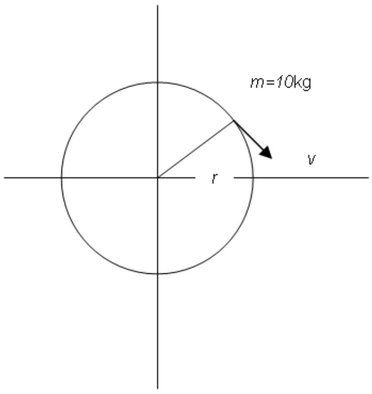
1. Un cuerpo de masa 10 kg se mueve con un movimiento circular uniforme, de radio 5 m y velocidad 4 m/s.

a) **Elige un sistema de referencia inercial y dibuja el esquema de movimiento.**

b) **Calcula la fuerza que se ejerce sobre dicho cuerpo.**

c) **¿Qué tipo de fuerza es?**

a) Un sistema de referencia inercial es aquel que no sufre aceleraciones. Como el cuerpo describe un MCU, está sometido a una aceleración por lo que no podemos poner el sistema de referencia en él. En este caso colocaremos el sistema de referencia en el centro de la circunferencia que describe el cuerpo, que es un punto, cuya velocidad es 0 y cte, por lo que si es inercial:



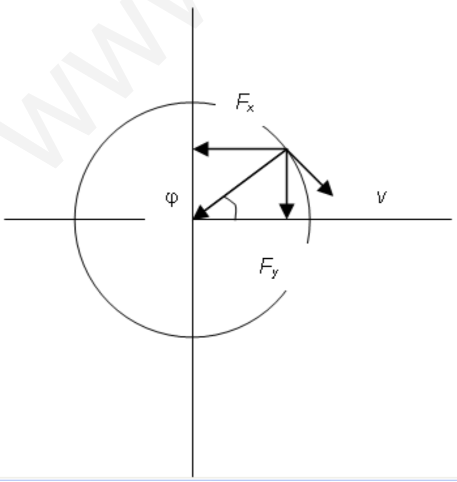
b) Como es un MCU, la única fuerza que recibe el cuerpo es la centrípeta, que le hace girar con velocidad cte:

$$\left|\vec{F}_c\right| = m\left|\vec{a}_N\right| = m\frac{v^2}{R} = 10\cdot\frac{4^2}{5}$$

$$\left|\vec{F}_c\right| = 32\text{N}$$

Esta es la fuerza que ejerce en la dirección del radio y sentido siempre hacia el centro.

Como realiza un MCU



$$F_{cy} = -F_c \cdot \text{sen}\ \varphi$$
$$F_{cx} = -F_c \cdot \cos\ \varphi$$
$$\varphi = \omega t = \frac{-v}{R} t = -\frac{4}{5} t \cdot \text{rad}$$
$$\omega = \frac{v}{R}$$

ω es negativa por el sentido de giro elegido en este caso. En el enunciado no se indica nada.

Por lo tanto, la fuerza centrípeta es:

$$F_{cy} = -32 \cdot \text{sen}\left(-\frac{4}{5}t\right) = 32 \cdot \text{sen}\left(\frac{4}{5}t\right)$$
$$F_{cx} = -32 \cdot \cos\left(-\frac{4}{5}t\right) = 32 \cdot \cos\left(\frac{4}{5}t\right)$$
$$\vec{F}_c = -32 \cdot \cos\left(-\frac{4}{5}t\right)\vec{i} + 32 \cdot \text{sen}\left(\frac{4}{5}t\right)\vec{j}$$

c) Esta fuerza es una fuerza central, ya que se dirige siempre hacia un punto concreto.

2. Se hace girar una piedra de masa 500 g verticalmente en una honda de 1 m de largo.

- ***a)*** **Calcula la velocidad mínima a la que hay que hacer girar una piedra para que no caiga por la acción de la gravedad.**
- ***b)*** **Calcula la tensión de la cuerda en el punto más bajo.**
- ***c)*** **Calcula la tensión de la cuerda cuanto ésta está horizontal.**
- ***d)*** **¿A qué distancia llegará la piedra si se suelta en el punto más alto (a 2 m del suelo)?**

a) m = 500 g

r = 1 m

v = ?

En este punto A:

$$\vec{F}_c = \vec{T} + \vec{P}$$
$$F_c = T + P$$

todas van en el mismo sentido vertical hacia abajo.

Como queremos averiguar la velocidad mínima, esta se producirá cuando la tensión de la cuerda sea 0, es decir, el peso es constante y, además, cuanto mayor sea v, mayor será F_c, y por lo tanto mayor será T, con lo que el mínimo será en T = 0.

