CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Se supone que $y = \dfrac{3\cos x}{2 - \operatorname{sen} x}$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

   a) Hallar los dos valores de x para los cuales $\dfrac{dy}{dx} = 0$

   b) Para cada uno de los dos valores de x hallar el valor correspondiente de y, y determinar si se trata de un valor máximo o mínimo.
   c) Trazar la gráfica de y con respecto a x para $[0 , 2\pi]$

2. Siendo $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$

   a) Calcule los valores de x para los cuales $\dfrac{dy}{dx} = 0$

   b) Para cada uno de los dos valores de x hallar el valor correspondiente de y, y determinar si se trata de un valor máximo o mínimo.
   c) Trazar la gráfica de y con respecto a x

3. a) Escriba la tres primeras derivadas de $x \cdot e^{-x}$

   b) Indique una fórmula única para $\dfrac{d^n}{dx^n}(x \cdot e^{-x})$ que sirva para todo natural n

   c) Demuestre que su fórmula es verdadera utilizando la inducción matemática

4. La curva C tiene la siguiente ecuación $y = \dfrac{l_n x}{x}$ $0 < x < +\infty$

   a) Halla $\dfrac{dy}{dx}$

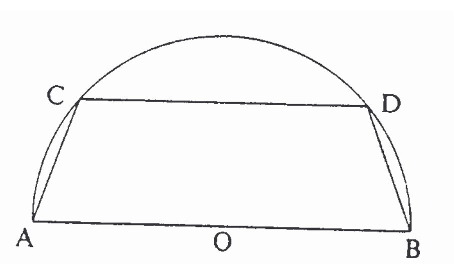
   b) Demostrar que y tiene un valor máximo de 1/e y justificar que lo es.
   c) Trazar la gráfica de y con respecto a x
   d) Hallar los dos valores de x para los que $\dfrac{l_n x}{x} = \dfrac{1}{2} l_n 2$

   e) Determina el número de raíces reales de la ecuación $l_n x = kx$ en los casos $k = ¼$ y $k = 4$

5. Sabiendo que $\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{x^2}{y} + 1$ halle $\dfrac{dy}{dx}$ en función de x e y

6. El diagrama muestra una semicircunferencia de centro O y radio r. CD es una cuerda paralela al diámetro AB y $A\hat{O}C = \alpha$.
   a) Demostrar que el perímetro del trapecio ABCD es $4r \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) + 2r + 2r\cos\alpha$

   b) Hallar el valor de que hace máximo este perímetro



7. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos estacionarios de la función $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$

8. Demuestra que la ecuación: $x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$ tiene una única raíz real.

9. Un comerciante vende determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 pesetas. No obstante, si se le encargan mas de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad y por cada x unidades cobra la siguiente cantidad: $c(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2+500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$

   Se pide:
   a) Hallar a para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.
   b) ¿A cuanto tiende el precio de una unidad cuando se compran “muchisimas” unidades?

10. Demuestra que $y = x^5 - 5x - 1$ tiene exactamente tres puntos de intersección con el eje X.

11. Sean las funciones $f(x) = x^2$ $g(x) = x^3$
   Se trata de estudiar el comportamiento relativo de la rapidez de crecimiento de ambas. Responde razonadamente las siguientes cuestiones:
   a) ¿En qué intervalo crece más rápidamente f que g?
   b) ¿En qué intervalo crece más rápidamente g que f?
   c) ¿En qué intervalo crecen igual?

