

TRIGONOMETRÍA

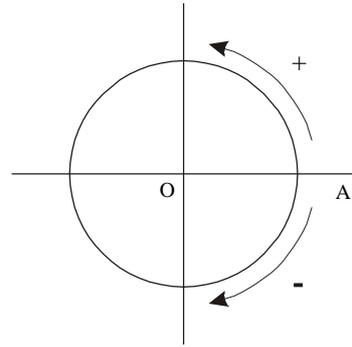
1. ÁNGULOS

Origen: A

Positivos: sentido antihorario.

Negativos: sentido horario.

MEDIDA DE ÁNGULOS $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema sexagesimal} \\ \text{Sistema centesimal} \\ \text{Radianes} \end{array} \right.$



- SISTEMA SEXAGESIMAL. Unidad: El grado sexagesimal ($^{\circ}$).

1 ángulo completo = 360°

$$1^{\circ} = \frac{1}{360} \text{ ángulo completo}$$

Divisores $\left\{ \begin{array}{l} \text{Minuto sexagesimal (')} \quad 1^{\circ} = 60' \quad 1' = \frac{1^{\circ}}{60} \\ \text{Segundo sexagesimal (")} \quad 1' = 60'' \quad 1'' = \frac{1'}{60} \end{array} \right.$

- SISTEMA CENTESIMAL. Unidad: El grado centesimal ($^{\text{g}}$).

1 ángulo completo = 400^{g} .

$$1^{\text{g}} = \frac{1}{400} \text{ ángulo completo}$$

Divisores $\left\{ \begin{array}{l} \text{Minuto centesimal (}^{\text{m}}) \quad 1^{\text{g}} = 100^{\text{m}} \quad 1^{\text{m}} = \frac{1^{\text{g}}}{100} \\ \text{Segundo centesimal (}^{\text{s}}) \quad 1^{\text{m}} = 100^{\text{s}} \quad 1^{\text{s}} = \frac{1^{\text{m}}}{100} \end{array} \right.$

- RADIANES. Unidad: El radián (rad).

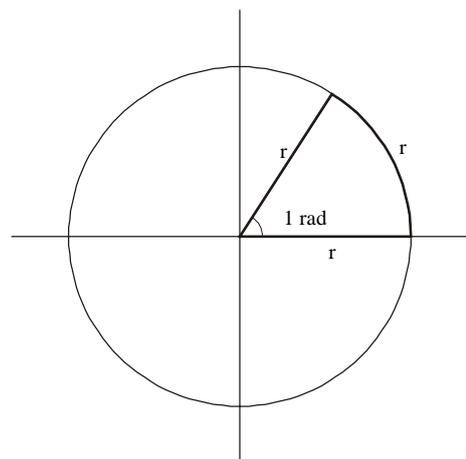
Un radián es un ángulo central correspondiente a un arco de circunferencia de longitud igual al radio de dicha circunferencia.

Longitud de la circunferencia = $2\pi r$.

1 ángulo completo = 2π rad.

$$1 \text{ rad} = \frac{1}{2\pi} \text{ ángulo completo}$$

$$1 \text{ rad} = 57^{\circ}17'44''$$



RELACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS SISTEMAS

$$360^{\circ} = 400^{\text{g}} = 2\pi \text{ rad}$$

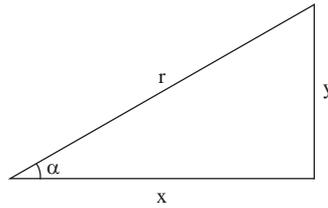
y simplificada

$$180^{\circ} = 200^{\text{g}} = \pi \text{ rad}$$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

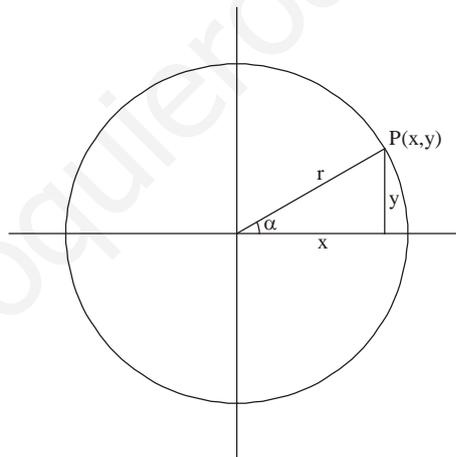
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