Así:

$$m\frac{v^2}{R} = mg \Rightarrow v = \sqrt{Rg} = \sqrt{1 \cdot 98} \cdot 3{,}13\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Como se puede comprobar, no depende de la masa de la piedra, sino de la longitud de la cuerda.

b) A esta velocidad, en el punto más bajo se cumple que:

$\vec{F}_c = \vec{T} + \vec{P} \Rightarrow F_c = T - P$

Con lo que:

$T = F_c + P = \dfrac{mv^2}{R} + mg$

$\dfrac{mv^2}{R}$ calculado en el apartado anterior es mg

con lo que $T = mg + mg = 2mg = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}8 = 9{,}8$ N

c) La fuerza F_c únicamente depende de la T en este caso, que son las que están en el mismo eje.

$F_c = T = m\dfrac{v^2}{R} = mg = 0{,}5 \cdot 9{,}8 = 4{,}9$ N

d) Al soltarse, ya no se ejerce ninguna fuerza, con lo que, como el tiro es en el punto más alto, y ahí la velocidad es horizontal, la piedra realizará un movimiento parabólico.

$x_f = x_0 + v_{0x}t$

$y_f = y_0 + v_{0y}gt^2$

$0 = 2 + 0 - \dfrac{1}{2}9{,}8t^2 \Rightarrow 4{,}9t^2 = 2$

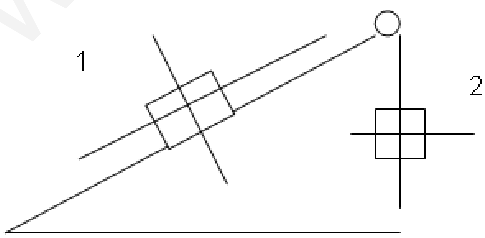
$t = \sqrt{\dfrac{2}{4{,}9}} = 0{,}64$ s

$x_f = 0 + 3{,}13 \cdot 0{,}64 = 2$ m

3. Una caja de 10 kg está colocada en un plano inclinado 30°. En el extremo del plano hay una polea por la que pasa una cuerda que une esta caja con otra de 15 kg, que cuelga verticalmente.

- ***a)*** **Calcula el coeficiente de rozamiento, entre el plano y la caja, si el sistema está en equilibrio.**
- ***b)*** **Calcula la tensión de la cuerda.**
- ***c)*** **Calcula la masa que hay que añadir a la segunda caja para que el sistema se mueva con una aceleración de 2 m/s².**
- ***d)*** **Calcula nuevamente la tensión de la cuerda.**

a) Establecemos dos sistemas de referencia, uno en cada cuerpo, ya que ambos están en equilibrio.



(1) El sistema de masa (1) tiene su eje *Ox* paralelo al plano y el eje *Oy* perpendicular.

(2) El sistema de masa (2) tiene su eje *Ox* horizontal y el eje *Oy* vertical.

Escogemos estos sistemas para que cada cuerpo se mueva en uno de sus ejes y facilitar los cálculos.

(1) Al estar este cuerpo en equilibrio

$\sum \vec{F}_i = 0$

Descomponiendo en cada eje:

Eje *Ox*: $T_1 - P_{1x} - F_r = 0$ $\quad F_r = \mu N = \mu\, m_1\, g \cos\alpha = T_1 - P_{1x}$

Eje *Oy*: $N - P_{1y} = 0$ $\quad N = P_{1y} = m_1\, g \cos\alpha$

$\mu\, m_1\, g \cos\alpha = T_1 - m_1\, g \operatorname{sen}\alpha$

(2) De igual forma: $T_2 - P_2 = 0 \Rightarrow T_2 = P_2 = m_2\, g$

Por último, la cuerda tiene la misma tensión en sus extremos:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow \mu m_1\, g \cos\alpha = m_2\, g - m_1\, g \operatorname{sen}\alpha$$

$$\mu = \frac{m_2 - m_1 \operatorname{sen}\alpha}{m_1 \cos\alpha} = \frac{15 - 10 \operatorname{sen} 30^o}{15 \cos 30^o} = \frac{15 - 10 \cdot 0{,}5}{15 \cdot 0{,}866}$$

$$\mu = 0{,}77$$

b) Sustituyendo en las ecuaciones anteriores.