12. Una curva del plano tiene por ecuación: $xy^2 + x^2y = 2$
   a) Halle la pendiente de la curva en el punto (1,1)
   b) Halle la ecuación de la recta que es perpendicular a la curva en el punto (1,1)

13. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 2x - 11 & \text{si } x \in (-\infty,1) \\ -\dfrac{8}{x} & \text{si } x \in [1,+\infty) \end{cases}$

14. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{Si } x \leq -1 \\ 1-x^2 & \text{Si } -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{Si } x > 2 \end{cases}$

15. Halla a y b para que sea continua la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{Si } x < 0 \\ ax + b & \text{Si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$

16. Estudia el crecimiento/decrecimiento y los extremos absolutos de la función $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$

17. Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica una capacidad de 160 litros. Halla las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

18. Dada una lámina rectangular de dimensiones 2m x 1m calcula cómo deberíamos cortar sus cuatro esquinas para que se pueda formar con ella una caja abierta de volumen máximo

19. A una placa de vidrio rectangular de dimensiones 15cm x 10 cm se le ha roto en una esquina un pedazo de forma triangular de tal modo que la longitud ha disminuido en 5 cm y la anchura en 3 cm. De la parte restante se quiere formar una nueva placa rectangular de área máxima. ¿Cuáles serán las dimensiones de la placa?

20. Halla los coeficientes de la ecuación $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que la curva correspondiente presente en el punto (2,1) una inflexión con tangente paralela al eje OX, pasando dicha curva por el origen de coordenadas.

21. El número de miembros de una peña deportiva fundada en 1987 es, x años después de su fundación: $f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 24x - 48)$

a) ¿En qué año tuvo el máximo número de miembros entre 1987 y 1992?
b) ¿Cuál es la tendencia actual en 1992, creciente o decreciente?
c) ¿Llegará a quedarse sin socios?

22. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable) dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y 120 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente a 40 y 30 km del punto de corte.
a) Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido.
b) Hallar el valor mínimo de dicha distancia.

23. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)\,senx}{x^2}$

b) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x}$

e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{senx}$

g) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x}$

h) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1-6x}{5-2x}\right)^{x}$

i) $\lim_{x \to 0^+} x^{senx}$

j) $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x}$

① $y = \dfrac{3\cos x}{2-\operatorname{sen} x} \qquad 0 \le x \le 2\pi$

Dominio $= [0, 2\pi]$ (ya que $\operatorname{sen} x \neq 2 \ \forall x$)

$$y' = \frac{-3\operatorname{sen} x(2-\operatorname{sen} x) + 3\cos x \cos x}{(2-\operatorname{sen} x)^2} = 3\,\frac{-2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{(2-\operatorname{sen} x)^2} = 3\,\frac{1-2\operatorname{sen} x}{(2-\operatorname{sen} x)^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{array}{l} x = 30^\circ \\ x = 150^\circ \end{array}$

$\oplus \quad \ominus \quad \oplus$

$0 \quad 30^\circ \quad 150^\circ \quad 360^\circ$

signo $y' = \dfrac{3(1-2\operatorname{sen} x)}{(2-\operatorname{sen} x)^2}$

Máximo en $x = 30^\circ \longrightarrow y = \dfrac{3\sqrt{3}/2}{2-1/2} = \sqrt{3}$ $\quad (\pi/6, \sqrt{3})$

Mínimo en $x = 150^\circ \longrightarrow y = \dfrac{3 \cdot -\sqrt{3}/2}{2-1/2} = -\sqrt{3}$ $\quad (5\pi/6, -\sqrt{3})$

$x = 2\pi \Rightarrow y = 3/2 \quad (2\pi, 3/2)$

$x = 0 \Rightarrow y = 3/2 \quad (0, 3/2)$

$y = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \longrightarrow x = 90^\circ \quad x = 270^\circ \quad (\pi/2, 0) \quad (3\pi/2, 0)$

② $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$

Dominio $= \mathbb{R} - \{1\}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

$$y' = \frac{2(x+1)(x-1) - (x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(2x-2-x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = \begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array}$

$\oplus \quad -1 \quad \ominus \quad 1 \quad \ominus \quad 3 \quad \oplus$

signo y'

