a_1 \cdot r^5 = \frac{1}{9}$
 $\frac{9}{r} r^5 = \frac{1}{9}$; $r^4 = \frac{1}{81}$; $r = \pm \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{a_2}{r}$ 27
-27

9) $x+2, 3x+1, 7x-1$

$r = \frac{3x+1}{x+2} = \frac{7x-1}{3x+1} \Rightarrow (3x+1)^2 = (7x-1)(x+2) ; 9x^2+6x+1 = 7x^2+14x-x-2 ;$

$2x^2-7x+3=0 ; x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \begin{cases} 3 \rightarrow 5, 10, 20 \\ 1/2 \rightarrow 5/2, 5/2, 5/2 \end{cases}$

10) $a_2 = -\frac{40}{3} \rightarrow a_1 r = -\frac{40}{3} ; 12(1-r)r = -\frac{40}{3} ; 36(r-r^2) = -40 ;$
 $S_{\infty} = 12 \rightarrow \frac{a_1}{1-r} = 12 \rightarrow a_1 = 12(1-r)$

$0 = 36r^2 - 36r - 40 ; 0 = 9r^2 - 9r - 10 ; r = \frac{9 \pm \sqrt{81+360}}{18} = \frac{9 \pm 21}{18}$
 Para que exista S_{∞} debe ser $|r| < 1$
 $\frac{5}{3}$ (cancelado)
 $-\frac{2}{3} \rightarrow a_1 = \frac{a_2}{r} = 20$

11) $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 512 ; \frac{a_2}{r} \cdot a_2 \cdot a_2 r = 512 ; a_2^3 = 512 ; a_2 = 8$
 $a_1 + a_2 + a_3 = 42$

$\frac{8}{r} + 8 + 8r = 42 ; 8 + 8r + 8r^2 = 42r ; 8r^2 - 34r + 8 = 0 ;$
 $4r^2 - 17r + 4 = 0 ; r = \frac{17 \pm \sqrt{289-64}}{8} = \frac{17 \pm 15}{8}$
 $4 \rightarrow a_1 = \frac{8}{4} = 2 ; a_3 = 8 \cdot 4 = 32$
 $\frac{1}{4} \rightarrow a_1 = \frac{8}{1/4} = 32 ; a_3 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$

Son 2, 8, 32

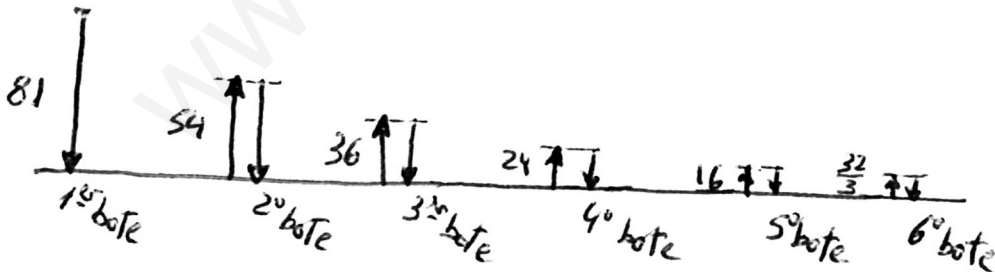
12) $a_1 = 7a_3 + 6a_4$
 $a_1 = 7a_1 r^2 + 6 \cdot a_1 r^3 ; 1 = 7r^2 + 6r^3 ; 0 = 6r^3 + 7r^2 - 1 \checkmark$

$-1 \mid \begin{array}{cccc} 6 & 7 & 0 & -1 \\ & -6 & -1 & 1 \\ \hline 6 & 1 & -1 & 0 \end{array}$

$6r^2 + r - 1 = 0 ; r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} \begin{cases} 1/3 \\ -1/2 \end{cases}$

$r = \begin{cases} -1 \\ 1/3 \\ -1/2 \end{cases}$

13)



a) $81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{3} \text{ m}$

b) $81 + 54 + 54 + 36 + 36 + 24 + 24 + 16 + 16 + \frac{32}{3} + \frac{32}{3} =$
 $= 81 + 2(54 + 36 + 24 + 16 + \frac{32}{3}) = \frac{1087}{3} \text{ m}$

c) $81 + 2(54 + 36 + \dots) = 81 + 2 \cdot \frac{54}{1 - \frac{2}{3}} = 81 + \frac{108}{1/3} = 405 \text{ m}$

14) 1º Método

Distinguiremos tres casos: las cantidades múltiples de 3
las " " " " más 1
las " " " " menos 1

• Las cantidades múltiples de 3 las pagaremos únicamente con monedas de tres unidades.

$C=3m \rightarrow$ 'n' monedas de tres,

• Las cantidades múltiples de 3 más 1 las pagaremos con:

$C=3m+1 = 3m+10-9 = 3(m-3)+2 \cdot 5 \rightarrow$ 'm-3' monedas de tres
2 monedas de cinco

No hay problema con la resta 'm-3' porque como la cantidad es mayor que 8, m debe ser mayor o igual que 3.

