PREGUNTA 1.- Dada la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3 - 4x}$

a) Determina su dominio.
b) Estudia su continuidad.
c) Estudia su simetría.
d) Halla los puntos de corte con los ejes.
e) Estudia su signo.
f) Busca sus asíntotas, si las tiene.
g) Esboza su gráfica.

PREGUNTA 2.- Explica porqué las siguientes afirmaciones son VERDADERAS o FALSAS:

a) Todas las funciones de la forma $f(x)=a^x$, con $a>0$ (Funciones Exponenciales) presentan un único punto de corte con los ejes en el punto (0,1).
b) Todas las funciones logarítmicas; $f(x)=\log_a x$, con $a>0$, presentan una asíntota vertical en la recta $x=0$.
c) La función $y=tgx$ es una función acotada con recorrido [-1,1]

PREGUNTA 3.- Dibuja las gráficas de las siguientes funciones:

a) $y=|senx|$

b) $y=|x+2|+x$

PREGUNTA 4.- Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, calcula:

a) $f'(3)$ siendo $f(x) = \dfrac{2x-3}{5}$

b) $f'(1)$ siendo $f(x) = (2x+1)^2$

PREGUNTA 5.- Dada la función $y = x^2 - 5x + 1$, busca, utilizando la definición de función derivada, los valores de x donde dicha función presenta puntos de tangente horizontal.

Calificaciones:

PREGUNTA	PUNTUACIÓN
1	3,5 puntos (0,5 puntos por apartado)
2	1,5 puntos (0,5 puntos por apartado)
3	2 punto (1 punto por apartado)
4	1,5 puntos (0,75 puntos por apartado)
5	1,5 puntos

PREGUNTA 1: $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^3-4x}$

a) $D(f)=\{x / x^3-4x\neq 0\}$

$x^3-4x=0\ ;\ (x^2-4)\cdot x=0 \begin{cases} x^2-4=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2} \\ \boxed{x=0} \end{cases}$

luego: $D(f)=\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$

b) Es una función RACIONAL, así que será continua en todo $\mathbb{R}$ excepto donde se anule el denominador, esto es: $\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$

c) $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+(-x)}{(-x)^3-4(-x)}=\dfrac{x^2-x}{4x-x^3}\neq f(x), -f(x) \Rightarrow$ NO PRESENTA NINGÚN TIPO DE SIMETRÍA.

d)

$f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^3-4x}$: P.C

eje X: $x^2+x=0 \Rightarrow x=0, x=-1$

$f(0)=\dfrac{0}{0} \Rightarrow$ NO ESTÁ DEFINIDA

$f(-1)=\dfrac{0}{3}=0 \rightarrow$ SÍ ES P.CORTE $\boxed{(-1,0)}$

eje y: $f(0)=\dfrac{0}{0} \rightarrow$ No corta al eje Y

e) SIGNO: $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^3-4x}=\dfrac{x(x+1)}{x(x+2)(x-2)}$

	$-\infty$ a -2	-2 a -1	-1 a 0	0 a 2	2 a $+\infty$
x	−	−	−	+	+
$(x+1)$	−	−	+	+	+
$x(x+1)$	+	+	−	+	+
$(x+2)$	−	+	+	+	+
$(x-2)$	−	−	−	−	+
$x(x+2)(x-2)$	−	+	+	−	+
$f(x)$	−	+	−	−	+

$f(x)>0$ si $x\in(-2,-1)\cup(2,+\infty)$

$f(x)<0$ si $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(0,2)$

f) Asíntotas

VERTICALES

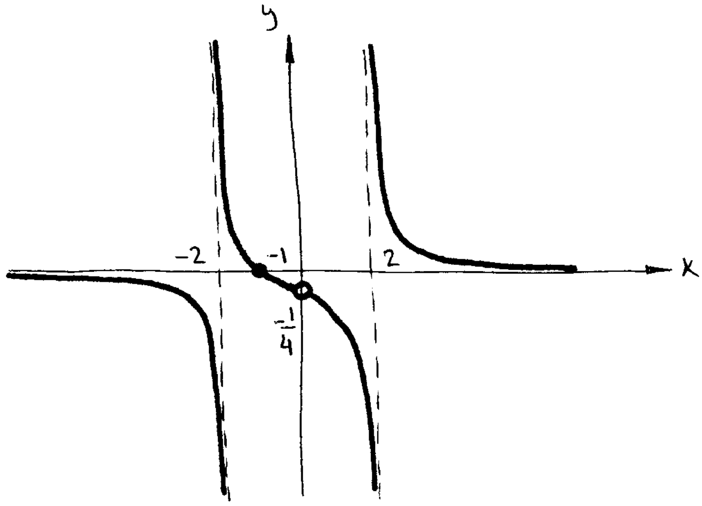
Si $x=-2$: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$ Asíntota vertical

Si $x=0$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left[\dfrac{0}{0}\right]\overset{\lim\limits_{x\to 0}}{=}\dfrac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{-4} \rightarrow$ No es AS. VERT.