Máximo en $x = -1 \longrightarrow y = 0 \quad (-1, 0)$

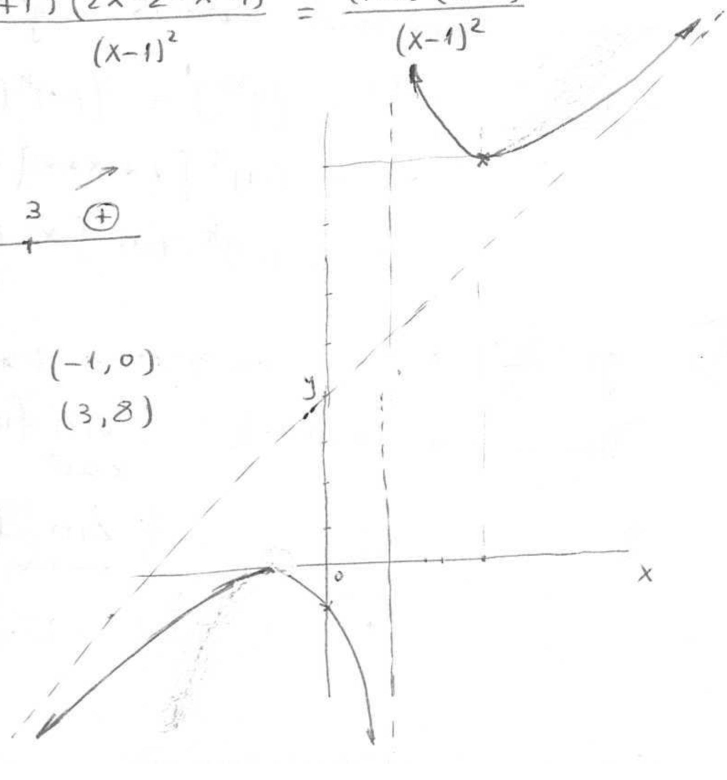
Mínimo en $x = 3 \longrightarrow y = 8 \quad (3, 8)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$x = 0 \Rightarrow y = -1 \quad (0, -1)$

$y = 0 \Rightarrow x = -1 \quad (-1, 0)$



NOTA :

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2+x & x+3 \\ \hline 3x+1 & \\ -3x+3 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$y=\frac{(x+1)^2}{x-1}=x+3+\frac{4}{x-1}$$

Eso significa que cuando $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$ la curva $y=\frac{(x+1)^2}{x-1}$ se aproxima progresivamente a la recta $y=x+3$

Es decir, que tiene la asíntota oblicua $y=x+3$.

③ $y=xe^{-x}$

$y'=e^{-x}+xe^{-x}\cdot(-1)=(1-x)e^{-x}$

$y''=-1\cdot e^{-x}+(1-x)e^{-x}\cdot(-1)=(x-2)e^{-x}$

$y'''=e^{-x}+(x-2)e^{-x}\cdot(-1)=(3-x)e^{-x}$

$$y^{n)}=\begin{cases}(x-n)e^{-x} & \text{si } n \text{ es par}\\ (n-x)e^{-x} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}=\begin{cases}+(x-n)e^{-x} & \text{si } n \text{ es par}\\ -(x-n)e^{-x} & \text{si } n \text{ es impar}\end{cases}=$$

$$=\left\{(-1)^n\cdot(x-n)e^{-x}\right.$$

Demostración :

$n=1$: $y^{1)}=(-1)^1(x-1)e^{-x}=(-x+1)e^{-x}=(1-x)e^{-x}$ ✓

$n=k$: Suponiendo cierto $y^{k)}=(-1)^k(x-k)e^{-x}$

$n=k+1$ $y^{k+1)}=(y^{k)})'=\left((-1)^k(x-k)e^{-x}\right)'=(-1)^k\left[e^{-x}+(x-k)e^{-x}(-1)\right]=$

$=(-1)^k\left[1-x+k\right]e^{-x}=(-1)^k\left[(k+1)-x\right]e^{-x}=$

$=(-1)^k\cdot(-1)\left[x-(k+1)\right]e^{-x}=(-1)^{k+1}\left(x-(k+1)\right)e^{-x}$ ✓

④ $y=\frac{\ln x}{x}$

Dominio $=(0,+\infty)$

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\frac{-\infty}{+0}=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}=0$ (ya que $\ln x \ll x$ para $x\to+\infty$)