(Razones trigonométricas de un ángulo agudo)



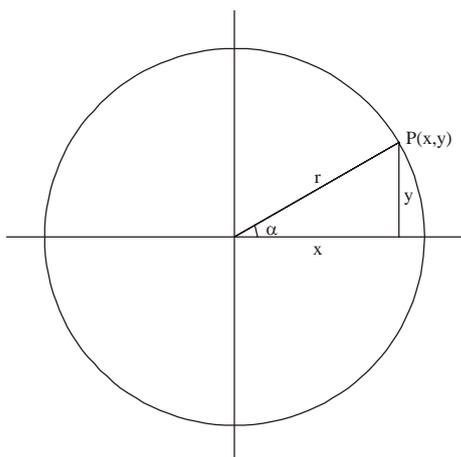
SENO	$sen \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$sen \alpha = \frac{y}{r}$
COSENO	$cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$	$cos \alpha = \frac{x}{r}$
TANGENTE	$tg \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$	$tg \alpha = \frac{y}{x}$
COSECANTE	$cosec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$	$cosec \alpha = \frac{r}{y}$
SECANTE	$sec \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}}$	$sec \alpha = \frac{r}{x}$
COTANGENTE	$cotg \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$	$cotg \alpha = \frac{x}{y}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO



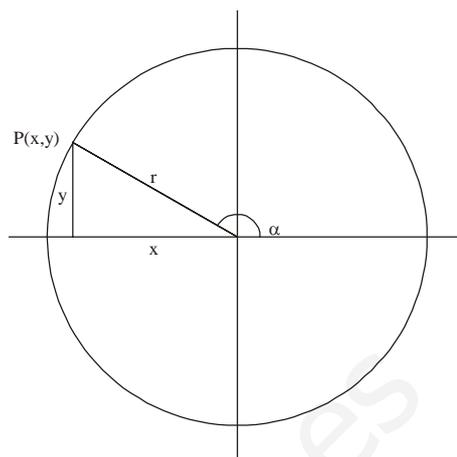
SENO	$sen \alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}}$	$sen \alpha = \frac{y}{r}$
COSENO	$cos \alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio}}$	$cos \alpha = \frac{x}{r}$
TANGENTE	$tg \alpha = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}}$	$tg \alpha = \frac{y}{x}$
COSECANTE	$cosec \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada}}$	$cosec \alpha = \frac{r}{y}$
SECANTE	$sec \alpha = \frac{\text{radio}}{\text{abscisa}}$	$sec \alpha = \frac{r}{x}$
COTANGENTE	$cotg \alpha = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}}$	$cotg \alpha = \frac{x}{y}$

3. SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



Primer cuadrante
 $\alpha \in I$

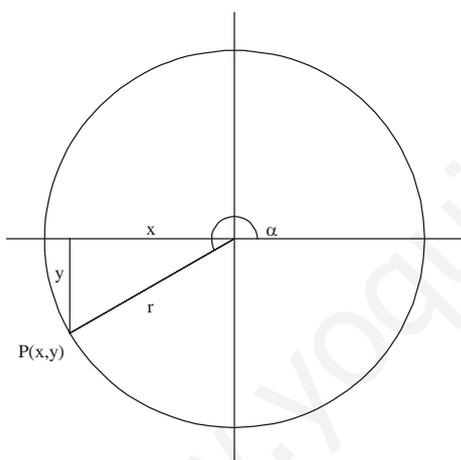
$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$



