Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.

PROPUESTA A

1A. Si la media aritmética de dos números reales positivos es 24, calcula el valor de dichos números para que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo. **(2,5 puntos)**

2A. Calcula las siguientes integrales:

$$\int \left(\frac{2\ln x}{x} + \ln x \right)\, dx, \qquad \int 3\sqrt{2x+1}\, dx$$

(1,25 puntos por integral)

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & 2y & - & z & = & m \\ 3x & & & - & 2z & = & 11 \\ & & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & 4z & = & m \end{array} \right.$$

(1,5 puntos)

b) Calcula la solución cuando el sistema sea compatible determinado. **(1 punto)**

4A. Dado el plano $\pi \equiv x - z = 0$ y las rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \end{array} \right.$$

a) Halla el ángulo que forman π y r. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta r. **(1,25 puntos)**

b) Halla la posición relativa de π y s. Razona cuántos planos hay perpendiculares a π que contengan la recta s. **(1,25 puntos)**

(sigue a la vuelta)

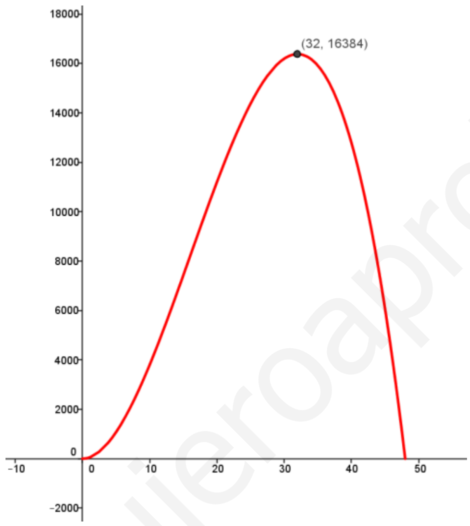
A1.- Solución:

Llamemos x , y a los números buscados:

$$\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ \begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = 24 \Rightarrow y = 48 - x \\ P = x^2 \cdot y \end{cases} \end{cases} \Rightarrow P = x^2(48-x) \Rightarrow P' = 96x - 3x^2 \Rightarrow P'' = 96 - 6x$$

$$P' = 0 \Rightarrow 3x(32-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 32 \Rightarrow P''(32) = 96 - 6 \cdot 32 < 0 \Rightarrow \text{Máximo } (32,16384) \end{cases}$$

Luego $x = 32, y = 16$



A2.- Solución

$$\int \left(\frac{2Lx}{x} + Lx\right)dx = 2\int \frac{Lx}{x}dx + \int Lx dx = L^2(x) + \int Lx dx = L^2(x) + xLx - x + K$$

$$\text{En la primera } Lx = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt, \text{ La segunda "por partes"} \begin{cases} u = Lx \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int 3\sqrt{2x+1}dx = 3\int (2x+1)^{1/2}dx = \frac{3}{2}\int 2(2x+1)^{1/2}dx = \frac{3}{2}\frac{(2x+1)^{1/2+1}}{1/2+1} + K = (2x+1)^{3/2} + K$$

$$\text{Porque es inmediata de la forma } h\int (f(x))^n f'(x)dx = h\frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + K \text{ con} \begin{cases} h = \dfrac{3}{2} \\ n = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

A3.- Solución

El rango de la matriz de coeficientes es 3 porque $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$ y tiene 3 columnas

El rango de la ampliada será 4 cuando su determinate sea distinto de 0 y 3 cuando sea 0

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & m \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & m \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & m \\ 0 & -2 & 11 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -3(42-2m) - 2(2m-57) = 2(m-6)$$

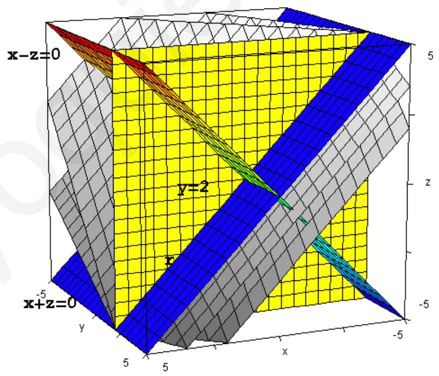
luego si $m \neq 6$ sistema incompatible y si $m = 6$ el sistema es compatible determinado

Cuando m=6 el sistema de 4 ecuaciones es equivalente al de tres ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2y - z = 6 \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = 6 \\ y + z = 6 \end{cases} \Rightarrow 3y = 13 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 5$$

A4.- Solución

a) Un vector perpendicular a π es (1,0,-1) y un vector director de r es (1,0,-1) como indican sus respectivas ecuaciones, luego el plano y la recta son perpendiculares, su ángulo 90°