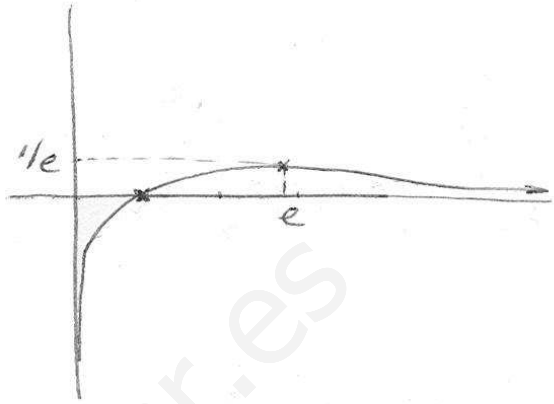
$$y' = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$y' = 0 \Longrightarrow \ln x = 1 \longrightarrow x = e \longrightarrow y = 1/e$$

$$\overset{0}{} \quad \overset{\nearrow}{\oplus} \quad e \quad \overset{\searrow}{\ominus}$$

signo de y'

Máximo en $x = e$ $\quad (e, 1/e)$



$x = 0 \longrightarrow$ No corta al eje y

$y = 0 \longrightarrow x = 1 \quad (1,0)$

d) $$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$2\ln x = x\ln 2$$

$$\ln x^2 = \ln 2^x$$

$$x^2 = 2^x \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=2 \\ x=4 \end{array}}$$

e) Para $y > \frac{1}{e} \Longrightarrow$ No hay puntos de curva

Para $y = \frac{1}{e} \Longrightarrow$ Hay 1 sólo punto

Para $0 < y < \frac{1}{e} \Longrightarrow$ Hay 2 puntos de curva

Para $y \leq 0 \Longrightarrow$ Hay 1 punto.

Luego $\ln x = \frac{1}{4}x \Longrightarrow$ Dos puntos $\Longrightarrow$ Dos raíces

$\ln x = 4x \Longrightarrow$ Ningún punto $\Longrightarrow$ Sin solución.

5 $$\frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2}{y} + 1$$

$$\cancel{xy} - y^2 = x^3 + x^2y + \cancel{xy} + y^2$$

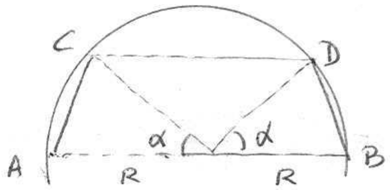
$$0 = x^3 + 2y^2 + x^2y$$

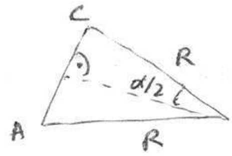
$$0 = 3x^2 + 4yy' + 2xy + x^2y'$$

$$-3x^2 - 2xy = (4y + x^2)y'$$

$$\boxed{y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 4y}}$$

(6)

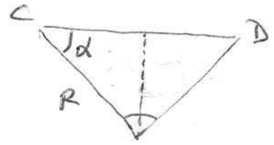




$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{AC}/2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\overline{BD} = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



$$\cos\alpha = \frac{\overline{CD}/2}{R} \Rightarrow \overline{CD} = 2R\cos\alpha$$

$$\text{Perímetro} = 2R + 4R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2R\cos\alpha$$

$$\frac{dP}{d\alpha} = P' = 4R\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{2} - 2R\sin\alpha = 2R\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2R\sin\alpha$$

$$P' = 0 \Rightarrow 2R\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin\alpha \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \Rightarrow \qquad \rightarrow 1 = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 270^\circ \rightarrow \alpha = \cancel{540^\circ} \\ \frac{\alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \cancel{180^\circ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ \\ \alpha/2 = 150^\circ \Rightarrow \alpha = \cancel{300^\circ} \end{cases}$$

$\nearrow$ $\oplus$ 60° $\ominus$ $\searrow$

signo de $P' = 2R\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2R\sin\alpha$

Máximo para $\boxed{\alpha = 60^\circ}$

(7)

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 10^-} C(x) = 50$$

$$\lim_{x \to 10^+} C(x) = \sqrt{100a + 500}$$

$$\sqrt{100a + 500} = 50 \Rightarrow 100a = 2500 - 500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 20}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{20 + \frac{500}{x^2}} = \boxed{\sqrt{20}}$$

(8) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3$

$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$

$y' = 0 \Longrightarrow \boxed{x=0}$; $x^2 - 4x + 3 = 0 \to \boxed{x = 1,\ x = 3}$

$(0,0)$
$(1,1)$
$(3,-27)$

(9) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 23$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 15$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 12x + 15 = 0$

$x^2 + 4x + 5 = 0 \longrightarrow$ No tiene raíces reales.