$T_2 = m_2\, g = 15 \cdot 9{,}8 = 147$ N

c) Ahora queremos a = 2 m/s^2, con lo que:

(2)

$$\sum \vec{F} = m \cdot a$$

$$P_{2'} - T_{2'} = m_{2'} \cdot a \Rightarrow T_{2'} = m_{2'} \cdot g - m_{2'} \cdot a = T_{2'}$$

(1)

Eje *Ox* : $T_1 - P_{1x} - F_R = m_1\, a$

Eje *Oy*: $N - P_{1y} = 0$ ← no se mete dentro del plano inclinado ni sale rebotado, es decir, no se mueve en el eje Y.

$N = P_{1y} = m_1\, g \cos\alpha$

$T_1 = m_1\, a + P_{1x} + F_R$

$T_1 = m_1\, a + m_1\, g \operatorname{sen}\alpha + \mu\, m_1\, g \cos\alpha$

Como las tensiones de la cuerda son iguales:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow m_{2'} g - m_{2'} a = m_1 g + m_1 a \operatorname{sen}\alpha + \mu m_1 g \cos\alpha$$

$$m_{2'} = \frac{m_1 (a g \operatorname{sen}\alpha + \mu\, g \cos\alpha)}{g - a} = \frac{10(2 + 9{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}77 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}866)}{9{,}8 - 2}$$

$$m_{2'} = \frac{10(2 + 4{,}9 + 6{,}53)}{7{,}8} = \frac{10 \cdot 13{,}43}{7{,}8} = 17{,}22 \text{ Kg}$$

Luego habrá que añadir una masa de:

$$\Delta m = m_{2'} - m_2 = 17{,}22 - 15 = 2{,}22 \text{ Kg}$$

d) $T = m_{2'}(g - a) = 17{,}22 \cdot (9{,}8 - 2) = 134{,}32\ \text{N}$

4. Un muelle (k = 450 N/m) se comprime 5 cm.

- ***a)*** **Si suponemos que dicha fuerza se aplica totalmente a una canica de 150 g, ¿qué aceleración sufrirá?**
- ***b)*** **¿Con qué velocidad saldrá la canica si suponemos que la fuerza se aplica de forma constante durante los 5 cm de recorrido?**
- ***c)*** **Dicha canica se desliza después por un plano horizontal con rozamiento (μ = 0,5). Si la longitud del plano es 3 m, ¿con qué velocidad llegará al final del plano?**

a)

$$\vec{F}_{ma} = -k\,\Delta\vec{x}$$

Según la segunda ley de Newton,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Ahora solo se aplica la fuerza del muelle, con lo que:

m = 150 g

k = 450 N/m

Δx = 0,05 m

$$F_{ma} = m \cdot a$$

$$k\,\Delta x = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{k\,\Delta x}{m} = \frac{450 \cdot 0{,}05}{0{,}150} = 150\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) Si se aplica durante 5 cm la fuerza, la canica tiene un MRUA:

$$x_f = x_0 + v_0 + \frac{1}{2}at^2$$

$$v_f = v_0 + at$$

$$0{,}05 = 0 + 0 + \frac{1}{2}150t^2$$

$$v_f = 0 + 150t$$

$$t = \sqrt{\frac{0{,}1}{150}} = 0{,}0258$$

$$v = 150 \cdot 0{,}0258 = 3{,}87\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c)

Eje *Ox* $\quad -F_r = m\,a \Rightarrow -\mu\,N = m\,a$

Eje *Oy* $\quad N - P = 0 \Rightarrow N = P = m\,g$

$$-\mu mg = ma$$

$a = -\mu\,g = -0{,}5 \cdot 9{,}8 = -4{,}9\ \text{m/s}^2$

$x_f = x_0 + v_0\, t + ½\, a\, t^2$

$v_f = v_0 + a\, t$

Como a es constante, la canica realiza un MRUA

$3 = 0 + 3{,}87\, t – ½\, 4{,}9\, t^2$

$2{,}45\, t^2 – 3{,}87\, t + 3 = 0$

$$t = \frac{3{,}87 \pm \sqrt{3{,}87^2 - 4 \cdot 2{,}45 \cdot 3}}{2 \cdot 2{,}45} = \frac{3{,}87 \pm \sqrt{-14{,}423}}{4{,}9} \text{ no es real}$$

Como no tiene solución ⇒ la canica no llega al final.

5. Calcula la velocidad que debe llevar un satélite situado a 500 Km sobre la superficie de la Tierra para compensar la atracción gravitatoria. ¿Cuál es su período de rotación (en vueltas/día)?