Segundo cuadrante
 $\alpha \in II$

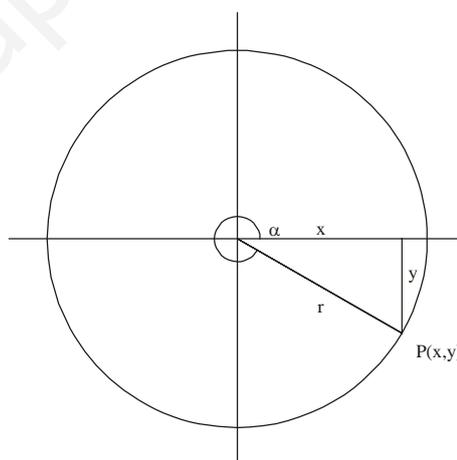
$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$r > 0$$



Tercer cuadrante
 $\alpha \in III$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$



Cuarto cuadrante
 $\alpha \in IV$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

	I	II	III	IV	
sen	+	+	-	-	cosec
cos	+	-	-	+	sec
tg	+	-	+	-	cotg

4. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Fórmula fundamental de la Trigonometría

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{cot}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{sec}^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{cot}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

Recorrido de las razones trigonométricas

$$-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$$

$$\operatorname{cosec} \alpha \leq -1 \quad \text{ó} \quad \operatorname{cosec} \alpha \geq 1$$

$$-1 \leq \operatorname{cos} \alpha \leq 1$$

$$\operatorname{sec} \alpha \leq -1 \quad \text{ó} \quad \operatorname{sec} \alpha \geq 1$$

$$-\infty < \operatorname{tg} \alpha < +\infty$$

$$-\infty < \operatorname{cotg} \alpha < +\infty$$

5. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

Razones trigonométricas de 0°, 90°, 180° y 270°.

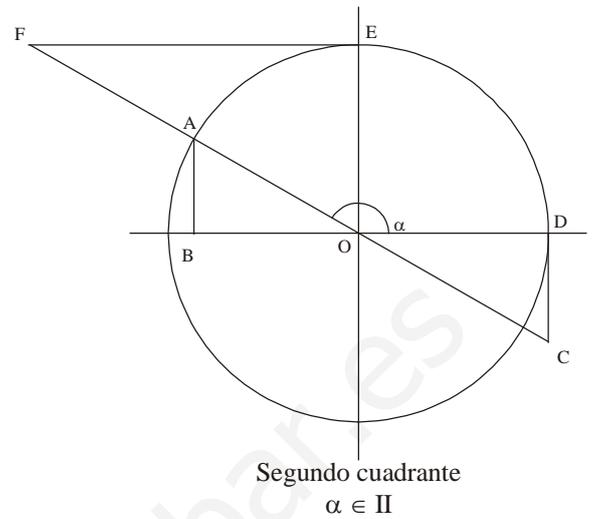
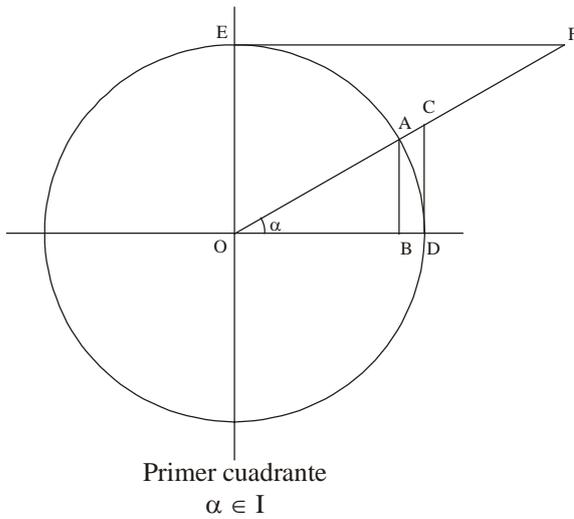
	0°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0		0	
cosec		1		-1
sec	1		-1	
cotg		0		0

Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

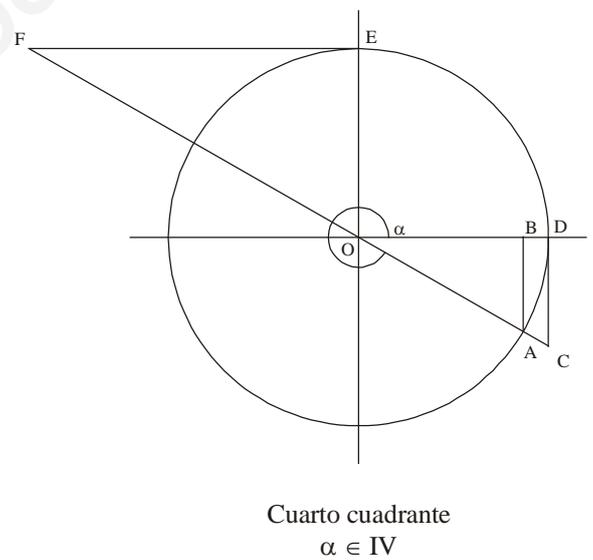
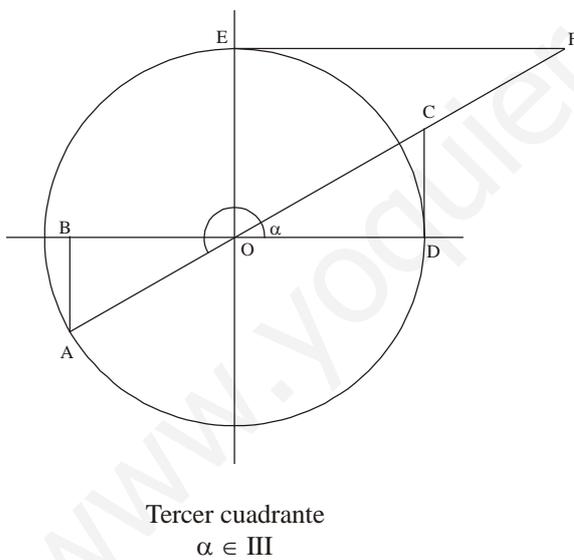
	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cosec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos la circunferencia trigonométrica: $r = 1$



$r = 1$



$\operatorname{sen} \alpha = \overline{AB}$	$\cos \alpha = \overline{OB}$	$\operatorname{tg} \alpha = \overline{CD}$
$\operatorname{cosec} \alpha = \overline{OF}$	$\operatorname{sec} \alpha = \overline{OC}$	$\operatorname{cotg} \alpha = \overline{EF}$

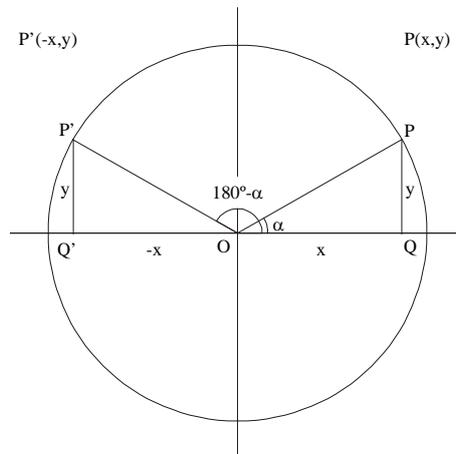
¡OJO! Esto es cierto únicamente cuando el radio es la unidad: $r = 1$.

7. **RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS**

ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Son aquellos que suman 180°

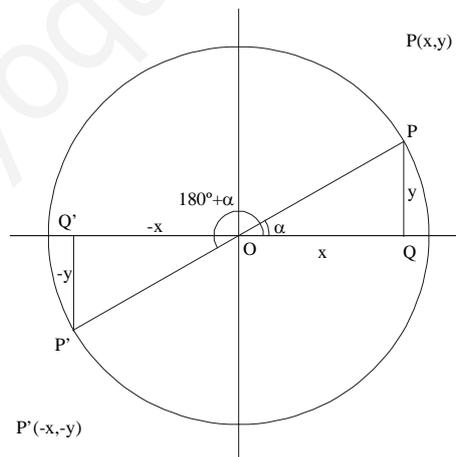
I	α
II	$180^\circ - \alpha$



$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$	$\text{cosec}(180^\circ - \alpha) = \text{cosec } \alpha$
$\text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha$	$\text{sec}(180^\circ - \alpha) = -\text{sec } \alpha$
$\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha$	$\text{cotg}(180^\circ - \alpha) = -\text{cotg } \alpha$

ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 180°

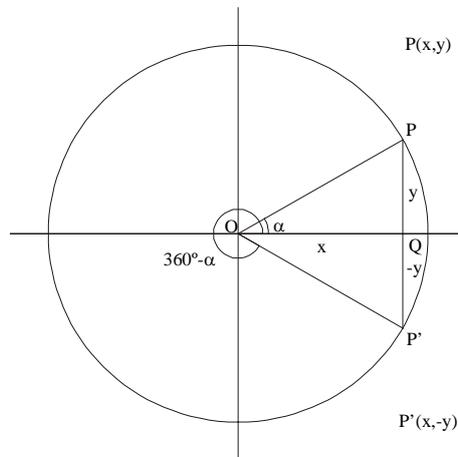
I	α
III	$180^\circ + \alpha$



$\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$	$\text{cosec}(180^\circ + \alpha) = -\text{cosec } \alpha$
$\text{cos}(180^\circ + \alpha) = -\text{cos } \alpha$	$\text{sec}(180^\circ + \alpha) = -\text{sec } \alpha$
$\text{tg}(180^\circ + \alpha) = \text{tg } \alpha$	$\text{cotg}(180^\circ + \alpha) = \text{cotg } \alpha$

ÁNGULOS QUE SUMAN 360°

I	α
IV	$360^\circ - \alpha$



$$\text{sen}(360^\circ - \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cosec}(360^\circ - \alpha) = -\text{cosec } \alpha$$

$$\text{cos}(360^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$$

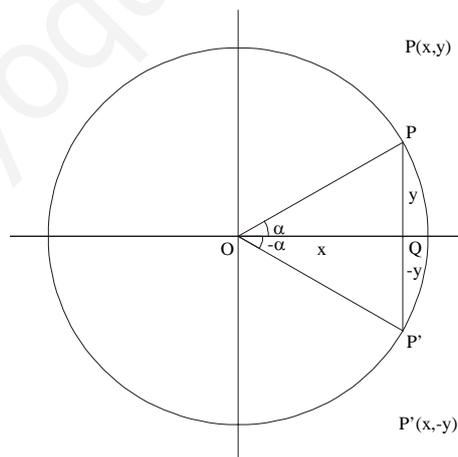
$$\text{sec}(360^\circ - \alpha) = \text{sec } \alpha$$

$$\text{tg}(360^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha$$

$$\text{cotg}(360^\circ - \alpha) = -\text{cotg } \alpha$$

ÁNGULOS OPUESTOS

I	α
IV	$-\alpha$



$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{cosec}(-\alpha) = -\text{cosec } \alpha$$

$$\text{cos}(-\alpha) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{sec}(-\alpha) = \text{sec } \alpha$$

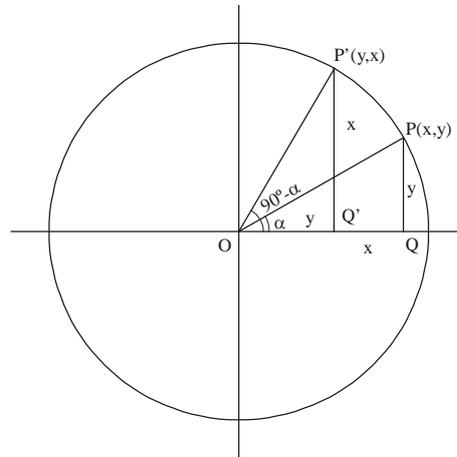
$$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg } \alpha$$

$$\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg } \alpha$$

ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Son aquellos que suman 90°

I	α
I	$90^\circ - \alpha$



$$\text{sen}(90^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{cos}(90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