$\oplus$

signo $f'(x)$.

La función es siempre creciente, luego pasa de $-\infty$ al $+\infty$ atravesando el eje X una sóla vez.

Luego $x^3 + 6x^2 + 15x - 23 = 0$ tiene una única raíz real.

(10) $y = x^5 - 5x - 1$ $\qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

$y' = 5x^4 - 5$ $\qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$y' = 0 \Longrightarrow x^4 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$

$\oplus \quad -1 \quad \ominus \quad 1 \quad \oplus$

signo $y' = 5x^4 - 5$

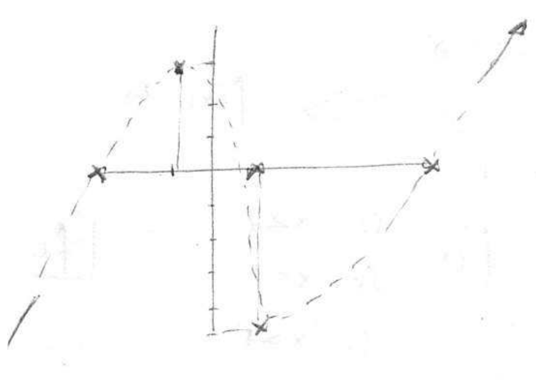
Máximo en $x = -1 \longrightarrow y = 3$ $\quad (-1, 3)$

Mínimo en $x = 1 \longrightarrow y = -5$ $\quad (1, -5)$

Al crecer desde $-\infty$ hasta el máximo corta al eje X una vez

Al pasar del máximo al mínimo corta al eje X por 2ª vez

Al crecer desde el mínimo al $+\infty$ cortará al eje X por 3ª y última vez.



(11) $f'(x) = 2x$

$g'(x) = 3x^2$

$f'(x) = g'(x) \implies 3x^2 = 2x \implies x(3x-2) = 0 \nearrow x=0 \searrow x = 2/3$

$+ \quad 0 \quad - \quad 2/3 \quad +$

signo de $f'(x) - g'(x)$

Luego: $f'(x) > g'(x)$ en $(-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$

$f'(x) = g'(x)$ en $x=0$, $x = 2/3$

$f'(x) < g'(x)$ en $(0, 2/3)$

(12) $xy^2 + x^2y = 2$

$y^2 + x2yy' + 2xy + x^2y' = 0$

$y'(2xy + x^2) = -y^2 - 2xy \qquad y' = -\dfrac{y^2+2xy}{x^2+2xy}$

$P(1,1) \longrightarrow$ pendiente recta tangente $= -\dfrac{1+2}{1+2} = -1 \longrightarrow$ pendiente recta normal $= -\dfrac{1}{-1} = 1$

Ecuación Normal: $y-1 = 1(x-1) \implies \boxed{y = x}$

(13) $f(x) = \begin{cases} 5x^2-2x-11 & x \in (-\infty, 1) \\ -\dfrac{8}{x} & x \in [1, +\infty) \end{cases}$

$5x^2-2x-11$ está definido $\forall x \in \mathbb{R}$

$-\dfrac{8}{x}$ no está definido en $x=0$, pero $0 \notin [1, +\infty)$

Luego: Dominio $= \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 5-2-11 = -8$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\dfrac{8}{1} = -8$

$\longrightarrow f(x)$ continua en $x=1 \implies \boxed{f(x) \text{ continua en } \mathbb{R}}$