En este caso:

$F_G = F_C$

La fuerza gravitatoria es la responsable del giro, por lo tanto es la fuerza centrípeta:

$$G = \frac{M_T\, M_S}{d^2} = M_S\, \frac{v_S^2}{d}$$

$$v_S = \sqrt{\frac{G\, M_T}{d}}$$

Como no conocemos M_T, pero sí sabemos que:

$$g_0 = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

resulta que

$$G\, M_T = g_0\, R_T^2 = 9{,}8 \cdot (6{,}378 \cdot 10^6)^2 = 3{,}9865 \cdot 10^{14}$$

$$v_S = \sqrt{\frac{3{,}9865 \cdot 10^{14}}{6{,}878 \cdot 10^6}} = 7613{,}19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Su periodo de rotación es el tiempo que tarda en dar una vuelta

$$v_S = \frac{2\,\pi\, d}{T}$$

d = radio de giro

$$T = \frac{2\,\pi\, d}{v_S} = \frac{2\,\pi \cdot 6{,}878 \cdot 10^6}{7613{,}19} = 5676{,}43 \text{ s} = 1{,}58 \text{ h}$$

6. ¿A qué altura debemos colocar un satélite geoestacionario?

$$F_G = F_C \Rightarrow G\frac{M_T\, M_S}{d^2} = M_S\, \frac{v_S^2}{d}$$

Como es geoestacionario da una vuelta en un día, para estar siempre en cima del mismo punto sobre la superficie:

$$v_S = \frac{2\,\pi\,d}{1\text{ día}} \cdot \frac{1\text{ día}}{24\text{ h}} \cdot \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = \frac{2\,\pi\,d}{86400}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Además:

$$GM_T = g_0 R_T^2$$

Por tanto:

$$\frac{GM_T}{d} = v_S^2 \Rightarrow \frac{g_0 R_T^2}{d} = \left(\frac{2\,\pi\,d}{86400}\right)^2$$

$$86400^2 g_0 R_T^2 = 4\pi^2 d^3$$

$$d^3 = \frac{86400^2 \cdot g_0 R_T^2}{4\pi^2}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{7{,}465 \cdot 10^9 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}068 \cdot 10^{13}}{4\pi^2}} = 4{,}2258 \cdot 10^7\,\text{m}$$

$$d = R_T + h \Rightarrow h = d - R_T = 4{,}2258 \cdot 10^7 - 6{,}378 \cdot 10^6$$

$$h = 35879{,}78\text{ km}$$

7. Calcula la masa del Sol, sabiendo:

Masa Tierra = 5,97 · 10^{24} kg; Distancia Tierra-Sol: 1,495 · 10^8 Km; G = 6,67 · 10^{-11} Nm^2/kg^2.

De la misma forma que un satélite gira alrededor de la Tierra, la Tierra gira alrededor del Sol a velocidad constante, por lo que:

$$F_G = F_C \Rightarrow G\frac{M_S\,\cancel{M_T}}{d^2} = \cancel{M_T}\,\frac{v_T^2}{d} \Rightarrow M_S = \frac{v_T^2 d}{G}$$

$$v_S = \frac{2\,\pi\,d}{T} \Rightarrow M_S = v_S = \left(\frac{2\,\pi\,d}{T}\right)^2 \cdot \frac{d}{G} = \frac{2\,\pi\,d^3}{T\,G}$$

$$M_S = \frac{2\pi \cdot (1{,}495 \cdot 10^8)^3}{1\text{ año} \cdot \frac{365\text{ días}}{1\text{ año}} \cdot \frac{24\text{ h}}{1\text{ día}} \cdot \frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}}$$

$$M_S = \frac{2\,\pi \cdot 3{,}34 \cdot 10^{24}}{3{,}15 \cdot 10^7 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 9{,}988 \cdot 10^{28}\,\text{kg}$$

8. Calcula la velocidad a la que se movería el electrón de un átomo de hidrógeno si no tuviéramos en cuenta la fuerza eléctrica.

Datos: **Masa del electrón: 9,11 · 10^{-31} kg; Masa del protón: 1,67 · 10^{-27} kg. Tamaño del átomo: 53 · 10^{-12} m.**

$$F_G = F_C \Rightarrow G\frac{M_P\,M_e}{d^2} = M_e\,\frac{v_e^2}{d}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{G\,M_p}{d}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{53 \cdot 10^{-12}}} = \sqrt{2{,}1 \cdot 10^{-27}}$$

$$v_e = 4{,}58 \cdot 10^{-14}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A esta velocidad tendría un periodo de:

$$v_e = \frac{2\,\pi\, d}{T} \Rightarrow T = \frac{2\,\pi\, d}{v_e} = \frac{2\pi \cdot 53 \cdot 10^{-12}}{4{,}58 \cdot 10^{-14}} = 7270{,}93\ \text{s}$$

Es evidente que un electrón no puede tener ni esta velocidad ni este periodo, por lo que la fuerza gravitatoria no es la responsable del giro del e^-.