Si $x=2$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{6}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{6}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}$ Asíntota vertical

HORIZONTALES $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ es Asíntota horizontal $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ NO tiene AS. OBLICUA.

g)



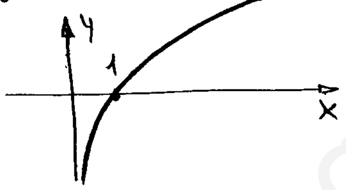
PREGUNTA 2:

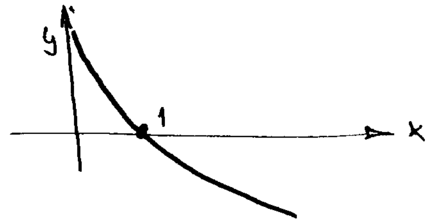
a) VERDADERO:

- No cortan nunca al eje x porque $a^x = 0$ con $a>0$ no tiene solución.
- Cortan siempre al eje Y en (0,1) porque $a^0 = 1$, independientemente del valor de a (con $a>0$)

b) VERDADERO:

- $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ si $a>1$ y $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ si $a<1$



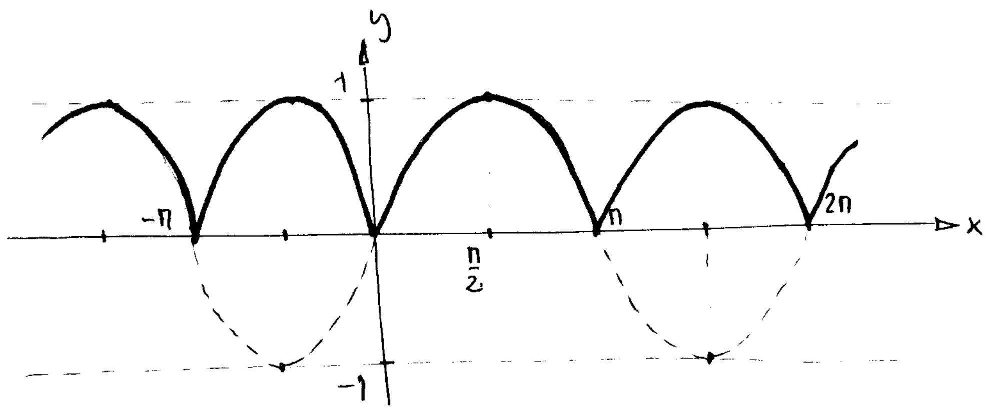


c) FALSO: Por ejemplo, si $x = \frac{\pi}{3}$ (60°)

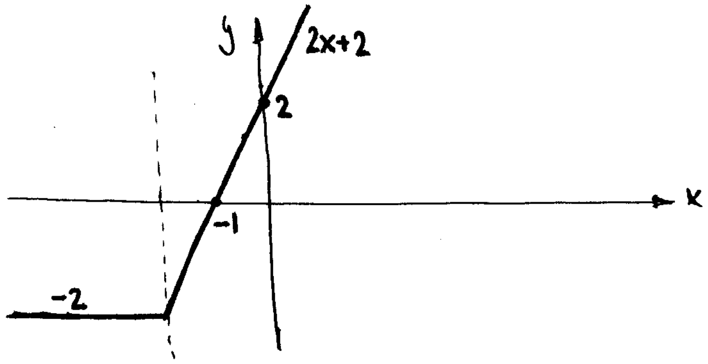
$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{sen(\pi/3)}{cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} > 1$$

PREGUNTA 3

a) $y = |sen\, x|$



b) $$y=|x+2|+x=\begin{cases} x+2+x = 2x+2 & \text{si } x+2>0 \Rightarrow \text{si } x>-2 \\ -x-2+x = -2 & \text{si } x+2\leq 0 \Rightarrow \text{si } x\leq -2 \end{cases}$$



$y=2x+2$

x	y
0	2
-1	0

PREGUNTA 4

a) $$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(3+h)-3}{5}-\frac{3}{5}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{6}+2h-\cancel{3}-\cancel{3}}{5h}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}}{5\cancel{h}}=\frac{2}{5}$$

b) $$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2(1+h)+1)^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3+2h)^2-9}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{9}+4h^2+12h-\cancel{9}}{h}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}[4h+12)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(4h+12)=12$$

PREGUNTA 5 :

Hallamos la función derivada:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-5(x+h)+1-(x^2-5x+1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+h^2+2xh-\cancel{5x}-5h+\cancel{1}-\cancel{x^2}+\cancel{5x}-\cancel{1}}{h}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x-5)}{\cancel{h}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(h+2x-5)=2x-5$$

los puntos de tangente horizontal tienen derivada nula, entonces:

$$2x-5=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{5}{2}}$$