La recta r se puede escribir como intersección de dos planos, y=2 con x+z=0. El haz de planos de ecuación $y=2+\lambda(x+z=0)$ que también podemos escribir $\lambda x+y+\lambda z=2$ es el conjunto de planos que pasan por la recta r y todos ellos son perpendiculares a π porque sus vectores característicos (1,0,-1) y $(\lambda,1,\lambda)$ son perpendiculares, su producto escalar es 0.

b) Para saber la posición relativa de π y s resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones

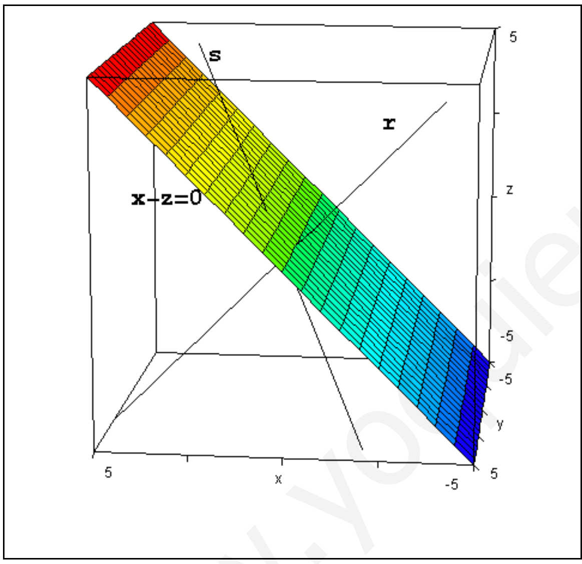
$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 2 \\ 4y + 2z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \Rightarrow x = z \\ x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow 2(2-z) + z = 3 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

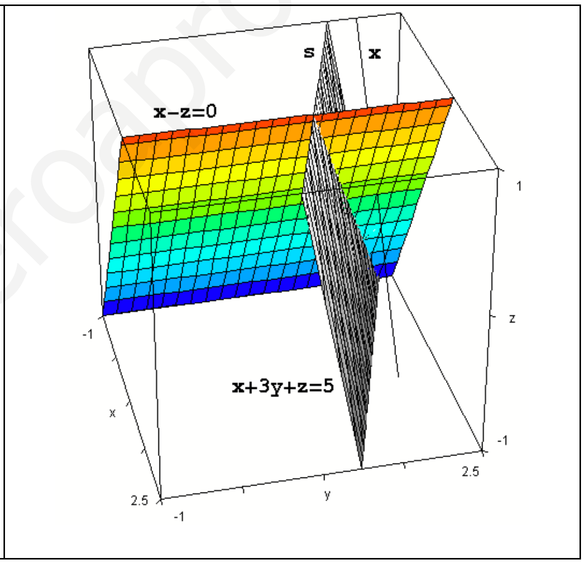
Luego se cortan en el punto **(1,1,1).**

Unas ecuaciones parametricas de s son: $\begin{cases} x+y=2 \\ 4y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=\quad\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases}$

Con lo que tenemos que (-1,1,-2) es un vector director de s. Si efectuamos el producto vectorial de este vector por el (1,0,-1) que es perpendicular a p obtenemos un vector perpendicular a ambos (-1,1,-2)x(1,0,-1)=(-1,-3,-1). Con este vector y el punto de intersección de p y s el (1,1,1) obtemos el plano -1(x-1)-3(y-1)-1(z-1)=0 es decir **x+3y+z=5** que es perpendicular a π y a s y es el único porque el producto vectorial anterior da un resultado único. **Podíamos haber utilizado el haz de planos con arista en s y determinar cuales de ellos eran perpendiculares a π pero daría el mismo resultado.**

Del haz $(x+y=2)+\lambda(2y+z=3) \Rightarrow x+(1+2\lambda)y+\lambda z=5$ buscamos el plano que sea perpendicular al $\mathrm{x - z = 0}$. Luego los vectores asociados deben ser perpendiculares $\Rightarrow$ $(1,0,-1)\cdot(1,1+2\lambda,\lambda)=0 \Rightarrow 1-\lambda=0 \Rightarrow 1=\lambda \Rightarrow x+3y+z=5$ es el único perpendicular.





Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado.

Bachillerato L. O. E.