9. Un cuerpo de 10 kg se desliza sin rozamiento por un plano horizontal a una velocidad de 15 m/s.

- ***a)*** **Calcula la velocidad que tendrá el cuerpo si se le añade una masa de 2 kg.**
- ***b)*** **Si este conjunto acaba parándose por el choque contra una pared, ¿qué fuerza media ejercerá la caja sobre la pared si el impacto dura 0,2 s aproximadamente?**

a) Como este cuerpo se desliza sobre el eje *Ox*, y no hay fuerzas en este eje, por lo tanto:

$$\sum \vec{F}_x = 0$$

y como

$$\sum \vec{F}_x = \Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow p = \text{cte}$$

En este caso tenemos dos momentos que coinciden, antes y después de añadir la segunda masa:

$$p_0 = p_f \Rightarrow m v_0 = (m + m_2) v_f \Rightarrow v_f = \frac{m v_0}{m + m_2}$$

$$v_f = \frac{10 \cdot 15}{12} = 12{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)

$$\sum \vec{F}_x = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

En este caso:

$$\sum F = N$$

Es decir, las masas tardan 0,2 s en parar, por lo que Δt = 0,2 s y v_f = 0

$$N = \frac{m\, v_f - m\, v_0}{\Delta t} = \frac{-12 \cdot 15}{0{,}2} = -900\ \text{N}$$

En este caso, el signo *N* indica que es contraria a la velocidad.

10. Sabiendo que el periodo de revolución lunar es de 27,32 días y que el radio de su órbita es de $R_L = 3{,}84 \cdot 10^8$ m, calcula:

- ***a)*** **La constante de gravitación universal.**
- ***b)*** **La fuerza que ejerce la Luna sobre la Tierra y la Tierra sobre la Luna.**
- ***c)*** **Si un satélite se sitúa entre la Tierra y la Luna a una distancia de la tierra de $R_L/4$. ¿Cuál es la relación de fuerzas debidas a la Tierra y la Luna?**

$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg *a)*

$$F_G = F_C \Rightarrow G\frac{M_T\,M_L}{R_L^2} = M_L\,\frac{v_L^2}{R_L}$$

$$T = 27{,}32\text{ días}\cdot\frac{24\text{ h}}{1\text{ día}}\cdot\frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}} = 2{,}36\cdot 10^6\text{ s}$$

$$G\frac{R_T\,v_L^2}{M_T} = \frac{3{,}84\cdot 10^8\cdot\dfrac{4\,\pi\cdot(3{,}84\cdot 10^8)^2}{(2{,}36\cdot 10^6)^2}}{5{,}98\cdot 10^{24}} = 6{,}71\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N m}^2}{\text{kg}}$$

b)

Por el principio de acción y reacción, ambas fuerzas son iguales, pero de sentido contrario:

$$F_{TL} = G\frac{M_T\,M_L}{d^2} = 6{,}71\cdot 10^{-11}\,\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}}{(3{,}84\cdot 10^8)^2}$$

$$F_{TL} = 2\cdot 10^{20}\text{N}$$

c)

$$\frac{F_{TS}}{F_{LS}}$$

$$\frac{F_{TS}}{F_{LS}} = \frac{G\dfrac{M_T\,M_S}{d_{TS}^2}}{G\dfrac{M_L\,M_S}{d_{LS}^2}} = \frac{M_T\,d_{LS}^2}{M_L\,d_{TS}^2} = \frac{M_T\left(\dfrac{3\,R_L}{4}\right)^2}{M_L\left(\dfrac{R_L}{4}\right)^2} = \frac{M_T\,\dfrac{9\,R_L^2}{\cancel{16}}}{M_L\,\dfrac{9\,R_L^2}{16}} = 9\,\frac{M_T}{M_L}$$

$$\frac{F_{TS}}{F_{LS}} = 9\,\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\text{kg}}{7{,}35\cdot 10^{22}\text{kg}} = 732{,}25$$

F_{TS} es 732,35 mayor que F_{LS}.

Nota: las actividades aquí propuestas se corresponden con los siguientes contenidos:

Actividad	**Contenido**
1 y 2	9. Fuerza centrípeta
3	6.2. Fuerza de rozamiento y planos inclinados
4	8. Fuerzas elásticas
5 a 8	7. Fuerza gravitatoria
9	11. Impulso mecánico y momento lineal. Conservación del momento lineal
10	PAU Madrid, Junio 2011