$$\text{tg}(90^\circ - \alpha) = \text{cotg } \alpha$$

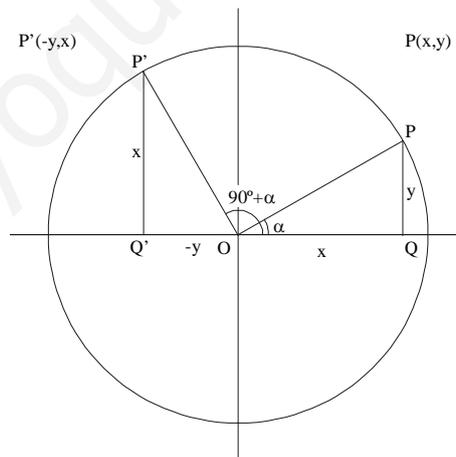
$$\text{cosec}(90^\circ - \alpha) = \text{sec } \alpha$$

$$\text{sec}(90^\circ - \alpha) = \text{cosec } \alpha$$

$$\text{cotg}(90^\circ - \alpha) = \text{tg } \alpha$$

ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 90°

I	α
II	$90^\circ + \alpha$



$$\text{sen}(90^\circ + \alpha) = \text{cos } \alpha$$

$$\text{cos}(90^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha$$

$$\text{tg}(90^\circ + \alpha) = -\text{cotg } \alpha$$

$$\text{cosec}(90^\circ + \alpha) = \text{sec } \alpha$$

$$\text{sec}(90^\circ + \alpha) = -\text{cosec } \alpha$$

$$\text{cotg}(90^\circ + \alpha) = -\text{tg } \alpha$$

8. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA ADICIÓN

SUMA Y DIFERENCIA

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

ÁNGULO DOBLE

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

ÁNGULO MITAD

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

TRANSFORMACIÓN DE PRODUCTOS EN SUMAS

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

TRANSFORMACIÓN DE SUMAS EN PRODUCTOS

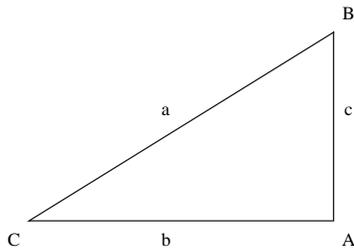
$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS



ÁNGULOS

$$\left. \begin{array}{l} A = 90^\circ \\ A + B + C = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow B + C = 90^\circ$$

B y C son complementarios

$$B + C = 90^\circ$$

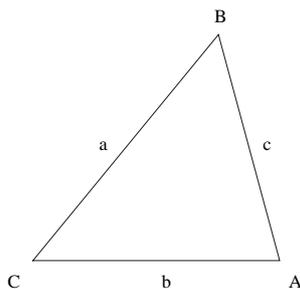
TEOREMA DE PITÁGORAS

$$a^2 = b^2 + c^2$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$	$\cos B = \frac{c}{a}$	$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$
$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a}$	$\cos C = \frac{b}{a}$	$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$

10. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS



ÁNGULOS

$$A + B + C = 180^\circ$$

TEOREMA DEL SENO

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

La razón constante entre el lado de un triángulo y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al mismo:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

siendo R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

TEOREMA DEL COSENO

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

El cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de los mismos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

Análogamente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

TEOREMA DE LA TANGENTE

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}$$

En todo triángulo, la suma de dos lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.

FÓRMULAS DE BRIGGS

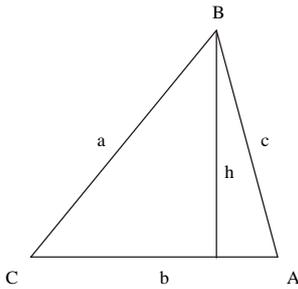
$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-a)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-b)}{p \cdot (p-c)}}$$

donde p es el semiperímetro.

11. ÁREA DE UN TRIÁNGULO



- Dado un lado y la altura sobre dicho lado.

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

- Dado un lado y dos ángulos.

$$S = \frac{b^2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C}{2 \cdot \operatorname{sen}(A+C)}$$

- Dados los lados y el radio de la circunferencia circunscrita.