$f'(x) = \begin{cases} 10x-2 & \text{si } x<1 \\ \dfrac{8}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$ Veamos en $x=1$

$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 10-2 = 8$

$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \dfrac{8}{1} = 8$

$\longrightarrow f(x)$ es derivable en $x=1$

$f'(x) = \begin{cases} 10x-2 & \text{si } x<1 \\ 8 & \text{si } x=1 \\ \dfrac{8}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$

$\boxed{f(x) \text{ derivable en } \mathbb{R}}$

(14)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad \text{Dominio} = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1+1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1-1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ continua en } x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1-4 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{2-3} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x=2$$

$\boxed{f(x) \text{ continua en } \mathbb{R} - \{2,3\}}$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ -2x & \text{si } -1 < x < 2 \\ \dfrac{-1}{(x-3)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x=-1$$

Como $f(x)$ no es continua en $x=2$ y $x=3$ $\Rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x=2$ y $x=3$

$f(x)$ derivable en $\mathbb{R} - \{-1,2,3\}$

(15)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x < 0 \\ ax+b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow \boxed{-1 = b}$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow a+b = 2 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

(16)

$y = 1 - \sqrt[5]{x^4} = 1 - x^{4/5}$ Dominio $= \mathbb{R}$

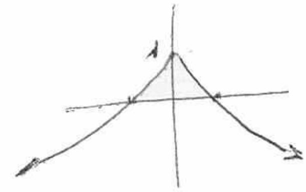
$y' = -\frac{4}{5} x^{\frac{4}{5}-1} = -\frac{4}{5} x^{-1/5} = \dfrac{-4}{5\sqrt[5]{x}}$ No está definida en $x=0$

$\nearrow \quad \oplus \quad 0 \quad \ominus \quad \searrow$

signo de y'

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$
$f(x)$ es decreciente en $(0, +\infty)$
Sin embargo $f'(0)$ no es nula, de hecho no está definida.
El máximo absoluto es en $x=0 \longrightarrow (0,1)$

La gráfica es:



(17) $V = \pi R^2 H = 160 \longrightarrow H = \dfrac{160}{\pi R^2}$

$S = 2\pi R^2 + 2\pi R H$

$S = 2\pi R^2 + 2\pi R \dfrac{160}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \dfrac{320}{R}$

$S' = 4\pi R - \dfrac{320}{R^2}$

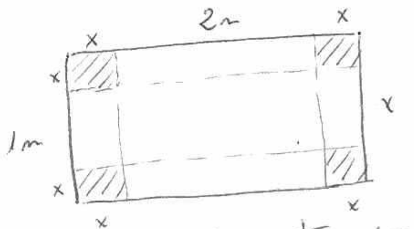
$S' = 0 \Longrightarrow \quad 4\pi R = \dfrac{320}{R^2} \quad ; \quad R^3 = \dfrac{80}{\pi} \qquad R = \sqrt[3]{\dfrac{80}{\pi}}$

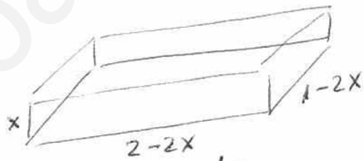
$\searrow \ominus \quad \sqrt[3]{\dfrac{80}{\pi}} \quad \oplus \nearrow$

signo de $S' = 4\pi R - \dfrac{320}{R^2}$

Superficie mínima para $\boxed{R = \sqrt[3]{\dfrac{80}{\pi}}} \longrightarrow H = \dfrac{160}{\pi \sqrt[3]{\dfrac{6400}{\pi^2}}} = \dfrac{160}{\sqrt[3]{6400\pi}} = \boxed{\dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}}$

(18)





x debe de estar comprendido entre 0 y 0'5

$V = x(2-2x)(1-2x) = 2x(1-x)(1-2x) = 2x(1-2x-x+2x^2) =$

$= 2x - 6x^2 + 4x^3$

$V' = 2 - 12x + 12x^2 = 2(6x^2 - 6x + 1)$

$V' = 0 \Longrightarrow \quad x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-24}}{12} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{12} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$ → $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$; $\cancel{\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}}$ (Es mayor que 0'5)