• Las cantidades múltiples de 3 menos 1 las pagaremos con:

$C=3m-1 = 3m-(6-5) = 3(m-2)+5 \rightarrow$ 'm-2' monedas de tres
1 moneda de cinco

2º Método

En cada cantidad contabilizamos por separado las unidades, decenas, centenas etc. Las decenas, centenas, etc, las pagaremos con monedas de cinco.

Por ejemplo: 70 serían 14 monedas de cinco
200 " 40 " " "

Para las unidades observamos que los múltiplos de 3 cubren todas las posibilidades del 1 a 9:

$3 \cdot 1 = \underline{3}, 3 \cdot 2 = \underline{6}, 3 \cdot 3 = \underline{9}, 3 \cdot 4 = \underline{12}, 3 \cdot 5 = \underline{15}, 3 \cdot 6 = \underline{18}, 3 \cdot 7 = \underline{21}, 3 \cdot 8 = \underline{24}, 3 \cdot 9 = \underline{27}$

Por lo tanto, para pagar las unidades, ajustaremos el múltiplo de 3 correspondiente y, a continuación, veremos las decenas, centenas etc con los múltiplos de 5.

Ejemplo: $476 = \begin{cases} 2 \text{ monedas de tres} \\ 94 \text{ " " cinco} \end{cases}$

Ejemplo: $478 = 460 + 18 = \begin{cases} 6 \text{ monedas de tres} \\ 92 \text{ " " cinco} \end{cases}$

Quedarían unos pocos casos sueltos sin justificar: 8, 11, 14 y 17

$8 = \begin{cases} 1 \text{ moneda de tres} \\ 1 \text{ " " cinco} \end{cases}$ $11 = \begin{cases} 2 \text{ monedas de tres} \\ 1 \text{ " " cinco} \end{cases}$ $14 = \begin{cases} 3 \text{ monedas de tres} \\ 1 \text{ " " cinco} \end{cases}$ $17 = \begin{cases} 4 \text{ monedas de tres} \\ 1 \text{ " " cinco} \end{cases}$

3º Método (Inducción)

fase I] $C=8 = 5+3$, pagaremos con 1 moneda de tres
1 " " cinco ✓

fase II] Suponiendo que hemos conseguido pagar una cantidad C con 'a' monedas de tres y 'b' monedas de cinco, demostraremos que también podremos pagar la cantidad C+1 con monedas de tres y cinco:
 $C = 3a + 5b$

Distinguiremos dos casos: $b=0$ y $b \geq 0$ (1, 2, 3, ...)

$$b=0: C=3a \rightarrow C+1=3a+10-9=3(a-3)+5-2$$

Es decir, si pagamos C con $\left. \begin{array}{l} 'a' \text{ monedas de tres} \\ \text{pagaríamos } C+1 \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} a-3 \text{ tres} \\ 2 \text{ cinco} \end{array} \right. \end{array} \right\}$ ✓

$$b>0: C=3a+5b \rightarrow C+1=3a+5b+6-5=3(a+2)+5(b-1)$$

Es decir, si pagamos C con $\left. \begin{array}{l} 'a' \text{ monedas de tres} \\ \text{pagaríamos } C+1 \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} a \text{ cinco} \\ a+2 \text{ tres} \\ b-1 \text{ cinco} \end{array} \right. \end{array} \right\}$ ✓

15) $1^3+2^3+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

fase 1) $\underline{n=1}$ $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$; $1 = \frac{2^2}{4}$; $1=1$ ✓

fase 2) $\underline{n=k}$ Suponiendo cierto que $1^3+2^3+\dots+k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ demostraremos que $1^3+2^3+\dots+(k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+\dots+(k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2 \cdot [k^2 + 4(k+1)]}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \quad \checkmark \end{aligned}$$

16) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$

fase 1) $\underline{n=1}$ $1+\frac{1}{1} = 1+1$; $2=2$ ✓

fase 2) $\underline{n=k}$ Suponiendo cierto que $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1$ demostraremos que $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k+2$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k+1}\right) = (k+1) \cdot \left(1+\frac{1}{k+1}\right) = k+1 + \frac{k+1}{k+1} = k+1+1 = k+2 \quad \checkmark$$

17) $2^{2n} - 3n - 1 = 9$

fase 1) $\underline{n=1}$ $2^{2 \cdot 1} - 3 \cdot 1 - 1 = 4 - 3 - 1 = 0$ que es divisible entre 9

fase 2) $\underline{n=k}$ Suponiendo que $2^{2k} - 3k - 1$ es divisible entre 9 demostraremos que $2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1$ es también divisible entre 9

$$\begin{aligned} 2^{2(k+1)} - 3(k+1) - 1 &= 2^{2k} \cdot 2^2 - 3k - 3 - 1 = 4 \cdot 2^{2k} - 3k - 4 = \\ &= 4 \cdot [2^{2k} - 3k - 1 + 3k + 1] - 3k - 4 = 4[2^{2k} - 3k - 1] + 12k + 4 - 3k - 4 = \\ &= 4 \cdot \underbrace{[2^{2k} - 3k - 1]}_{\text{divisible entre 9}} + \underbrace{9k}_{\text{divisible entre 9}} \quad \checkmark \end{aligned}$$