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

- Dado el perímetro y el radio de la circunferencia inscrita.

$$S = p \cdot r$$

siendo p el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita.

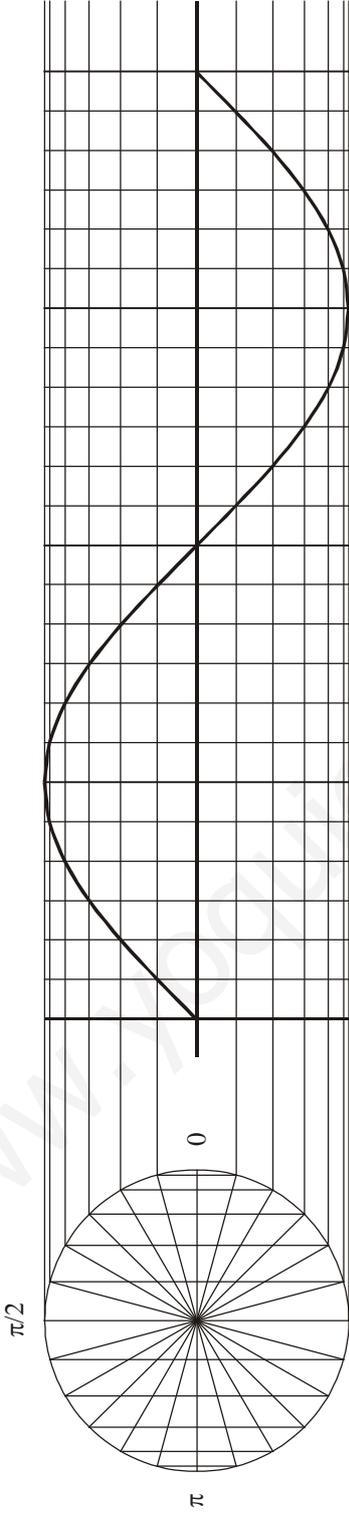
- Dados los tres lados.

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

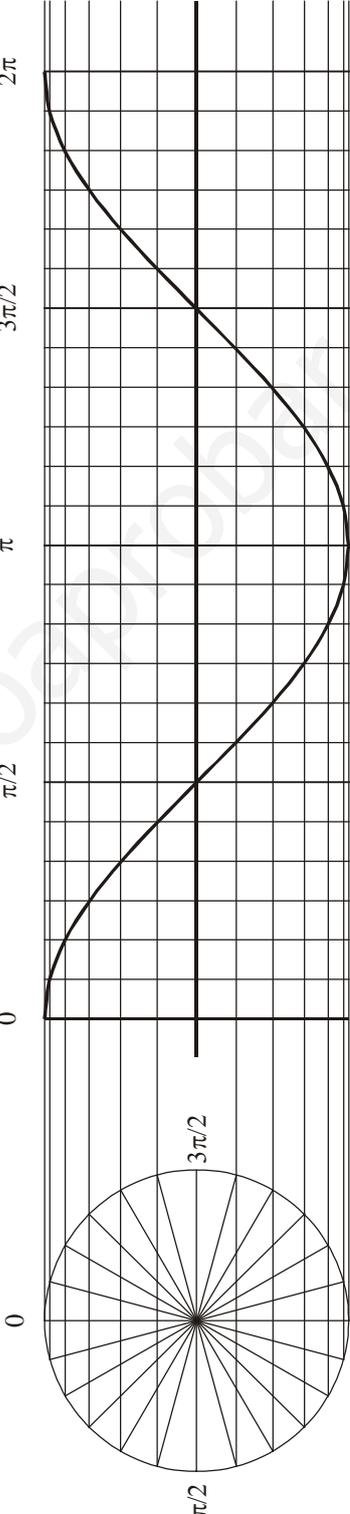
donde p es el semiperímetro.

12. FUNCIÓNES TRIGONÓMICAS

FUNCIÓN SENO



FUNCIÓN COSENO



FUNCIÓN TANGENTE