$0 \quad \nearrow \oplus \quad \dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \quad \ominus \searrow \quad 0'5$

signo de $V' = (6x^2 - 6x + 1) \cdot 2$

Volumen máximo para $\boxed{x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}}$

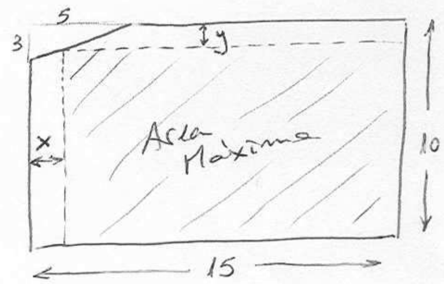
Dimensiones de la caja: $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

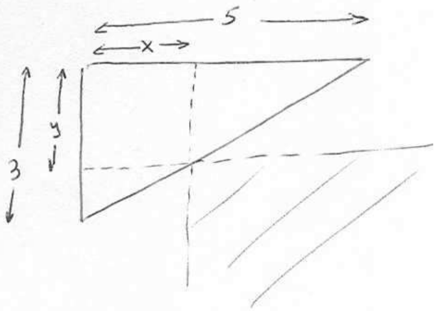
$2 - 2 \cdot \dfrac{3-\sqrt{3}}{4} = 2 - \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

$1 - 2\dfrac{3-\sqrt{3}}{4} = 1 - \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$V_{MAX} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}^2 - 1^2)}{16} = \dfrac{(3-\sqrt{3}) \cdot 2}{16} = \boxed{\dfrac{3-\sqrt{3}}{8}}$

(19)





$$\frac{5}{3} = \frac{x}{3-y} \Rightarrow 15-5y = 3x$$

$$y = \frac{15-3x}{5}$$

$$\text{Area} = (15-x)\cdot(10-y) = (15-x)\left(10 - \frac{15-3x}{5}\right) = (15-x)\left(7+\frac{3x}{5}\right) \quad \text{Dominio} = [0,5]$$

$$A' = -\left(7+\frac{3x}{5}\right) + (15-x)\frac{3}{5} = -7 - \frac{3x}{5} + 9 - \frac{3x}{5} = 2 - \frac{6x}{5} = \frac{10-6x}{5}$$

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{10-6x}{5} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$0 \quad (+) \quad 5/3 \quad (-) \quad 5$

signo $A' = \frac{10-6x}{5}$

Area Máxima para $x = \frac{5}{3} \rightarrow y = 2$

$A_{MAX} = \frac{320}{3}$ cm^3

Dimensiones definitivas : $\frac{40}{3}$ cm $\times$ 8 cm

(20) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $y'' = 6ax + 2b$

$P(2,1) \Rightarrow 1 = 8a + 4b + 2c + d$

Inflexión en $x=2 \Rightarrow 0 = 12a + 2b$

Recta tangente horizontal en $x=2$ $\Rightarrow 0 = 12a + 4b + c$

$P(0,0) \Rightarrow \boxed{0 = d}$

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c = 1 \\ 6a + b = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{8} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{-6}{8} \qquad c = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 12 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{8} = \frac{12}{8}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{6}{8}x^2 + \frac{12}{8}x}$$

(21) $f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 24x - 48)$

$f'(x) = -\frac{1}{3}(3x^2 - 18x + 24) = -x^2 + 6x - 8$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2,\ 4$

$\ominus \quad 2 \quad \oplus \quad 4 \quad \ominus$

Signo $f'(x) = -x^2 + 6x - 8$

a) Entre 1987 y 1992 corresponde a $x \in [0, 5]$

$0 \quad 2 \quad 4 \quad 5$

El mayor nº de miembros podría estar en $x = 0$ o en $x = 4$

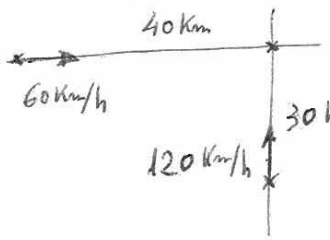
$x = 0 \longrightarrow f(0) = 16$

$x = 4 \longrightarrow f(4) = \frac{32}{3}$

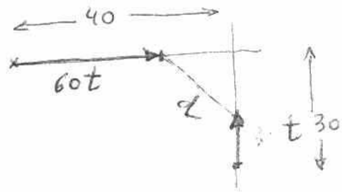
El máximo nº de miembros fue en 1987, su fundación, con 16 miembros

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ Luego habrá algún valor de x en el que $y = 0$, luego se quedará sin miembros.