Materia: MATEMÁTICAS II

PROPUESTA B

1B. a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange. **(1,25 puntos)**

b) Calcula un punto del intervalo $[-2, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3x + 2$ sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 12)$. **(1,25 puntos)**

2B. El área del recinto encerrado entre la gráfica de la parábola $f(x) = a(x^2 - 2x)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y el eje de abscisas, es de 12 unidades de superficie. Calcula el valor de a. **(2,5 puntos)**

3B. Évariste Galois, Niels Abel y Srinivasa Ramanujan fueron tres genios matemáticos que antes de sus prematuras muertes dejaron desarrollada una importante obra matemática. Calcula las edades que tenían cuando fallecieron, sabiendo que su suma es 78, que su media aritmética coincide con la edad de Abel, y que cuatro veces la edad de Ramanujan más dos veces la de Abel es nueve veces la edad de Galois. **(1,25 puntos por plantear un sistema de ecuaciones lineales con los datos del problema y 1,25 puntos por calcular las edades)**

4B. a) Determina el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = k - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

esté contenida en el plano $\pi \equiv x + 2y + z = 7$. **(1,25 puntos)**

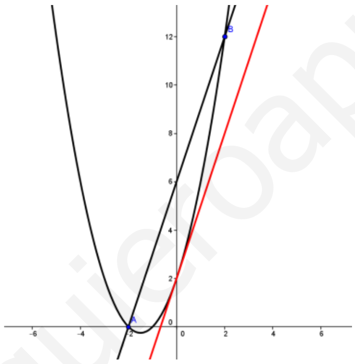
b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, obtén la ecuación implícita de un plano π' que corte perpendicularmente a π, de modo que la intersección de ambos planos sea r. **(1,25 puntos)**

B1.- Solución

a) **Teorema del valor medio de Lagrange**
Si **f(x)** es continua en **[a , b]** y derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto *c*∈**(a , b)** tal que: **(f(b)-f(a))/(b-a)=f'(c)**
Geométricamente, como **f'(c) es** la pendiente de la recta tangente en el punto **c** y es la pendiente de la cuerda que une los puntos **[a , f(a)]** y **[b , f(b)]**, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en **[a , b]** y tiene tangente en todos los puntos de **(a , b)**, es decir, es derivable en **(a , b)**, entonces existe, al menos, un punto de **(a , b)** en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos **(a,f(a)) , (b,f(b))** .
La función dada es continua y derivable en todo R por tanto se puede aplicar el teorema

$$f(x)=x^2+3x+2 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(-2)=0 \\ f(2)=12 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{12-0}{2-(-2)}=3 \\ f'(x)=2x+3 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=3 \Rightarrow 2x+3=3 \Rightarrow x=0$$

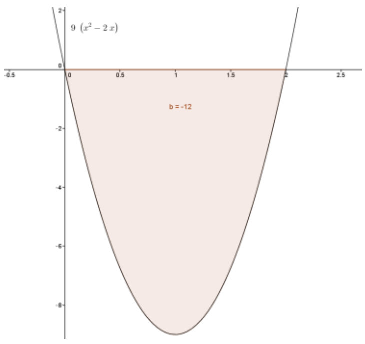
Luego c=0



B2.- Solución
Para cualquier a>0 se trata de una parábola de eje vertical con el vértice en el punto más bajo, los puntos de corte con el eje X son: $a(x^2-2x)=0 \Rightarrow ax(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Sabemos que

$$\int_0^2 a(x^2-2x)dx=-12 \Rightarrow a\int_0^2 (x^2-2x)dx = a[\frac{x^3}{3}-x^2]_0^2 = a(\frac{8}{3}-4)=-a\frac{4}{3}=-12 \Rightarrow a=9$$



B3.- Solución

Llamaremos E al número de años de Évaristo, N al nº de años de Niels y S al nº de años de Srinivasa

$$\begin{cases} E+N+S=78 \\ \dfrac{E+N+S}{3}=N \\ 4S+2N=9E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E+N+S=78 \\ E-2N+S=0 \\ 9E-2N-4S=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} E+N+S=78 \\ E-2N+S=0 \end{cases} \Rightarrow 3E+3S=156 \\ \begin{cases} E-2N+S=0 \\ 9E-2N-4S=0 \end{cases} \Rightarrow 8E-5S=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E+S=52 \\ 8E-5S=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5E+5S=260 \\ 8E-5S=0 \end{cases} \Rightarrow 13E=260 \Rightarrow E=20 \Rightarrow \begin{cases} S=32 \\ N=26 \end{cases}$$

B4.- Solución

a)De las ecuaciones de la recta y del plano obtenemos que el vector (1,2,1) es perpendicular al plano y (1,-1,1) es director de la recta. Como su producto escalr es 0 sabemos que la recta y el plano son paralelos, lo que necesitamos para que la recta esté contenida en el plano es que el punto (1,k,0) de la recta esté en el plano, o sea que 1+2k+0=7, luego k=3.

b)El vector producto vectorial de los vectores (1,2,1)x(1,-1,1)=(3,0,-3) es perpendicular al plano buscado y el punto (1,3,0) de la recta debe pertenecer a él luego 3(x-1)+0(y-3)-3(z-0)=0 es el plano buscado, simplificando: x-z=1