(22)



Al cabo de t horas:



$$d = \sqrt{(40 - 60t)^2 + (30 - 120t)^2} = \sqrt{400(2-3t)^2 + 900(1-4t)^2}$$

$$d' = \frac{800(2-3t)\cdot(-3) + 1800(1-4t)(-4)}{2\sqrt{400(2-3t)^2 + 900(1-4t)^2}} = 100\,\frac{-12(2-3t) - 36(1-4t)}{\sqrt{400(2-3t)^2 + 900(1-4t)^2}}$$

$d' = 0 \Rightarrow -24 + 36t - 36 + 144t = 0 \ ; \quad 180t = 60 \Rightarrow t = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}\,h$

$0 \quad \ominus \quad \frac{1}{3}h \quad \oplus$

Signo $d' = 100\,\dfrac{-60 + 180t}{\sqrt{400(2-3t)^2 + 900(1-4t)^2}}$

Mínima distancia para $t = \frac{1}{3}\,h = 20$ minutos.

La distancia más pequeña es:

$$d = \sqrt{\left(40 - 60\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(30 - 120\tfrac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{400 + 100} = \boxed{\sqrt{500}\ \text{Km}}$$

(23) a) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{+\sin x \sin x + (1-\cos x)\cos x}{2x} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - \cos^2 x}{2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x - \sin x + 2\cos x \sin x}{2} = \boxed{0}$

b) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = \boxed{0}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}$

* d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+0}{-\infty} = \boxed{0}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{e^x} = \frac{+0}{+\infty} = \boxed{0}$

f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sin x} = \frac{+\infty}{[-1,1]} = \boxed{\infty}$

g) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x} = 1^{+\infty}$

$m = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x}$; $\ln m = \lim_{x\to+\infty} 2x \ln \frac{3x-1}{3x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{3x-1}{3x+4}}{1/2x} =$

$= \frac{\ln 1}{1/\infty} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x-1) - \ln(3x+4)}{1/2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{3x-1} - \frac{3}{3x+4}}{-\frac{1}{2x^2}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(9x+12)-(9x-3)}{(3x-1)(3x+4)}}{-1/2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{30x^2}{-(3x-1)(3x+4)} = -\frac{30}{9} = -\frac{10}{3}$

$\ln m = -\frac{10}{3}$ $\boxed{m = e^{-10/3}}$

h) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-6x}{5-2x}\right)^{x} = 3^{+\infty} = +\infty$

i) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = 0^0$ $m = \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

$\ln m = \lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\sin x} = \frac{\ln 0}{1/0} = \frac{-\infty}{+\infty} =$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} =$

$= \frac{0}{1} = 0 \Longrightarrow \ln m = 0 \Longrightarrow \boxed{m = 1}$

j) $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x} = \left(\frac{1}{0^+}\right)^{\ln 1} = (+\infty)^0$

$$m = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x}$$

$$\ln m = \lim_{x \to 1^+} \ln \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x} = \lim_{x \to 1^+} \ln x \cdot \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{\ln x}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln 1 - \ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\frac{-\ln 0}{\frac{1}{\ln 1}} = \frac{+\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{+\infty}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-\frac{1}{x-1}}{\frac{-1/x}{\ln^2 x}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x \ln^2 x}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \frac{1}{x}}{1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \left(\ln^2 x + 2\ln x\right) = 0$$

$$\ln m = 0 \implies m = 1 \implies \boxed{\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{\ln x} = 1}$$